

Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 10 e 11: O TFC2
(O segundo Teorema Fundamental do Cálculo)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://angg.twu.net/2020.1-C2.html>

Introdução

Boa parte do que a gente vai ver hoje é uma versão melhorada das idéias do exercício 6 da aula passada... então comecem revisando o exercício 6 da aula passada (e as dicas da página 11). Link:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-TFCs.pdf>

Exercício 1.

Seja $f(x) = -x^2 + 4x$, como na aula passada.

Sejam $a = 1$ e $b = 2$.

- Encontre uma antiderivada para f e chame-a de $H(x)$.
- Encontre uma antiderivada $F(x)$ para f que obedeça $F(a) = 0$.
- Use esta $F(x)$ para calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$.

Lembre que $a = 1$ e $b = 2$!

Exercício 2.

Seja $f(x) = -x^2 + 4x$ (de novo).

Sejam $a = 2$ e $b = 3$.

- Encontre uma antiderivada para f e chame-a de $H(x)$.
- Encontre uma antiderivada $F(x)$ para f que obedeça $F(a) = 0$.
- Use esta $F(x)$ para calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$.
- Faça o gráfico da função $D(x) = F(x) - H(x)$. Verifique que ela é constante. Chame de C o número tal que $D(x) = C$. Verifique que $F(x) = H(x) + C$.

No item (c) da página anterior você calculou $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$ por:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Repare que:

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ &= (H(b) + C) - (H(a) + C) \\ &= H(b) - H(a) \end{aligned}$$

Ou seja, dá pra calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$ por $H(b) - H(a)$, sem a gente precisar fazer o item (b), que é trabalhoso...

O TFC2

Digamos que $f(x)$ é uma função integrável

e que queremos calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$.

Digamos que $H(x)$ é alguma antiderivada contínua de $f(x)$.

(Qualquer uma serve, mas tem que ser contínua.)

Então (Teorema! Este é o TFC2!):

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = H(b) - H(a)$$

Exercício 3.

Digamos que $g(x) = 6 - x$.

- Calcule a área $\int_{x=2}^{x=4} g(x) dx$ pela fórmula da área do trapézio.
- Calcule a área $\int_{x=4}^{x=6} g(x) dx$ pela fórmula da área do trapézio.
- Use a fórmula da área do trapézio pra encontrar uma fórmula que calcule a área $\int_{x=a}^{x=b} g(x) dx$ para quaisquer $a, b \in [0, 6]$. Teste a sua fórmula nos exercícios (a) e (b).
- Encontre uma antiderivada para $g(x)$.
- Use essa antiderivada pra encontrar uma fórmula para calcular $\int_{x=a}^{x=b} g(x) dx$ e verifique que essa fórmula é equivalente à que você obteve no item (c).

Agora que você entendeu bem antiderivadas faça os exercícios 4 e 5 da aula passada.