

Cálculo 3 - 2020.2

Aula ??: o plano tangente

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2020.2-C3.html>

Os exercícios de hoje são pra ajudar todo mundo a entender e visualizar as idéias principais do capítulo 7 do Bortolossi... antes de começar dê uma olhada nele!

Plano tangente: definição formal

Digamos que a superfície S seja dada por:

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y) \},$$

como na aula passada a partir do exercício 5:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-rcadeia1.pdf#page=11>

O plano tangente à superfície S no ponto $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ — ou no ponto (x_0, y_0) , se a gente usar a gambiarra que nos permite rededuzir a coordenada z desse ponto a partir das coordenadas x e y dele — pode ser definido como um plano parameterizado assim:

Plano tangente: definição formal (2)

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \overrightarrow{(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x})} \\
 &= \overrightarrow{(1, 0, F_x)} \\
 &= \overrightarrow{(1, 0, F_x(x_0, y_0))} \\
 \vec{w} &= \overrightarrow{(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})} \\
 &= \overrightarrow{(0, 1, F_y)} \\
 &= \overrightarrow{(0, 1, F_y(x_0, y_0))} \\
 P(t, u) &= (x_0, y_0, z_0) + t\vec{v} + u\vec{w} \\
 \pi &= \{ P(t, u) \mid t, u \in \mathbb{R} \} \\
 &= \{ (x_0, y_0, z_0) + t\overrightarrow{(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x})} + u\overrightarrow{(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})} \mid t, u \in \mathbb{R} \}
 \end{aligned}$$

Nós vamos começar entendendo isto em casos nos quais a superfície S é um plano... mas primeiro vamos fazer alguns exercícios de desenhar os diagramas de numerozinhos e algumas curvas de nível de planos.

Exercício 1.

Em cada um dos casos abaixo a função F vai ser definida por

$$F(x, y) = a + b \cdot (x - x_0) + c \cdot (y - y_0).$$

Represente graficamente em 3D os pontos da superfície S associados aos pontos

$$(x_0, y_0), (x_0 + 1, y_0), (x_0, y_0 + 1), (x_0 + 1, y_0 + 1).$$

Além disso faça o diagrama de numerozinhos da F e desenhe no plano (x, y) pelo menos duas curvas de nível da função F .

Exercício 1 (cont.)

a) $(x_0, y_0) = (4, 2)$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$.

b) $(x_0, y_0) = (4, 2)$, $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$.

c) $(x_0, y_0) = (4, 2)$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

d) $(x_0, y_0) = (4, 2)$, $a = 2$, $b = 2$, $c = -1$.

e) $(x_0, y_0) = (3, 3)$, $a = 2$, $b = 2$, $c = -1$.

Agora vamos recuar um pouco e fazer uns exercícios sobre planos, sem considerá-los como planos tangentes a alguma superfície não-plana...

Exercício 2.

Sejam π_1, π_2, π_3 estes planos aqui:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2 \} \\ \pi_2 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \} \\ \pi_3 &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \}\end{aligned}$$

Para cada um destes planos encontre:

- um ponto da forma $(x, 0, 0)$ pertencente a ele,
- um ponto da forma $(0, y, 0)$ pertencente a ele,
- um ponto da forma $(0, 0, z)$ pertencente a ele,

E use isto para desenhar estes planos em 3D, em perspectiva (improvisada, à mão, sem régua).

Exercício 2 (cont.)

Para cada um dos planos π_1, π_2, π_3 , do slide anterior, diga:

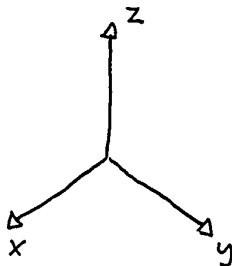
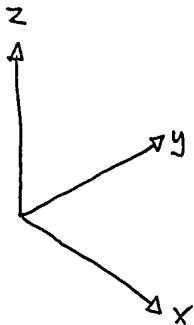
- d) um vetor não-nulo da forma $\overrightarrow{(x, y, 0)}$ paralelo a ele,
- e) um vetor não-nulo da forma $\overrightarrow{(x, 0, z)}$ paralelo a ele,
- f) um vetor não-nulo da forma $\overrightarrow{(0, y, z)}$ paralelo a ele,
- g) um vetor da forma $\overrightarrow{(1, 0, z)}$ paralelo a ele,
- h) um vetor da forma $\overrightarrow{(0, 1, z)}$ paralelo a ele,
- i) um vetor da forma $\overrightarrow{(1, y, 0)}$ paralelo a ele.

