Cálculo 3 - 2020.1

Aula 14 e 15: Introdução a planos tangentes
(e à derivada — e mini-teste 1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

Na aula passada nós começamos a ver derivadas parciais, mas num caso complicado, e eu pedi pra vocês assistirem este vídeo aqui, do Danilo Pereira,

http://www.youtube.com/watch?v=nmZ1Wmk7wcY

chamado "Cálculo II - Derivada Direcional e Vetor Gradiente (1 de 2)", que também começa direto em casos bem complicados.

Hoje nós vamos ver algo bem mais simples: *planos*.

Definição. Vou dizer que uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é de primeira ordem* quando existirem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que F é da forma:

$$F(x,y) \quad = \quad ax + by + c$$

Exercício 1.

Para cada uma das funções abaixo converta-a para a forma $F(x,y) = ax + by + c$ e diga "quem são o a, o b e o c dela".

a) $F(x,y) = 2(x+y) + 3(x-4y) - 20$
b) $F(x,y) = (x+y) + (x-y) + 42$

Exercício 2.

Seja $F(x,y) = 3 + 2x + y$.

a) Desenhe o diagrama de numerozinhos da F.

b) Calcule $F(0,2)$.

c) Desenhe a curva de nível de $z = F(0,2)$.

d) Desenhe a curva de nível de $z = F(2,2)$.

e) Desenhe a curva de nível de $z = 9$.

f) Desenhe a curva de nível de $z = 3$.

g) Sempre que uma $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for uma função de primeira ordem as suas curvas de nível vão ser "equiespaçadas". Use isto para descobrir como desenhar as curvas de nível da F para $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$, $z = 4$. Escreva do lado de cada uma delas "$z = 0$", "$z = 1$", etc, pra você não se perder.

Exercício 2 (continuação).

h) Escolha algum vetor $\vec{v}$ não-nulo que seja paralelo às curvas de nível que você acabou de desenhar. Diga as componentes dele.

i) Calcule as derivadas parciais da F.

j) Calcule o gradiente da F. Dica: onde o vídeo do Danilo Pereira define gradiente? Ele usa a mesma notação que o Bortolossi usa no capítulo 8 do livro dele?

k) O gradiente da F é ortogonal ao vetor $\vec{v}$ do item h? Calcule o produto interno deles.

Seja $F(x,y) = 3 + 2x + y$,
Slogan: "o vetor gradiente de F diz a direção pra onde a F cresce mais rápido".
Sejam $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $C = \{\, (x_0, y_0) + \vec{v} \mid ||\vec{v}|| = 1 \,\}$.
Veja este vídeo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_vetor_gradiente.mp4

Derivada

Se F é um função de $\mathbb{R}^m$ em R^n a derivada de F vai ser uma *matriz*... isto é bem complicado e vai ficar pra segunda parte do curso — mas hoje vamos ver um caso particular, no qual a derivada Df é uma matriz *horizontal*, e este caso vai nos ajudar a entender algumas coisas do video do Danilo Pereira.

Definição (temporária):
Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e p_0 é um ponto de $\mathbb{R}^2$ então

$$\begin{array}{rcl} DF(p_0) & = & \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p_0) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(p_0) \right) \\ DF & = & \left(\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \right) \end{array}$$

Obs: ela é "temporária" porque depois que nós entendermos as páginas 252 até 263 do Bortolossi a nossa definição "de verdade" da derivada em várias dimensões vai ser algo bem mais geral, e as equações acima vão ser só consequências "óbvias" da definição mais geral.

Exercício 3.

Slogan: "Funções de primeira ordem têm derivada constante".
Seja $F(x,y) = 3 + 2x + y$.

Calcule:
a) $DF(10,20)$
b) $DF(42,99)$

Seja $G(p_1) = F(p_1) + DF(p_0)(p_1 - p_0)$,
onde F continua a mesma.
Digamos que $p_0 = (1,4)$ e $p_1 = (2,5)$.
c) Segundo as nossas convenções quem são x_0, y_0, x_1, y_1?
d) Interpretando $(p_1 - p_0)$ como um vetor vertical, isto é,
$(p_1 - p_0) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{smallmatrix}\right)$, Calcule $G(p_1)$.
e) Calcule $F(p_1)$ e compare o seu valor com $G(p_1)$.

No exercício da página anterior você aproximou uma função F de primeira ordem por uma função G que também era de primeira ordem, e você deve ter descoberto que no ponto p_1 que eu dei a gente tinha $G(p_1) = F(p_1)$... agora vamos tentar fazer algo parecido começando com uma F que não é de primeira ordem.

Exercício 4.

Seja $F(x, y) = y(y - x)$.
a) Faça o diagrama de numerozinhos para esta F.
b) Desenhe nele a curva de nível de $F(x, y) = 0$.
c) Calcule $F(4, 1)$.
b) Desenhe a curva de nível de $F(x, y) = F(4, 1)$.
e) Calcule $DF(4, 1)$.
f) Seja $G(p_1) = F(p_0) + DF(p_0)(p_1 - p_0)$. Ponha esta G na forma $G(x, y) = ax + by + c$. Quem são a, b, e c?

Exercício 4 (continuação).

g) Calcule DG e $DG(4, 1)$.

h) Desenhe a curva de nível de $G(x, y) = G(4, 1)$.

i) Essa curva de nível é, ou parece ser, tangente à curva de nível da F que você obteve no item (b)?

j) Refaça os itens anteriores mas agora usando $p_0 = (3, 2)$ ao invés de $p_0 = (4, 1)$.

Mini-teste 1

Sejam $F(x,y) = (x-2)(x+y)$ e $p_0 = (2,1)$.

a) Faça o diagrama de numerozinhos para esta F.

b) Desenhe nele as curvas de nível de $F(x,y) = 0$ e $F(x,y) = F(p_0)$.

c) Calcule $DF(p_0)$.

d) Seja $G(p_1) = F(p_0) + DF(p_0)(p_1 - p_0)$. Ponha esta G na forma $G(x,y) = ax + by + c$. Quem são a, b, e c?

e) Desenhe a curva de nível de $G(x,y) = G(p_0)$ sobre o gráfico do item b.

Regras:

As questões do mini-teste serão disponibilizadas às 14:00 da sexta-feira 13/nov/2020 e você deverá entregar as respostas escritas à mão até as 22:00 do sábado 14/nov/2020 na plataforma Classroom. Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

eduardoochs@gmail.com

Mini-testes entregues após este horário não serão considerados.

Durante as 24 horas do mini-teste o professor não responderá perguntas sobre os assuntos do mini-teste mas você pode discutir com os seus colegas — inclusive no grupo da turma.

Este mini-teste vale 0.5 pontos extras na P1.

Regras (cont.):

Os alunos que cumprirem uma série de condições (ainda não divulguei a lista delas...) poderão compensar as suas questões erradas na P2 fazendo vídeos explicando passo a passo como resolvê-las na semana seguinte à prova. Uma das condições é ter feito todos os mini-testes, então não deixe de fazer e entregar este mini-teste!