Matemática Discreta
PURO-UFF - 2018.2
P1 - 8/nov/2018 - Eduardo Ochs
Turma pequena (C1, com aulas nas terças e quartas)
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 4.0)** Seja ($\star$) a seguinte proposição: todo inteiro par é a soma de dois ímpares.
a) **(0.5 pts)** Traduza ($\star$) para notação matemática.
b) **(3.0 pts)** Demonstre ($\star$) usando o formato que vimos no curso, com passos numerados começando com "Vamos mostrar que", "Suponha" e "Então".
c) **(0.5 pts)** Traduza a antepenúltima linha começada com "Então" da sua prova do item anterior para a notação com "$\vdash$".

2) **(Total: 1.0)** Mostre que $P \to (Q \to R)$ é logicamente equivalente a $(P \land Q) \to R$ e não é logicamente equivalente a $(P \to Q) \to R$.

3) **(Total: 2.0)** Calcule
a) **(0.5 pts)** $\mathcal{P}(\{2, 3, \{2, 3\}\})$,
b) **(1.0 pts)** $\bigcup\{\{2, 3\}, \{4, 5\}\}$,
c) **(0.5 pts)** $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ no caso em que $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$.

4) **(Total: 1.0)** Seja (P, S) o grafo direcionado cuja representação gráfica é a abaixo. Calcule $\{\, (a, b, c) \mid a, b, c \in P,\ aSb,\ bSc,\ cSa \,\}$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] & \\
3 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \arrow[u] \arrow[r] & 5
\end{tikzcd}$$

5) **(Total: 0.5)** Encontre um contra-exemplo para $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, a|b \vdash a \leq b$.

6) **(Total: 1.5)** Calcule $\{a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, a|b; a \leq b\}$.

Algumas definições:
x natural $:= x \in \mathbb{N}$
x inteiro $:= x \in \mathbb{Z}$
$\mathsf{par}(x) := \exists a \in \mathbb{Z}.x = 2a$
$\mathsf{impar}(x) := \exists a \in \mathbb{Z}.x = 2a + 1$
$a|b := \exists k \in Z.ka = b$

Algumas dicas:
$x \in A \cup B = x \in A \lor x \in B$
$x \in \bigcup \mathcal{C} = \{\, a \mid \exists B \in \mathcal{C}.a \in B \,\}$

Mini-gabarito (não revisado)

1a) Podemos começar traduzindo essa proposição para português mais próximo de linguagem matemática, em vários passos: “todo inteiro par a pode ser expresso como soma de um inteiro ímpar b e um inteiro ímpar c”; “Para todo inteiro par a existem um inteiro ímpar b e um inteiro ímpar c tais que $a = b+c$”. E aí chegamos a:

$\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\exists c \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(b) \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c))$, ou:
$\forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}. \land \mathsf{impar}(c) \land (a = b + c)))$.

1b) Podemos começar com uma demonstração em português e depois formalizá-la. Seja a um inteiro par. Sejam $b = 9$ e $c = a - 9$; então b é ímpar (porque $9 = 2 \cdot 4 + 1$), c é ímpar (porque $c = a - 9 = 2k - 9 = 2(k - 5) + 1$), e $a = b + c$. Portanto existem um inteiro ímpar b e um inteiro ímpar c tais que $a = b + c$.

Vamos começar com demonstrando um lema primeiro: que se a é par então $c = a - 9$ é impar.

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \mathsf{par}(a)$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \exists k \in \mathbb{Z}.a = 2k$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a), k \in \mathbb{Z}, a = 2k \vdash a - 9 = 2k - 9 = 2(k - 5) + 1$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a), k \in \mathbb{Z}, a = 2k \vdash k - 5 \in \mathbb{Z}$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a), k \in \mathbb{Z}, a = 2k \vdash a - 9 = 2(k - 5) + 1$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a), k \in \mathbb{Z}, a = 2k \vdash \exists n \in \mathbb{Z}.a - 9 = 2n + 1 \quad$ (com $n := k - 5$)
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a), k \in \mathbb{Z}, a = 2k \vdash \mathsf{impar}(a - 9)$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \mathsf{impar}(a - 9)$
$a \in \mathbb{Z} \vdash \mathsf{par}(a) \to \mathsf{impar}(a - 9)$
$\vdash \forall a \in \mathbb{Z}.\mathsf{par}(a) \to \mathsf{impar}(a - 9)$

