

Cálculo 2 - 2021.1

Aula 25: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

Introdução

Seja (*) a EDO abaixo:

$$f'(x) = 2x \quad (*)$$

Ela tem muitas soluções. Por exemplo, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^2 + 3$ são duas soluções diferentes dela.

Desenhando várias soluções dela num gráfico — veja o próximo slide — dá pra entender como é o conjunto de todas as soluções dela: ele é um conjunto de infinitas curvas disjuntas, que “cobrem o \mathbb{R}^2 todo”, no sentido de que cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pertence a exatamente uma dessas curvas (ou: “soluções”).

Por exemplo, o ponto $(2, 5)$ pertence à solução $f(x) = x^2 + 1$.

A “solução geral” da EDO $f'(x) = 2x$ é $f(x) = x^2 + C$; para obter soluções particulares substituímos esse C por números. Por exemplo, a solução de

$$f'(x) = 2x, \quad f(2) = 5$$

é $f(x) = x^2 + 1$.

Campos de direções

Vamos agora considerar esta outra EDO:

$$f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Nós ainda não sabemos quais são as soluções dela...

Mas existe um jeito simples de interpretar graficamente

o que ela quer dizer. Para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a

fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ nos permite calcular o coeficiente

angular **no ponto** (x, y) da solução que passa pelo ponto (x, y) .

Por exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} (x,y)=(-2,2) & (x,y)=(-1,2) & (x,y)=(0,2) & (x,y)=(1,2) & (x,y)=(2,2) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1/2 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1/2 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} (x,y)=(-2,1) & (x,y)=(-1,1) & (x,y)=(0,1) & (x,y)=(1,1) & (x,y)=(2,1) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2 \end{array}$$

Veja as figuras daqui:

http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_15.1_ate_15.3.pdf

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhometro a partir dos campos de direções delas.

Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = 1/x$

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Na página seguinte temos o método geral para resolver EDOs com variáveis separáveis. Vou chamá-lo de [EDOVSG] pra podermos discutir como obter casos particulares dele usando a operação ‘[:=]’, ao invés de termos que escrever coisas como “substituindo $f(x)$ por ___ acima obtemos...”.

O método [EDOVSG] usa algumas gambiarras — veja os vídeos pra explicações.

(Links adicionados em 2022jul19):

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-edovs.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=xfjjGhtavno>

<http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=bNfZUomf1xg>

<http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs-2.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=Ejr2wvpBiTE>

$$\begin{aligned}
 \text{[EDOVSG]} = & \left(\begin{array}{l}
 \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\
 g(y) dy = f(x) dx \\
 \int g(y) dy = \int f(x) dx \\
 \begin{array}{l} \text{"} \\ G(y) + C_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{"} \\ F(x) + C_2 \end{array} \\
 G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\
 G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\
 \quad = F(x) + C_3 \\
 G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\
 \begin{array}{l} \text{"} \\ y \end{array}
 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Aparentemente dá pra resolvê-la usando

$$[\text{EDOVSG}] \left[\begin{array}{l} f(x) := -x \\ g(y) := y \end{array} \right],$$

mas também precisamos das primitivas $F(x)$ e $G(y)$, e da inversa $G^{-1}(y)$... a substituição certa é:

$$[\text{EDOVSG}] \left[\begin{array}{l} f(x) := -x \\ g(y) := y \\ F(x) := -\frac{x^2}{2} \\ G(y) := \frac{y^2}{2} \\ G^{-1}(z) := \sqrt{2z} \end{array} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y dy = -x dx$$

$$\int y dy = \int -x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

...que dá isto:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C_2 - C_1 \\ &= -\frac{x^2}{2} + C_3 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{y^2}{2}} = \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + C_3\right)}$$

$$y = \sqrt{2C_3 - x^2}$$

$$\sqrt{C_4 - x^2}$$

(As últimas linhas têm passos extras.)

Como testar uma solução

Digamos que estamos tentando resolver a EDO

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}, \quad \text{ou:}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

e queremos ver se estas duas funções são solução dela:

$$f_1(x) = x^2 + 3, \quad f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

Como testar uma solução (2)

Basta fazer:

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right) \left[\begin{array}{l} f(x) := x^2 + 3 \\ f'(x) = 2x \end{array} \right] = \left(2x = -\frac{x}{x^2 + 3} \right)$$

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right) \left[\begin{array}{l} f(x) := \sqrt{25 - x^2} \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{array} \right] = \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \right)$$

e ver se as igualdades da direita são verdadeiras para todo x no domínio de cada função — aliás, nos pontos em que a função é derivável...

A função $f_1(x) = x^2$ está definida em todo \mathbb{R} e é derivável em \mathbb{R} , e a função $f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$ está definida no intervalo fechado $[-5, 5]$ e é derivável no intervalo aberto $(-5, 5)$.

Também dá pra testar soluções gerais, basta tratar os ‘ C ’s delas como constantes.

Exercício 3.

No exercício 1g você desenhou o campo de direções desta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (**)$$

e pelo campo de direções você deve ter conseguido ter uma noção de quais são as soluções dela... (dica: hipérbolas!)

a) Resolva a EDO (**) fazendo isto aqui:

$$[\text{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) = -1/x \\ g(y) = 1/y \\ F(x) = ? \\ G(y) = ? \\ G^{-1}(y) = ? \end{bmatrix}$$

(Dica: preencha os ‘?’s corretamente)

Exercício 3.

- b) Diga qual é a solução geral.
- c) Teste a sua solução geral.
- d) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, 3)$.
- e) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, -2)$.

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{aligned} y &= 3 + \sqrt{x+4}, & \text{isto é,} \\ f(x) &= 3 + \sqrt{x+4}, \end{aligned}$$

e sejam:

$$\begin{aligned} g(y) &= (y-3)^2 + 4, \\ h(y) &= (y-4)^2 + 3. \end{aligned}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y) = g(y)$ ou se $f^{-1}(y) = h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2 + 4 \end{bmatrix} &= ? \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2 + 3 \end{bmatrix} &= ? \end{aligned}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y - 3 &= \sqrt{x + 4} \\(y - 3)^2 &= x + 4 \\(y - 3)^2 - 4 &= x \\(y - 3)^2 - 4 &= f^{-1}(y)\end{aligned}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.

Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2 + 3\sqrt{5x + 6} \\f_2(x) &= 2 + 3\sqrt[4]{5x + 6} \\f_3(x) &= 2 + 3(4x + 5)^6 \\f_4(x) &= 2 + 3\ln(4x + 5) \\f_5(x) &= 2 + 3e^{4x+5} \\f_6(x) &= \sqrt{2 + 3e^{4x+5}} \\f_7(x) &= \ln x \\f_8(x) &= \ln -x \\f_9(x) &= |x| \\f_{10}(x) &= \ln |x|\end{aligned}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Resolvendo “direto”

No segundo vídeo sobre esta parte da matéria – este aqui:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs-2.mp4>

eu comecei mostrando como resolver a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

depois passei pro caso geral,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

e aí defini o “método” [EDOVSG]... e nos exercícios que vieram depois disso nós usamos o [EDOVSG] e a operação ‘[:=]’.

Exercício 5.

a) Tente resolver esta EDO “direto”,
como no início do vídeo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

E pare quando você chegar neste ponto:

$$y^2 = x + C_4$$

O passo seguinte, se seguirmos o método do vídeo, é

$$y = \pm \sqrt{x + C_4} \dots$$

Exercício 5 (cont.)

Podemos considerar que temos duas soluções gerais:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= +\sqrt{x + C_4}, & \text{e} \\f_2(x) &= -\sqrt{x + C_4}.\end{aligned}$$

- b) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_1(2) = 3$.
- c) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_2(4) = -5$.
- d) Encontre a solução que passa pelo ponto $(-3, -4)$.

Duas fórmulas. Sejam:

$$[\text{EDOVSG1}] = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y) dy = f(x) dx \\ \int g(y) dy = \int f(x) dx \\ G(y) \parallel + C_1 \quad F(x) \parallel + C_2 \\ G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\ G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\ \quad = F(x) + C_3 \\ G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[\text{EDOVSG2}] = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ y = G^{-1}(F(x) + C_3) \end{array} \right)$$

Lembre que eu expliquei nos vídeos que à medida que a matéria dos Cálculos avança cada vez mais coisas passam a ser implícitas ao invés de explícitas...

A linha de cima do [S2I] dizia “Se $F'(u) = f(u)$ então:”...

No [EDOVSG1] e no [EDOVSG2] vai ficar **implícito** que temos que ter $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$, $C_3 = C_2 - C_1$, $G^{-1}(G(y))$, e **todos** os domínios também são omitidos...

Exercício 6.

a) Escreva o resultado da substituição

$$[\text{EDOVSG1}] \left[\begin{array}{l} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{array} \right]$$

e escreva “= [E6]” à direita do seu resultado pra indicar que nós vamos usar a expressão [E6] pra nos referir a essa expressãozona.

b) Nessa substituição nós não obedecemos a condição $G'(y) = g(y)$, e isso deve ter feito com que alguns dos ‘=’s na sua [E6] sejam falsos. Quais?

Dica pro exercício 6

O resultado da 6a deve ser algo desta forma:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y) dy = f(x) dx \\ \int g(y) dy = \int f(x) dx \\ G(y) \parallel C_1 = F(x) \parallel C_2 \\ G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\ G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\ = F(x) + C_3 \\ G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \left[\begin{array}{l} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{array} \right] = \left(\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right) = \text{[E6]}$$

Outra dica...

Faça um retângulo de papel com a [EDOVSG1], como este:

http://angg.twu.net/2021.1-C2/retangulo_de_papel.jpg

Tipos de '='s

Vamos numerar os '='s da [EDOVSG1]:

$$\left(\begin{array}{l}
 \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\
 g(y) dy = f(x) dx \\
 \int g(y) dy = \int f(x) dx \\
 \parallel \\
 G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\
 G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\
 G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\
 = F(x) + C_3 \\
 G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\
 \parallel \\
 y
 \end{array} \right)
 \quad
 \left(\begin{array}{l}
 \square \stackrel{(1)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(2)}{=} \square \\
 \int \square \stackrel{(3)}{=} \int \square \\
 \square \stackrel{(4)}{=} \square \quad \square \stackrel{(5)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(6)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(7)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(8)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(9)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(10)}{=} \square
 \end{array} \right)$$