Cálculo 2 - 2021.1

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf`
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf`

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 22:00 do dia 2/setembro/2021 e deve ser entregue até as 10:00 do dia 4/setembro/2021.

Aviso

Se você comparar as integrais desta prova com as de uma prova "normal" de Cálculo 2 você vai ver que as daqui são bastante simples... isso é porque eu vou dar uma importância ENORME a detalhes de sintaxe. Por exemplo, compare:

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\,dx = g(x)$$

com:

Queremos encontrar uma função $g(x)$ que obedeça:

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\,dx = g(x)$$

Aviso (2)

Se você só escrever "$\int e^{\operatorname{sen} x}\,dx = g(x)$"
a interpretação default disso pra um
"leitor que não seja muito seu amigo" —
obs: releia isto aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=12

vai ser: "para toda função $g(x)$ temos $\int e^{\operatorname{sen} x}\,dx = g(x)$"...

Então escreva com muito cuidado as suas respostas!!!

Obs: eu costumo pôr nas regras das provas que durante a duração das provas eu não respondo perguntas... mas eu vou abrir uma exceção pras "perguntas sobre sintaxe".

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

O exercício 5 do último PDF pedia pra vocês refazerem vocês mesmos uma questão da P1 do semestre passado que tinha gabarito no final da prova. No gabarito eu pus uma solução pra ela que usava as caixinhas de anotações...

Traduza este passo da solução dela pra notação com chaves:

$$\int (\cos(2+\sqrt{v}))\,/\,(2\sqrt{v})\;dv = \int \cos(2+w)\,dw$$

Links:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=28
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9

Questão 2
(Total: 5.0 pts)

Resolva estas duas integrais usando mudanças de variáveis e teste as suas respostas. Nas mudanças de variáveis use ou as caixinhas de anotações ou as anotações sob chaves.

a) **(2.5 pts)**

$$\int e^{x^5} x^4 \, dx$$

b) **(2.5 pts)**

$$\int \sqrt{2 + \operatorname{sen} x} \cdot \cos x \, dx$$

Dicas:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=6`
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-os-dois-TFCs.pdf#page=16`

Questão 3
(Total: 4.0 pts)

No curso nós vimos como usar a [S2I], que é:

$$[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

para convencer os incrédulos de que certas mudanças de variáveis são válidas...

Questão 3 (cont.)
a) **(0.5 pts)** Use a mudança de variável $u = x^5$ para converter

$$\int \tan(x^5) \cdot x^4 \, dx$$

em uma integral mais simples.

b) **(3.5 pts)** Encontre a substituição que transforma a [S2I] numa demonstração da igualdade que você encontrou no item (a).

Dicas pra (b):
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=17
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=19

Gabarito

Questão 1: gabarito

$$\int \cos(2 + \underbrace{\sqrt{v}}_{w}) \cdot \underbrace{\underbrace{\left(2\sqrt{v}\right)^{-1}}_{\frac{dw}{dv}}\, dv}_{dw} = \int \cos\left(2 + w\right) dw$$

Questão 2: gabarito do item a

$$\begin{array}{rl} & \int e^{x^5} x^4 \, dx \\ = & \int e^u \cdot \frac{1}{5} \, du \\ = & \frac{1}{5} \int e^u \, du \\ = & \frac{1}{5} e^u \\ = & \frac{1}{5} e^{x^5} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} u = x^5 \\ \frac{du}{dx} = 5x^4 \\ du = 5x^4 \, dx \\ \frac{1}{5} du = x^4 \, dx \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{rcl} \int e^{x^5} x^4 \, dx & \overset{?}{=} & \frac{1}{5} e^{x^5} \\ e^{x^5} x^4 & \overset{?}{=} & \frac{d}{dx} \, \frac{1}{5} e^{x^5} \\ & = & \frac{1}{5} e^{x^5} 5x^4 \\ & = & e^{x^5} x^4 \end{array}$$

Questão 2: gabarito do item b

$$\begin{array}{ll} \int \sqrt{2+\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \, dx & \\ = \int \sqrt{u} \, du & \\ = \int u^{\frac{1}{2}} \, du & \\ = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} & \\ = \frac{2}{3}(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} & \end{array} \qquad \left[\begin{array}{c} u = 2+\operatorname{sen} x \\ \frac{du}{dx} = \cos x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}}\right) & \\ = & \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{dx}(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} \\ = & \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(2+\operatorname{sen} x) \\ = & \sqrt{2+\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \end{array}$$

