

# Cálculo 2 - 2020.1

Aula 1: Introdução ao curso

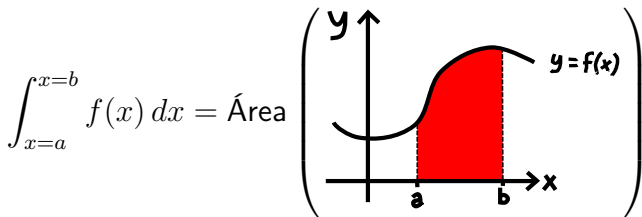
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

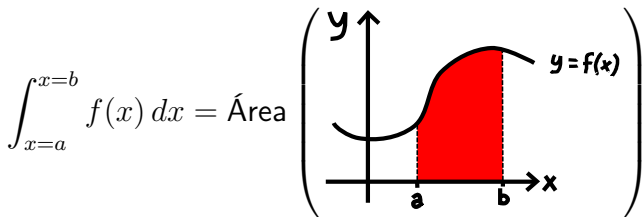
<http://angg.twu.net/2020.1-C2.html>

# 1 Introdução ao curso

O curso de Cálculo 2 é principalmente sobre dois assuntos: **integrais**, e **equações diferenciais ordinárias**. Nós vamos abreviar “equação diferencial ordinária” como “EDO”; existem também as *equações diferenciais parciais*, ou EDPs, que são um assunto beem mais complicado.

**Integrais são áreas.** A expressão  $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$  quer dizer “a área sob a curva  $y = f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$ ”. Mais visualmente,





Pra aprender a calcular essas áreas a gente vai ter que aprender a aproximá-las por somas de retângulos – um limite complicado! – e os detalhes vão dar um trabalhão... =(

Repare, a área em vermelho é delimitada:

por cima pela **curva**  $y = f(x)$ ,

pela esquerda pela reta  $x = a$ ,

pela direita pela reta  $x = b$ ,

por baixo pela reta  $y = 0$ .

**Equações diferenciais** (lembre: “ordinárias”  $\rightarrow$  “EDOs”) são um pouco mais complicadas do que as equações que já sabemos resolver...

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1) | $x + 2 = 5$                                   | Equação de 1º grau                           |
| 2) | $x^2 + 3 = 7$                                 | Eq. de 2º grau simples                       |
| 3) | $x^2 + x = 6$                                 | Eq. de 2º grau mais complicada               |
| 4) | $f'(x) = x^4$<br>ou: $\frac{d}{dx}f(x) = x^4$ | EDO simples<br>$f$ é a variável/incógnita!!! |
| 5) | $f'(x) = 2f(x)$                               | EDO mais complicada                          |
| 6) | $f''(x) + f'(x) = 6f(x)$                      | idem   |
| 7) | $f'(x) = -1/f(x)$                             | idem   |

Na passagem de (1) para (2) e (3) as equações ficaram mais complicadas porque o  $x$  passou a poder aparecer elevado ao quadrado.

No (4) estamos procurando uma **função**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que obedeça  $f'(x) = x^4$  **para todo**  $x$ . Esse “para todo  $x$ ” fica **implícito**.

## 2 Chutar e testar

Nosso primeiro método de resolver equações vai ser **chutar e testar** – nós vamos chutar valores pra incógnita e ver se algum deles é uma solução.

**Aprender a **testar** vai ser A coisa mais importante do curso.**

Neste curso nós vamos usar duas coisas que não são padrão em cursos de Cálculo 2:

- 1) Uma notação — que normalmente só o pessoal de Computação aprende, e só em cursos avançados... — para **substituição de variáveis em expressões arbitrárias**,
- 2) Nós vamos usar a fórmula  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  a beça.

Nós vamos reescrever isto:

Se substituirmos  $x$  por  $10a + b$   
e  $y$  por  $3c + 4d$  em:

$$x^y + 2x$$

obtemos:

$$(10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

deste jeito:

$$(x^y + 2x) \left[ \begin{array}{l} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{array} \right] = (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

Repare: em

$$(x^y + 2x) \left[ \begin{array}{l} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{array} \right]$$
$$= (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

a notação é

$$(\text{expressão original})[\text{substituições}] = (\text{expressão nova})$$

e cada uma das substituições é da forma:

$$\text{variável} := \text{expressão}$$

A notação ‘ $:=$ ’ vai ser bem prática pra gente fazer hipóteses e testá-las. Por exemplo, digamos que queremos testar se 2 e 3 são soluções da equação  $x + 2 = 5$ ...

