Matemática Discreta - 2018.2
Prof: Eduardo Ochs
Lista de exercícios de 22/out/2018

No início do curso, quando fizemos os exercícios de notação de conjuntos, nós usamos um modo de representar subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ com uma notação com bolinhas; por exemplo, o conjunto $\{(1,2),(3,4)\}$ era representado com um '$\bullet$' na posição $(1,2)$ e outro $\bullet$' na posição $(3,4)$. Agora vamos passar a usar uma "notação posicional para funções" parecida com essa, mas usando outras coisas ao invés de '$\bullet$'s.

1) Seja $K = \{(1,3),(0,2),(2,2),(1,1),(1,0)\}$. Represente K graficamente.

2) Seja $f = \{((1,3),1),((0,2),2),((2,2),3),((1,1),4),((1,0),5)\}$. Verifique que $f : K \to \mathbb{N}$ e represente f graficamente da seguinte forma: escreva o valor de $f((1,3))$ $(= 1)$ na posição $(1,3)$, escreva o valor de $f((0,2))$ na posição $(0,2)$, e assim por diante. Isto é a "notação posicional para funções".

3) Represente graficamente a função
$\{((1,3),\mathbf{F}),((0,2),\mathbf{V}),((2,2),\mathbf{F}),((1,1),\mathbf{F}),((1,0),\mathbf{F})\}$.

Sejam:
$A = \{\, (x,y) \mid x \in \{0,1,2,3\}, y \in \{0,1,2\} \,\}$
$P = \{\, ((x,y),z) \mid (x,y) \in A, z = (x \leq 1 \land y \geq 1) \,\}$
$Q = \{\, ((x,y),z) \mid (x,y) \in A, z = (1 \leq x \leq 2 \land y \geq 1) \,\}$
$R = \{\, ((x,y),z) \mid (x,y) \in A, z = (0 \leq x \leq 2 \land y \leq 1) \,\}$
Uma *proposição sobre* X é uma função do conjunto X no conjunto $\{\mathbf{F},\mathbf{V}\}$. Repare que P, Q, R são proposições sobre A.

4) Represente graficamente o conjunto A e as funções (proposições!) P, Q e R.

5) Calcule $P(0,2)$, $P(1,2)$, $P(3,2)$.

Uma expressão como "$P(x,y) \land Q(x,y)$" só pode ser calculada se soubermos os valores x e y — mas ela pode ser interpretada como uma nova proposição sobre A. Usando esta idéia, represente graficamente as seguintes proposições sobre A:

6) $P(x,y) \land Q(x,y)$
7) $P(x,y) \land R(x,y)$
8) $Q(x,y) \land R(x,y)$
9) $\neg P(x,y)$
10) $P(x,y) \to Q(x,y)$
11) $P(x,y) \lor (Q(x,y) \land R(x,y))$
12) $\top$
13) $x \leq y$

Releia as seções do livro que definem "conjunto potência" (ou: "conjunto das partes") e "diagramas de Hasse", e:

14) Calcule $\mathcal{P}(\{2,3,5\})$.

15) Desenhe o diagrama de Hasse da ordem parcial $(\mathcal{P}(\{2,3,5\}), \subseteq)$. Obs: isto é um abuso de linguagem — o modo mais formal e mais preciso de escrever esta ordem parcial seria assim, restringindo o '$\subseteq$' ao $\mathcal{P}(\{2,3,5\}$:

$$(\mathcal{P}(\{2,3,5\}), \{\, (A,B) \mid A,B \in \mathcal{P}(\{2,3,5\}), A \subseteq B \,\}).$$

O grande objetivo dos exercícios de hoje é fazer vocês começarem a visualizar a ordem parcial sobre as proposições (!!!). Hoje vamos só entender a ordem parcial sobre as proposições sobre o conjunto A da página anterior. A ordem é definida desta forma: $P \leq Q$ se e só se $\forall (x,y) \in A.P(x,y) \to Q(x,y)$.

16) Verifique que $P(x,y) \land Q(x,y) \ \leq \ P(x,y)$.

17) Verifique que $P(x,y) \ \leq \ P(x,y) \lor Q(x,y)$.

18) Verifique que $\bot \leq P(x,y) \leq \top$.

19) Verifique que $P(x,y) \not\leq Q(x,y)$ e que $Q(x,y) \not\leq P(x,y)$.

20) Seja $\mathcal{S}$ o seguinte conjunto de proposições sobre A:

$$\mathcal{S} = \{\top, \bot, P(x,y), Q(x,y), P(x,y) \land Q(x,y), P(x,y) \lor Q(x,y), R(x,y), P(x,y) \to Q(x,y)\}.$$

Faça um diagrama de Hasse de $\mathcal{S}$ com a ordem que definimos. Obs: a notação usual para esta ordem parcial, com um abuso de linguagem parecido com o que usamos acima, é $(\mathcal{S}, \to)$.

(Dica: você vai acabar descobrindo que a proposição $\top$ é a "mais verdadeira de todas", porque ela é verdadeira sempre, i.e., ela é verdadeira em todo lugar; a proposição $\bot$ é a "menos verdadeira de todas", porque não é verdade nunca, em lugar nenhum, e as outras são intermediárias entre $\bot$ e $\top$ — e *comparar proposições* é parecido com *comparar conjuntos*, mas isso eu não vou explicar, você vai ter que descobrir porquê =))