Cálculo 2 - 2022.2

Aulas 11 e 12: substituição trigonométrica
(a derivada da função inversa)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

Vamos usar a seção 9.4 do Leithold
e a seção 8.4 do Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

Alguns links pra PDFs antigos meus:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=24
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-subst-trig.pdf#page=1
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P2.pdf#page=2
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VSA.pdf#page=4

Quadros da primeira aula sobre substituição
trigonométrica (ainda não digitei o conteúdo deles):
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=22

Exercício 1

Simplificando raizes quadradas
Nas últimas aulas você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$.
Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^k\,ds$ para qualquer valor de k.
Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\
& = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\
& = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\
& = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\
& = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}
\end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 2

No final da aula de 28/set – veja a foto do quadro:
`http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=23`
nós vimos que a demonstração de que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ pode ser generalizada, e aí a gente obtém a "fórmula da derivada da função inversa", que eu chamei de [DFI]...
Essa generalização pode ser "especializada" pra obter outros casos particulares diferentes de $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

a) Faça o primeiro exercício que eu pus no quadro:

$$[\mathrm{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} = ?$$

b) Faça o segundo exercício do quadro:

$$[\mathrm{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = ?$$

c) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arctan.

d) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arcsec.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.