As dicas pra fazer tudo isso visualmente estão no próximo slide.

Importante: tente representar os itens (a) até (i) do plano π_1 num desenho só em perspectiva improvisada, os itens (a) até (i) do π_2 num segundo desenho, e os itens (a) até (i) do π_3 num terceiro desenho.

Exercício 2: dica 1

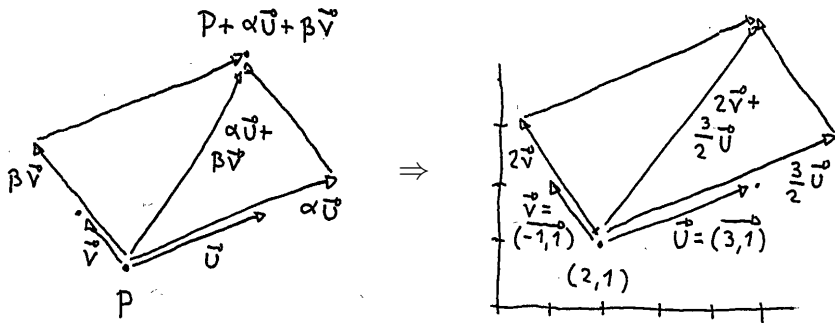
Nós estamos fazendo nossos desenhos 3D usando eixos em duas posições diferentes, como abaixo. Alguns itens vão ser mais fáceis de desenhar numa posição, outros noutra.



Exercício 2: dica 2

Quando os livros de GA fazem um desenho que parece ser um caso geral na verdade eles usam um caso particular disfarçado...

Por exemplo:



Exercício 3.

Assista este vídeo aqui:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C3-plano-tang.mp4>

E faça o “caso geral” ao qual ele se refere.

Mais precisamente: seja π_4 um plano que contém os pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, e faça os itens (a) até (i) do exercício 2 para este plano π_4 .

Exercício 4.

Sejam $P = (0, 0, a)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 0, b)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0, 1, c)}$, e:

$$\begin{aligned}\pi_5 &= \{ P + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (0, 0, a) + \alpha\overrightarrow{(1, 0, b)} + \beta\overrightarrow{(0, 1, c)} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}\end{aligned}$$

- Encontre um ponto de π_6 da forma $(x, 0, 0)$.
- Encontre um ponto de π_6 da forma $(0, y, 0)$.
- Encontre um ponto de π_6 da forma $(0, 0, z)$.
- Represente graficamente, num gráfico só com perspectiva improvisada: P , $P + \vec{v}$, $P + \vec{w}$, e os pontos dos seus itens (a), (b) e (c).
- Complete as lacunas com as fórmulas certas:

$$\begin{aligned}\pi_5 &= \{ (0, 0, a) + \alpha\overrightarrow{(1, 0, b)} + \beta\overrightarrow{(0, 1, c)} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = _ + _x + _y \}\end{aligned}$$

Material de Geometria Analítica

No tempo em que dei Geometria Analítica eu preparei um monte de material com exercícios parecidos com os que vocês acabaram de fazer, em que a gente começava por casos particulares com contas fáceis e que eram fáceis de desenhar e aí a gente generalizava eles... o link pra esse material está aqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf>

Talvez eu peça pra vocês fazerem alguns exercícios dele depois...

O melhor modo de desenhar planos em \mathbb{R}^3 é desenhando as interseções desse plano com os planos π_{xy} , π_{xz} , e π_{yz} , ou pedaços dessas interseções. Nos exercícios anteriores nós fizemos isto pra planos da forma

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \right\},$$

em que desenhamos a interseção deles com um octante do \mathbb{R}^3 , que era um triângulo. Agora vamos ver planos que contêm retas paralelas aos eixos.

