Cálculo 2 - 2023.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Questão 1
(Total: 2.5 pts)

Calcule:

$$\int s^3\sqrt{1-s^2}\,ds\ .$$

Questão 2
(Total: 2.5 pts)

Calcule a integral abaixo fazendo pelo menos duas mudanças de variável e teste o seu resultado:

$$\int \frac{\cos(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Questão 3
(Total: 2.5 pts)

Calcule e teste o seu resultado:

$$\int \frac{2x+3}{(x-4)(x+5)}\,dx\ .$$

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\,du$...

3) ...por exemplo:

$$\left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{array}\right]$$

Questão 4
(Total: 1.5 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula" do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando $a = 1$, $b = 3$ e

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x < 2, \\ -x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

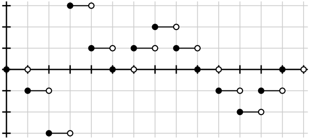
Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente $F(x)$ e $F'(x)$ e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

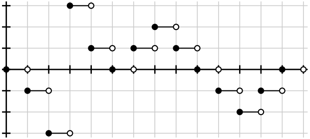
Questão 5
(Total: 1.0 pts)

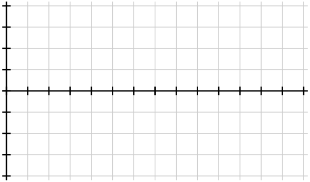
Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte. Seja

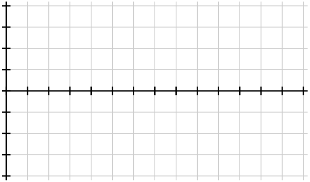
$$F(x) \quad = \quad \int_{t=5}^{t=x} f(t)\,dt.$$

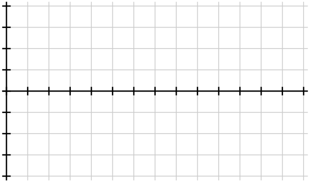
Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

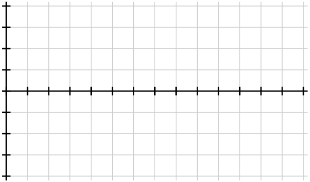












Questão 1: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int s^3\sqrt{1-s^2}\,ds & = & \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)(\cos\theta)\,d\theta \\
& = & \int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^3\,d\theta \\
& = & \int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
& = & \int c^2(1-c^2)(-1)\,dc \\
& = & \int c^2(c^2-1)\,dc \\
& = & \int c^4-c^2\,dc \\
& = & \frac{c^5}{5}-\frac{c^3}{3} \\
& = & \frac{(\cos\theta)^5}{5}-\frac{(\cos\theta)^3}{3} \\
& = & \frac{\sqrt{1-s^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} s=\operatorname{sen}\theta \\ s^2=(\operatorname{sen}\theta)^2 \\ 1-s^2=(\cos\theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2}=\cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta}=\cos\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta \end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{c} c=\cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\ dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ (-1)dc=\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ (\operatorname{sen}\theta)^2=1-c^2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{ds}\left(\frac{\sqrt{1-s^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}\right) & = & \frac{1}{5}\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^5-\frac{1}{3}\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^3 \\
& = & \frac{1}{5}\frac{d}{ds}(1-s^2)^{5/2}-\frac{1}{3}\frac{d}{ds}(1-s^2)^{3/2} \\
& = & \frac{1}{5}\frac{5}{2}(1-s^2)^{3/2}\frac{d}{ds}(1-s^2)-\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}\frac{d}{ds}(1-s^2) \\
& = & \frac{1}{5}\frac{5}{2}(1-s^2)^{3/2}(-2s)-\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}(-2s) \\
& = & \frac{1}{5}\frac{5}{2}(-2)s(1-s^2)^{3/2}-\frac{1}{3}\frac{3}{2}(-2)s(1-s^2)^{1/2} \\
& = & -s(1-s^2)^{3/2}+s(1-s^2)^{1/2} \\
& = & -s(1-s^2)^{2/2}(1-s^2)^{1/2}+s(1-s^2)^{1/2} \\
& = & -s(1-s^2)(1-s^2)^{1/2}+s(1-s^2)^{1/2} \\
& = & (-s(1-s^2)+s)(1-s^2)^{1/2} \\
& = & (-s+s^3+s)(1-s^2)^{1/2} \\
& = & s^3\sqrt{1-s^2}
\end{array}$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{\cos(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx & = & \int \cos(2+u)\,du \\
& = & \int \cos v\,dv \\
& = & \operatorname{sen} v \\
& = & \operatorname{sen}(2+u) \\
& = & \operatorname{sen}(2+\sqrt{x})
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c}
u = \sqrt{x} = x^{1/2} \\
\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\
u^2 = x \\
x = u^2
\end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{c}
v = 2+u \\
dv = du \\
v-2 = u \\
u = v-2
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2+\sqrt{x}) & = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{d}{dx}(2+\sqrt{x}) \\
& = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{d}{dx}x^{1/2} \\
& = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{1}{2}x^{-1/2} \\
& = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
& = & \frac{\cos(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}
\end{array}$$

Questão 3: gabarito

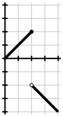
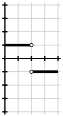
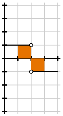
$$
\begin{aligned}
\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} &= \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} \\
&= \frac{A(x+5)}{(x-4)(x+5)} + \frac{B(x-4)}{(x-4)(x+5)} \\
&= \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} \\
&= \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)} \\
&= \frac{(A+B)x+(5A-4B)}{(x-4)(x+5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x+3 &= (A+B)x+(5A-4B) \\
A+B &= 2 \\
5A-4B &= 3 \\
A &= 11/9 \\
B &= 7/9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} &= \frac{11/9}{x-4} + \frac{7/9}{x+5} \\
\int \frac{2x+3}{(x-4)(x+5)}\,dx &= \int \frac{11/9}{x-4} + \frac{7/9}{x+5}\,dx \\
&= \frac{11}{9}\int \frac{1}{x-4}\,dx + \frac{7}{9}\int \frac{1}{x+5}\,dx \\
&= \frac{11}{9}\ln|x-4| + \frac{7}{9}\ln|x+5|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{11}{9}\ln|x-4| + \frac{7}{9}\ln|x+5|\right) &= \frac{11}{9}\frac{1}{x-4} + \frac{7}{9}\frac{1}{x+5} \\
&= \frac{\frac{11}{9}(x+5)+\frac{7}{9}(x-4)}{(x-4)(x+5)} \\
&= \frac{(\frac{11}{9}+\frac{7}{9})x+(\frac{55}{9}-\frac{28}{9})}{(x-4)(x+5)} \\
&= \frac{2x+3}{(x-4)(x+5)}
\end{aligned}
$$

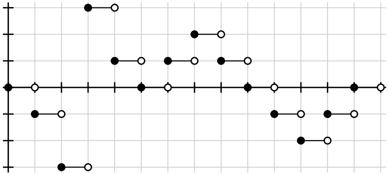
Questão 4: gabarito

$F(x) =$  $F'(x) =$  $\displaystyle\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx =$  $= 0$

$$\underbrace{\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx}_{0} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)\Big|_{x=1}^{x=3}}_{F(3)-F(1)}}_{(-3)-1}}_{-4}}_{\mathbf{F}}$$

Questão 5: gabarito

$$f(x) \ =$$



$$F(x) \ = \ \int_{t=5}^{t=x} f(t)\, dt \ =$$