Não vou demonstrar que 9 é ímpar. =)

Agora:

$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \mathsf{impar}(9)$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \mathsf{impar}(a - 9)$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash a = 9 + (a - 9)$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \mathsf{impar}(a - 9) \land a = 9 + (a - 9)$
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = 9 + c) \quad$ (com $c := a - 9$)
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c)) \quad$ (com $b := 9$)
$a \in \mathbb{Z}, \vdash \mathsf{par}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c)))$
$\vdash \forall a \in \mathbb{Z}.(\mathsf{par}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c))))$

A demonstração completa é:
1) Queremos ver que
$\forall a \in \mathbb{Z}.(\mathsf{par}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c)))).$
2) Suponha $a \in \mathbb{Z}$.
3) Suponha $\mathsf{par}(a)$.
4) Entao $\mathsf{impar}(9)$. (Por um lema)
4) Entao $\mathsf{impar}(a - 9)$. (Por outro lema)
5) Entao $a = 9 + (a - 9)$. (Por álgebra)
6) Entao $\mathsf{impar}(a) \land a = 9 + (a - 9)$. (Por 4, 5)
7) Entao $\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = 9 + c)$. (Por 6, com $c := a - 9$)
8) Entao $\mathsf{impar}(9) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = 9 + c))$. (Por 4, 7)
9) Entao $\exists b \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c)))$. (Por 8, com $b := 9$)
10) Entao $\mathsf{par}(a) \to \exists b \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c)))$. (Por 9)
11) Entao $\forall a \in \mathbb{Z}.(\mathsf{par}(a) \to (\exists b \in \mathbb{Z}.\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c))))$. (Por 10)

1c) A linha 9 vira:
$a \in \mathbb{Z}, \mathsf{par}(a) \vdash \exists b \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(b) \land (\exists c \in \mathbb{Z}.(\mathsf{impar}(c) \land a = b + c)))$.

2) Pela tabela:

P	Q	R	$P \to (Q \to R)$	$(P \land Q) \to R$	$(P \to Q) \to R$
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

$$
\text{3a) } \mathcal{P}(\{2,3,\{2,3\}\}) = \begin{array}{lll} \{ & \{\quad\quad\quad\}, & \{\quad\quad \{2,3\}\}, \\ & \{\quad 3 \quad\}, & \{\quad 3, \{2,3\}\}, \\ & \{2 \quad\quad\}, & \{2, \quad \{2,3\}\}, \\ & \{2,3 \quad\}, & \{2,3,\{2,3\}\} \quad \}. \end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{3b)} \quad \bigcup\{\{2,3\},\{4,5\}\} & = & \{\, a \mid \exists B \in \{\{2,3\},\{4,5\}\}. a \in B \,\} \\
& = & \{\, a \mid a \in \{2,3\} \lor a \in \{4,5\} \,\} \\
& = & \{\, a \mid a \in \{2,3\} \cup \{4,5\} \,\} \\
& = & \{\, a \mid a \in \{2,3,4,5\} \,\} \\
& = & \{2,3,4,5\}
\end{array}
$$

3c) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{2\} \cup \{3\}) = \mathcal{P}(\{2,3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\{2\}) \cup \mathcal{P}(\{3\}) = \{\emptyset, \{2\}\} \cup \{\emptyset, \{3\}\} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}$
$(\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) = (\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}\}) = \mathbf{F}$

4) $P = \{1,2,3,4\}$
$S = \{(1,2),(2,3),(3,1),(3,4),(4,2),(4,5)\}$
$\{\, (a,b,c) \mid a,b,c \in P,\ aSb,\ bSc,\ cSa \,\} =$
$\{(1,2,3),(2,3,1),(2,3,4),(3,1,2),(3,4,2),(4,2,3)\}$

5) Se $a = 2$ e $b = -6$ então $a|b$ é verdade mas $a \le b$ é falso.

6) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ o resultado de $a \le b$ é sempre **F** ou **V**, então:
$\{a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}; a \le b\} \subseteq \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$
$\{a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, a|b; a \le b\} \subseteq \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$
Podemos calcular $\{a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, a|b; a \le b\}$ por um *pedaço* da tabela, que é infinita...

a	b	$a\|b$	$a \le b$
2	3	**F**	
2	4	**V**	**V**
2	-4	**V**	**F**

Daí $\{a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, a|b; a \le b\} = \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$.