Lembre que você pode desenhar as suas perspectivas de jeitos bem improvisados, desde que as coordenadas dos pontos estejam claras... e lembre que o Danilo Pereira, que fez o vídeo que eu recomendei no miniteste 2, usa uma perspectiva bem tosca, que não é isométrica! Links:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_isom%C3%A9trica

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Octante_\(geometria_espacial\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Octante_(geometria_espacial))

Exercício 5.

Represente graficamente os planos abaixo (em \mathbb{R}^3).

Considere que $a, b, c > 0$.

a) $\pi_7 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 \}$

b) $\pi_8 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{a}{x} + \frac{c}{z} = 1 \}$

c) $\pi_9 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \}$

No mini-teste 2 você deve ter aprendido a representar graficamente vários tipos de objetos em \mathbb{R}^3 , tanto em casos particulares quanto em casos gerais... agora vamos usar isto pra entender como o Bortolossi define a derivada de uma função de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n usando a matriz Jacobiana, no capítulo 7, na página 256.

Vamos começar entendendo o que ele faz no início do capítulo 7, em que ele considera uma função de \mathbb{R}^1 em \mathbb{R}^1 .

Exercício 6.

NO TEOREMA 7.1 DO BORTOLOSSI -

NO CAPÍTULO 7, P. 240 -

SUPONHA QUE: $f(x) = \sqrt{x}$,

$D = (0, +\infty)$,

$p = 2$.

a) FAÇA UM GRÁFICO PARECIDO COM O DA FIGURA 7.1 DA P. 240, MAS PARA O CASO PARTICULAR ACIMA. ESCREVA AS COORDENADAS E OS VALORES ONDE FOR ADEQUADO, E DÊ UMA FÓRMULA PARA CALCULAR $l(x)$.

b) ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA CALCULAR $R(p, x)$ E USE-A

PARA CALCULAR:

$$R(2, 3), \quad \frac{R(2, 3)}{3-2},$$

$$R(2, 2.1), \quad \frac{R(2, 2.1)}{2.1-2},$$

$$R(2, 2.01), \quad \frac{R(2, 2.01)}{2.01-2}.$$

c) NA PÁGINA 241 O BORTOLOSSI REDEFINE A FUNÇÃO R SEM MUDAR O NOME DELA. CALCULE $R(p, h)$ E $R(p, h)/h$ PARA $h=1$, $h=0.1$ E $h=0.01$; LEMBRE QUE f , D E p CONTINUAM OS MESMOS DE ANTES.

Exercício 6 (cont.)

- d) TENTE DESCOBRIR COMO
REPRESENTAR GRAFICAMENTE
CADA UMA DAS SUBEXPRESSÕES
MARCADAS COM CHAVES ABAIXO:

$$f(p+h) = f(p) + f'(p) \cdot h + R(p, h)$$

Use $h=1$.

- e) FAÇA A MESMA COISA PARA A
FÓRMULA NA P.242, ONDE O
BORTOLOSSI DIZ "A EQUAÇÃO 7.1
PODE SER REESCRITA COMO...".

Agora vamos tentar entender a seção “Funções vetoriais: o caso geral” do Bortolossi, que começa na p.253.

Exercício 7.

Leia ela até a página 255. Suponha que $n = 2$, $m = 1$, $D = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{p} = (2, 3)$, $\mathbf{x} = (42, 99)$.

a) Simplifique o máximo possível a definição do $D\mathbf{f}(\mathbf{p})$ neste caso. O resultado vai dar ou uma matriz 2×1 ou uma matriz 1×2 .

b) Simplifique o máximo possível a fórmula (7.6) da página 255, que é:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + D\mathbf{f}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$$

Esse ‘ \cdot ’ é uma multiplicação de matrizes.

c) Faça o mesmo para a fórmula no início da página 256.

Dicas pro exercício 7

Se $m = 3$ e $n = 4$ então a matriz jacobiana da p.256 do Bortolossi vira isso aqui:

$$Df(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_4}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}_{3 \times 4},$$

$$\text{e: } \mathbf{x} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \\ x_4 - p_4 \end{bmatrix}$$

compare com o que aparece no início da p.255, e veja que sabendo m e n a gente consegue se livrar das reticências...

Exercício 8.

Digamos que π seja o plano que passa pelos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ — o do mini-teste.

Na seção 7.2 do Bortolossi ele diz que um certo plano tangente a uma superfície é:

$$z = l(x, y) = \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y$$

Digamos que esse plano $z = l(x, y)$ seja o nosso plano π , que passa por $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.

- a) Quem são α , β , e γ ?
- b) Quem são as derivadas parciais da função l ?

Derivadas como triângulos

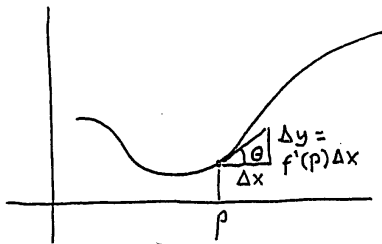
Vamos voltar ao início do capítulo 7 do Bortolossi um pouco. Nós podemos interpretar a derivada de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ num ponto $p \in \mathbb{R}$, $f'(p)$, como uma razão entre distâncias horizontais e distâncias verticais. Por exemplo, nós já vimos esta fórmula várias vezes,

$$\Delta y = f'(p)\Delta x$$

às vezes com ' \approx ', às vezes com '='... e já vimos o que quer dizer geometricamente nós termos $f'(p) = \frac{1}{2}$, $f'(p) = 2$, $f'(p) = -1$...

Derivadas como triângulos (2)

Existem muitos jeitos de representar graficamente algo como “ $f'(p) = \frac{1}{2}$ ”. Um deles é representar cada $f'(p)$ como um triângulo retângulo como o abaixo,



com o vértice esquerdo no ponto $(p, f(p))$, e com o cateto de baixo medindo Δx e o cateto da direita medindo Δy ... Às vezes isto é bem melhor que visualizar $f'(p)$ como $\tan \theta$.

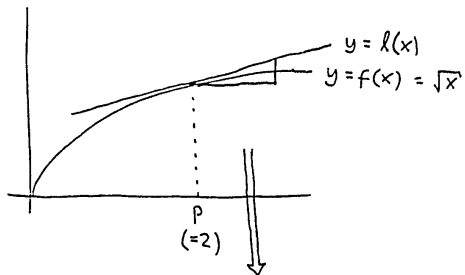
Dicas sobre os exercícios 6a e o 6d

Na aula de 18/abril quando nós estávamos discutindo o exercício 6a no Telegram algumas pessoas viram que era muito difícil fazer o diagrama direito, porque elas teriam que desenhar muitos objetos juntos numa área pequena do diagrama... aí eu mandei a sugestão do próximo slide, em que uma parte do diagrama é representada várias vezes em lugares diferentes do papel, cada vez com detalhes diferentes sendo indicados...

Lembre da dica 7 daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5>

Quando não funciona bem fazer um diagrama do jeito mais óbvio a gente pode improvisar um pouco, desde que os leitores consigam entender o que a gente fez.



$$\Delta y = f'(p) \cdot \Delta x$$

$$f'(p)$$

$$(0, f'(p))$$

$$(1, 0)$$

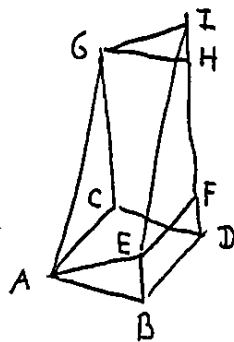
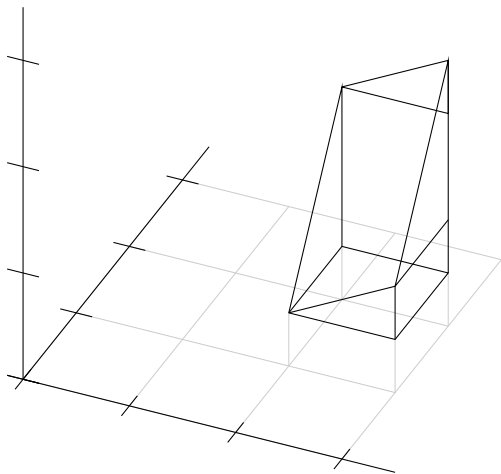
Dicas sobre os exercícios 6a e o 6d (cont.)

Quando o curso de Cálculo 3 era presencial era fácil pôr as pessoas pra discutirem em grupo pra entenderem as convenções dos diagramas dos livros e pra encontrarem jeitos de desenhar novos diagramas que os colegas achassem bons...

Eu ainda não sei fazer algo assim acontecer por Telegram =(

Exercício 9

O diagrama do próximo slide é uma tentativa de adaptar o diagrama do slide anterior — da dica do exercício 6a — para algo 3d. Eu ainda não sei fazer esses diagramas direito no computador, então à direita do diagrama feito por computador eu pus uma versão dele feita à mão com os nomes dos pontos. Digamos que $A = (x_0, y_0, z_0)$, e que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{(1, 0, F_x(x_0, y_0))}$ e $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{(0, 1, F_y(x_0, y_0))}$. Descubra as coordenadas dos pontos B, C, D, E, F, G, H, I .



Exercício 10.

(Este exercício generaliza as idéias do 9).

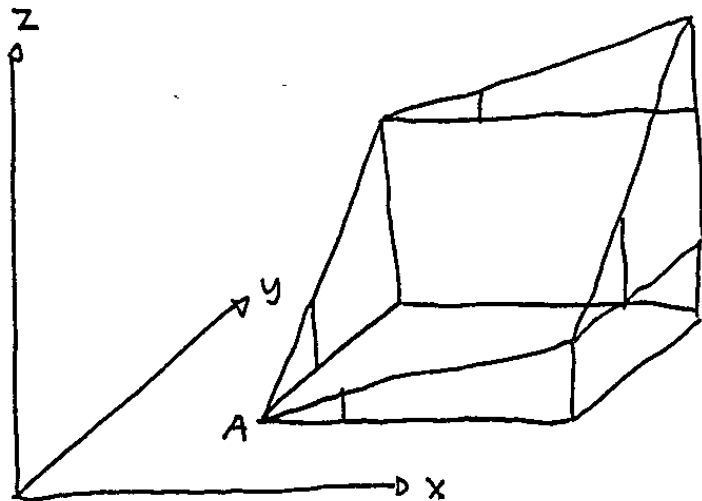
Sejam:

$$\begin{aligned}
 F & : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\
 S & = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y) \}, \\
 A_0 & = (x_0, y_0), \\
 A & = (x_0, y_0, F(x_0, y_0)), \\
 \vec{v} & = \overbrace{(1, 0, F_x(A_0))}, \\
 \vec{w} & = \overbrace{(0, 1, F_y(A_0))}, \\
 \alpha, \beta & \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

a) Identifique no diagrama do próximo slide os pontos:

$$A + \vec{v}, A + \alpha\vec{v}, A + \vec{w}, A + \beta\vec{w}, A + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w},$$

Dica: α é aproximadamente 4, e β aproximadamente 2.5.

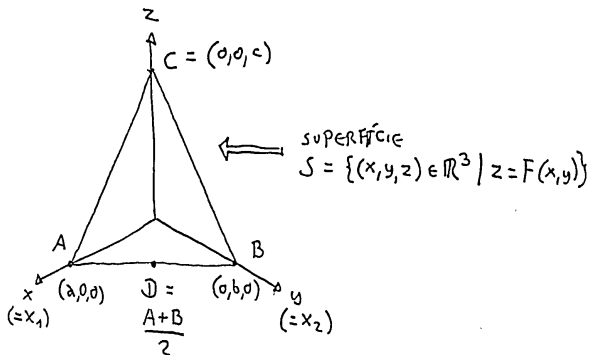


Exercício 10 (cont.)

- b) Verifique – visualmente – que os pontos $A + \vec{v}$, $A + \alpha\vec{v}$, $A + \vec{w}$, $A + \beta\vec{w}$, $A + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, do item (a) estão todos no mesmo plano.
- c) Verifique que esse plano é o plano tangente à superfície S no ponto A .

Introdução ao vetor gradiente

...então, primeiro eu preciso que vocês relembrem dessa figura e encontrem uma fórmula pra função $F(x, y)$, e depois calculem as derivadas parciais $F_x(x_0, y_0)$ e $F_y(x_0, y_0)$ - elas devem dar expressões que não dependem dos valores de x_0 e y_0 .