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 2] &= (2 + 2 = 5) \\ &= (4 = 5) \\ &= \mathbf{F}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 3] &= (3 + 2 = 5) \\ &= (5 = 5) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

Note que os ‘ $=$ ’s das expressões entre parênteses são **comparações** – como a operação ‘ $==$ ’ do **C** – e retornam ou **V** (“Verdadeiro”) ou **F** (“Falso”).



## “Eu só vou corrigir os sinais de igual”

Uma dos slogans que eu mais vou repetir quando estiver tirando dúvidas ou corrigindo exercícios de vocês é “Eu só vou corrigir os sinais de igual”.

Em Cálculo 1 muita gente se enrola com a fórmula da regra da cadeia – porque se enrola na hora de substituir os ‘ $f$ ’s, ‘ $g$ ’s, ‘ $f'$ ’s e ‘ $g'$ ’s nela... uma das fórmulas mais importantes, e mais difíceis de acreditar, de Cálculo 2 é a da **Integração por Substituição**, que é BEEEEEM pior do que a Regra da Cadeia. O **operador de substituição**, “[:=], que não tem nada a ver com a Integração por Substituição, vai nos ajudar bastante a aplicar essas fórmulas passo a passo sem a gente se perder.

Vamos precisar de alguns truques novos...

## Exemplo: regra da cadeia

Primeiro vou inventar uma abreviação para a regra da cadeia.

Obs: vários dos truques que vamos usar agora são inspirados em notações de Teoria da Computação e não são padrão!!! Não use eles em outros cursos!!! **Os professores podem não entender e podem ficar putos!!!**

O ‘:=’ abaixo é uma **atribuição**, como o ‘=’ do  $\mathbb{C}$ . A linha abaixo quer dizer: “**a partir de agora** o valor de  $[RC]$  vai ser a **expressão** entre os parênteses grandes.

$$[RC] := \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

## Exemplo: regra da cadeia (2)

Continuando...

$$[RC] := \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Então:

$$\begin{aligned} [RC] [f := \text{sen}] &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right) \\ [RC] [f(u) := \text{sen } u] &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right) \\ [RC] \left[ \begin{array}{l} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{array} \right] &= \left( \frac{d}{dx} (g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x) \right) \end{aligned}$$

Repare que agora estamos substituindo o ‘ $f$ ’ **como se ele fosse uma variável** – mas precisamos de gambiarras novas. No caso do meio escrevemos  $f(u) := \text{sen } u$  ao invés de  $f := \text{sen}$ , e...

$$[RC] := \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[RC] [f := \text{sen}] = \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[RC] [f(u) := \text{sen } u] = \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[RC] \left[ \begin{array}{l} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{array} \right] = \left( \frac{d}{dx} (g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x) \right)$$

...e no caso de baixo acrescentamos uma linha “ $f'(u) := 4u^3$ ” na lista de substituições. Essa linha é uma **consequencia** da linha “ $f(u) := u^4$ ”, e ela está lá só pra ajudar a gente a se enrolar menos.

## Exercício

Tente resolver as EDOs abaixo (de um dos primeiros slides) por chutar e testar.

- |    |                              |                               |
|----|------------------------------|-------------------------------|
| 4) | $f'(x) = x^4$                | EDO simples                   |
|    | ou: $\frac{d}{dx}f(x) = x^4$ | $f$ é a variável/incógnita!!! |
| 5) | $f'(x) = 2f(x)$              | EDO mais complicada           |
| 6) | $f''(x) + f'(x) = 6f(x)$     | idem                          |
| 7) | $f'(x) = -1/f(x)$            | idem                          |

Sugestão: comece testando  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = x^5$ ,  $f(x) = 200x^5 + 42$ ,  
 $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = e^{42x}$ ,  $f(x) = e^{2x}$ ,  $f(x) = e^{3x}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  
 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ .