

Cálculo 2 - 2023.1

Aula 1: Introdução ao curso
e algumas dicas de estudo

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
<http://anggtwu.net/2023.1-C2.html>

Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois “Alex”es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

Calcule:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2} \left(\arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2} \right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois”, o argumento do Alex 2 foi “pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi”...

Seja como o Bob!

Porque é que os Alexes tiraram 0?

Que critério de correção eu usei aí?

Que critério de correção eu vou usar no curso?

Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

“Releia a Dica 7”

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

<http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5>

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em “matematiqûes” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e “lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...

Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:

https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

A parte à esquerda dela é a “gramática” de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é “parseada” nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é “parseável” – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são “parseáveis”.

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:

1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:

<https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113>

$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \{ \langle \text{StmtList} \rangle \}$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \text{if} (\langle \text{Expr} \rangle) \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Num} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow x$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow y$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 0$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 1$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 9$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow >$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow +$

$\text{if} (\underbrace{x}_{\langle \text{Id} \rangle} \underbrace{>}_{\langle \text{Optr} \rangle} \underbrace{9}_{\langle \text{Num} \rangle}) \{ \underbrace{x}_{\langle \text{Id} \rangle} = \underbrace{0}_{\langle \text{Num} \rangle} ; \underbrace{y}_{\langle \text{Id} \rangle} = \underbrace{y}_{\langle \text{Expr} \rangle} \underbrace{+}_{\langle \text{Optr} \rangle} \underbrace{1}_{\langle \text{Expr} \rangle} ; \}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\langle \text{Expr} \rangle}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\langle \text{StmtList} \rangle}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\langle \text{StmtList} \rangle}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\langle \text{Stmt} \rangle}$

A linguagem formal de Cálculo 2

Péssima notícia 1:

Nenhum livro define precisamente a gramática da “linguagem” de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

Péssima notícia 2:

Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a “notação de Leibniz”, na qual expressões como $\frac{dy}{dx}dy = dx$ fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que “Cálculo 2 sem notação de Leibniz” e “Cálculo 2 com notação de Leibniz” são duas linguagens diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em “Cálculo 2 com notação de Leibniz” para “Cálculo 2 sem notação de Leibniz”.

$2 + 3 = 5$	sempre
$2 + 3 \rightarrow 5$	NUNCA
$\underbrace{2 + 3}_5$	sempre

$\frac{dy}{dx} dx = dy$	às vezes
$\int \text{sen } x dx$	sempre
$\int \text{sen } x$	NUNCA

$\int f dx = \int f(x) dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes

$(a \cdot 10)[a := 4] = 4 \cdot 10$	sempre
$(a \cdot 10)[a := 4] = 40$	NUNCA

Quando $x = 3$ temos $f(x)=42$	sempre
Quando $x = 3$ temos $f=42$	NUNCA

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato. O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.

O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.

Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.

Aí o Alex vai chorar pontos e diz “*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*”

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele ficou *invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai tar uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo **infinito** pra desenhar cada uma dessas figuras; **se você for como o Bob você vai levar segundos**.

Seja como o Bob!

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5>

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: “seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1, 3])$ ”.

Todo mundo reconhece que o intervalo $[1, 3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1, 3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... **só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.**

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e “cada vez mais parecidos” com o conjunto $[1, 3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 3\}, \\ A_2 &= \{1, 2, 3\}, \\ A_3 &= \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\}, \\ A_4 &= \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}, \dots \end{aligned}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o “jeito esperto” – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, **por um argumento informal e olhométrico**, que $f([1, 3])$ **deve ser** o intervalo $[3, 4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de “levantar” todo o intervalo $[1, 3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois “projetar” pro eixo y esse “intervalo levantado”. Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – **também meio no olhometro** – que $f([1, 3]) = [3, 4]$.

O Carlos vê que **é óbvio que** $f([1, 3]) = [f(1), f(3)] = \{3, 3\} = \{3\}$, e **portanto** a imagem do intervalo $[1, 3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1, 3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada “Análise Matemática”, baixa o “*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*” do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – **mas ele leva um ano nisso.**

Seja como o Bob!

Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que “entender uma fórmula” quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando “isso aqui é verdade?”, ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o ‘?’ deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \quad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como (*) e (**) pras igualdades

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \quad (**)$$

e aí eu pergunto “você quer saber se a (**) é algo que vale sempre, né?”, e aí a pessoa responde “É! É isso!”, e aí eu consigo responder: se a (**) valer sempre ela também vai valer no caso em que $x = 3$ e $y = 4$. Quando $x = 3$ e $y = 4$ a (**) vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \quad (***)$$

e aí temos:

$$\sqrt{\underbrace{x^2}_{3} + \underbrace{y^2}_{4}} = \underbrace{3 + 4}_{7}$$

$$\underbrace{\underbrace{9}_{9} \quad \underbrace{16}_{16}}_{25}$$

$$\underbrace{\quad}_{5}$$

F

Ou seja, a igualdade (***) é falsa, e portanto a (**) não vale sempre.

Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade (*) era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade (**) ao invés disso, porque eu “adivinhaei” que na verdade o que a pessoa queria saber era se a (**) era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a (**) – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo “generalizar” e “particularizar” (ou: “especializar”) bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer “contas com letras” no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, “encontrar a generalização certa” como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que “traduzir pra português” é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a “tradução pra português” não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões “como matemáticos” e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘a’ por ‘w’?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘o’ por ‘u’?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra “banana” todas as letras ‘A’ por ‘W’?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra “blitiri” todas as letras ‘2’ por ‘3’?

O resultado da 1 é bem fácil: “bwnwnw”, mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como “não dá pra fazer o 2 porque “banana” não tem ‘o’”, “não sei se o 3 tem que dar “bWn-WnW” ou “bwnwnw””, ou “não dá pra fazer o 4 porque “blitiri” não é uma palavra e ‘2’ e ‘3’ não são letras”...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, **você vai ter que aprender a interpretar certas definições “como matemático”**: você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de “mais simples possível” vai ser bem **parecida** com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde “banana” no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra ‘o’, e dá erro se não tem;

o programa que responde “banana” no item 3 – porque ele considera que ‘a’ e ‘A’ são letras completamente diferentes, e “banana” não tem ‘A’ – é muito mais simples do que os programas que consideram que ‘a’ e ‘A’ são “letras parecidas”;

o programa que responde “blitiri” no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como “letras”.

Colocar aqui:

Link pra casos degenerados

Link pra áreas negativas

Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot$$

e me perguntava “isso aqui tá certo?”, ou: “é isso?”...

Aqui a pergunta mais precisa seria “esse início tá certo?”, ou “como é que eu continuo?”... eu aqui eu poderia responder ou “não!” ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot \quad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer “Unexpected end of input”, que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o “isso aqui tá certo?” é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \alpha'(x) \cdot 42 \quad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o ‘=’ no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade (**) é verdadeira para todas as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$?
- a igualdade (**) é um caso particular da regra da cadeia?

“Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 eu fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

<http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html>

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copieiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também...

gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Leticia de Fiori postou [isso aqui](#) no Facebook:

AL: Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.

Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.

Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.

Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.

E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

E: Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de “perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever “hipótese” ou “rascunho” antes das partes que você não tem certeza e **NÃO APAGAR NADA, NUNCA** - ...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

AL: Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?

Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.

Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.

De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto. Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre “retas reversas” – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos “sabem” que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentam aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar “toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula” ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhometro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo x e a outra é paralela ao eixo y . Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima “quer dizer” – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos “simples” em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos “estudaram pelo livro”, mas existem vários modos de “estudar pelo livro” e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de “estudar pelo livro” que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.

Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda:

<http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf>

Ele diz isso aqui:

Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f + g$ é diferenciável em a e:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Nós vamos considerar que esse teorema pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o “Calculus Made Easy”, mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o “Calculus Made Easy” e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de “função” foi mudando...

Vocabulário ativo e passivo

Sobre porque aulas puramente expositivas, ou aulas principalmente expositivas, não funcionam. Aqui vou ter que usar duas expressões que são muito usadas em ensino de línguas estrangeiras: “vocabulário ativo” e “vocabulário passivo”. Uma palavra está no seu “vocabulário ativo” se você consegue usar ela quando você fala (ou escreve), e uma palavra está só no seu “vocabulário passivo” quando você não usa ela mas você entende ela quando alguém usa.

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – e isso só passa a ser verdade depois que a pessoa aprende muito bem como estudar.

(...)

Não apague - escreva “hipótese:”

(...)

Cumprimento superficial da matéria

Os alunos acham que na hora da prova eles vão magicamente conseguir fazer questões que ele não treinaram

Toda dúvida é bem vinda. Dúvidas sobre assuntos “antigos” em vários graus – assuntos tratados algumas aulas antes, assuntos de matérias anteriores, assuntos de ensino médio – são todas válidas... mas

Cálculo 2 é uma disciplina na qual os alunos aprendiam técnicas importantíssimas à medida que faziam milhares de contas à mão; eles precisavam resolver muitas integrais e equações diferenciais sem errar, e precisavam descobrir praticamente sozinhos como não se perder e não errar nestas contas. Muitas das técnicas que eles aprendiam não estão explicadas explicitamente em livro nenhum.

Hoje em dia há bons programas de computação simbólica ("PCS"s) que rodam até em celulares e que resolvem em segundos as questões de Cálculo 2 que costumavam cair nas provas, e pessoas de vários lugares do Brasil estão discutindo como mudar a abordagem do curso de Cálculo 2 - sem mudar a ementa ou o programa - pra que os alunos aprendam as técnicas importantíssimas acima de outras formas. Os detalhes da minha abordagem atual estão aqui: <http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-tudo.pdf>. É fácil ver que, e como, os exercícios do "tudo.pdf" complementam os exercícios dos livros tradicionais: um dos

focos do curso passa a ser aprender como manipular expressões algébricas de um jeito parecido com o que os PCSs fazem; outro, visualizar o que certas expressões "querem dizer", e outro, como definir precisamente o que é uma igualdade "óbvia". Alguns alunos estranham essa abordagem, e um monitor ajudaria muito.

Quando você crescer

...em equipe

contas fáceis de revisar

visualizar muita coisa de cabeça

erros conceituais graves

o computador vai fazer uma parte das contas

um resultado errado pode custar milhares de dinheiros