PARA CADA PONTO $P = (x, y, z)$
 VAMOS CHAMAR DE P_0 A
 "PROJEÇÃO DE P EM \mathbb{R}^2 ":

$$P_0 = (x, y).$$

VAMOS USAR A NOTAÇÃO DO
 EXERCÍCIO 7 AGORA.

DIGAMOS QUE

$$\begin{aligned} f(P) &= f\left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= F(p_1, p_2) \end{aligned}$$

(ISTO É A TRADUÇÃO ENTRE
 AS DUAS NOTAÇÕES).

DIGAMOS QUE

$$P = D_0.$$

CALCULE $Df(P)$.

O resultado disso deve
 dar uma matrix 2×1 .

LEIA A DEFINIÇÃO DE
 VETOR GRADIENTE NA
 SEÇÃO 8.2 DO BORTOLOSSI
 (CAP. 8) E CALCULE

$$\nabla F(D).$$

NOTE QUE O BORTOLOSSI
 ESCREVE

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

ONDE ESSE $D \subset \mathbb{R}^n$ É O
 DOMÍNIO DA FUNÇÃO.

NÓS ESTAMOS USANDO
 A FUNÇÃO

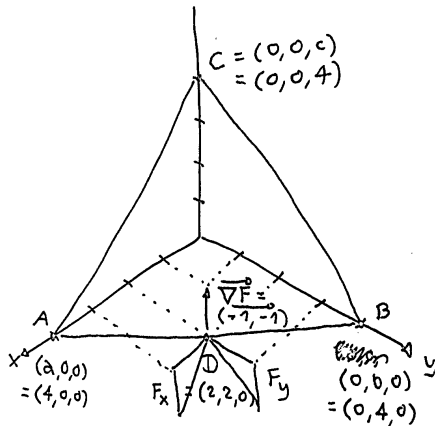
$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

E O DOMÍNIO DELA É
 O \mathbb{R}^2 INTEIRO... E

NÓS VAMOS USAR O
 SÍMBOLO D PARA
 OUTRAS COISAS.

O PRIMEIRO PASSO PRA GENTE ENTENDER O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DO VETOR GRADIENTE É DESENHÁ-LO EM VÁRIOS CASOS PARTICULARES, E COMPARÁ-LO COM AS DERIVADAS PARCIAIS, QUE VAMOS DESENHAR COMO TRIÂNGULOS.

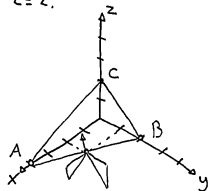
POR EXEMPLO, SE $a=4$,
 $b=4$ E
 $c=4$, TEMOS...



OUTRO CASO PARTICULAR... ESTE É MAIS COMPLICADO E VOCÊ VAI TER QUE COMPLETAR OS DETALHES VOCÊ MESMO.

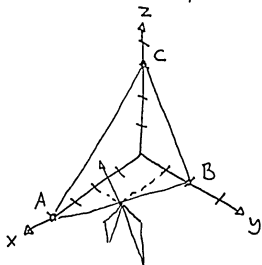
NOTE QUE EU ESTOU ESCRIVENDO O VETOR GRADIENTE COMO " $\vec{\nabla}F$ " AO INVÉS DE COMO $\nabla F(D)$.

AQUI, $a=4$,
 $b=2$,
 $c=2$.



- FAÇA UMA VERSÃO ZOOMADA DA PARTE COMPLICADA COM TODOS OS DETALHES.
- VERIFIQUE QUE AQUI TEMOS $\vec{\nabla}F \perp \overline{AB}$, E NO DIAGRAMA ANTERIOR TÍNHAMOS ISTO TAMBÉM.

AGORA FAÇA AS CONTAS
E AS FIGURAS COM AS
FÓRMULAS E OS DETALHES
ETC ETC PARA ESTE OUTRO
CASO PARTICULAR AQUI,
EM QUE MUDAMOS O VALOR
DE c , QUE ERA 2 NO
CASO ANTERIOR, PARA 3...



VERIFIQUE QUE AINDA
TEMOS $\vec{n} \perp \vec{AB}$.