Questão 3: gabarito

a) $$\int \tan(x^5)\cdot x^4\,dx \quad = \quad \int \tan(u)\cdot \tfrac{1}{5}\,du \qquad \left[\begin{array}{c} u = x^5 \\ \frac{du}{dx} = 5x^4 \\ du = 5x^4\,dx \\ \frac{1}{5}du = x^4\,dx \end{array}\right]$$

b) $$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} x := x \\ u := u \\ f(u) := \tan(u)\cdot\frac{1}{5} \\ g(x) := x^5 \\ g'(x) := 5x^4 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=\tan(u)\cdot\frac{1}{5} \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(x^5) & = & \displaystyle\int \tan(u)\cdot\frac{1}{5}\cdot 5x^4\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int \tan(u)\cdot\frac{1}{5}\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=x^5. \end{array}\right)$$

Apêndice

A primeira parte do gabarito da questão 2 de 2020.2 era isto aqui... A tradução destas quatro mudanças de variável pra casos particulares do [S2I] está no próximo slide.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{u+4}\right)}{2\sqrt{u+4}}\,du \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\,dv \\
&= \int \cos\left(2+w\right)dw \\
&= \int \cos y\,dy \\
&= \operatorname{sen} y \\
&= \operatorname{sen}\left(2+w\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{v}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{u+4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right)
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}du \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} v=u+4 \\ du=dv \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} y=2+w \\ dy=dw \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} x:=x \\ u:=u \\ f(u):=\frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \\ g(x):=3x \\ g'(x):=3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=\frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(3x) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{3x+4})}{2\sqrt{3x+4}}\cdot 3\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}}\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=3x. \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} x:=u \\ u:=v \\ f(v):=\frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \\ g(u):=u+4 \\ g'(u):=1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(v)=\frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(u+4) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}}\cdot 1\,du \\ \| && \\ F(v) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}}\,dv \end{array} \\ \text{Obs: } v=u+4. \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} x:=v \\ u:=w \\ f(w):=\cos(2+w) \\ g(v):=\sqrt{v} \\ g'(v):=(2\sqrt{v})^{-1} \end{array}\right] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(w)=\cos(2+w) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(\sqrt{v}) &=& \displaystyle\int \cos(2+\sqrt{v})\cdot(2\sqrt{v})^{-1}\,dv \\ \| && \\ F(w) &=& \displaystyle\int \cos(2+w)\,dw \end{array} \\ \text{Obs: } w=\sqrt{v}. \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \left[\begin{array}{c} x:=w \\ u:=y \\ f(y):=\cos(y) \\ g(w):=2+w \\ g'(w):=1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(y)=\cos(y) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(2+w) &=& \displaystyle\int \cos(2+w)\cdot 1\,dw \\ \| && \\ F(y) &=& \displaystyle\int \cos(y)\,dy \end{array} \\ \text{Obs: } y=2+w. \end{array}\right)$$

Exercício (pra quem quiser treinar o '[:=]')
Refaça as quatro substituições do slide anterior: copie para uma folha de papel o [S2I] e calcule os resultados de quatro substituições abaixo. Lembre dos dois truques pra não precisar fazer nada de cabeça:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=28

$$a)\ \ [\mathsf{S2I}]\begin{bmatrix} x := x \\ u := u \\ f(u) := \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \\ g(x) := 3x \\ g'(x) := 3 \end{bmatrix} \qquad c)\ \ [\mathsf{S2I}]\begin{bmatrix} x := v \\ u := w \\ f(w) := \cos(2+w) \\ g(v) := \sqrt{v} \\ g'(v) := (2\sqrt{v})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$b)\ \ [\mathsf{S2I}]\begin{bmatrix} x := u \\ u := v \\ f(v) := \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \\ g(u) := u+4 \\ g'(u) := 1 \end{bmatrix} \qquad d)\ \ [\mathsf{S2I}]\begin{bmatrix} x := w \\ u := y \\ f(y) := \cos(y) \\ g(w) := 2+w \\ g'(w) := 1 \end{bmatrix}$$