Cálculo 2 - 2023.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Cálculo 2 - 2023.1

Aula 0: Introdução ao curso
e algumas dicas de estudo

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois "Alex"es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

Calcule:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois", o argumento do Alex 2 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi"...

Seja como o Bob!

Porque é que os Alexes tiraram 0?
Que critério de correção eu usei aí?
Que critério de correção eu vou usar no curso?
Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

“Releia a Dica 7”

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html
http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...
2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.
3) Em “matematiquês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e ”lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.
4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.
5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.
6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.
7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...
Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:
https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

A parte à esquerda dela é a "gramática" de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é "parseada" nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é "parseável" – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são "parseáveis".

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:
1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:
https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113

$$\begin{array}{rcl}
\langle \mathsf{Stmt} \rangle & \to & \langle \mathsf{Id} \rangle \;=\; \langle \mathsf{Expr} \rangle \;; \\
\langle \mathsf{Stmt} \rangle & \to & \{\; \langle \mathsf{StmtList} \rangle \;\} \\
\langle \mathsf{Stmt} \rangle & \to & \texttt{if}\;(\; \langle \mathsf{Expr} \rangle \;)\; \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{StmtList} \rangle & \to & \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{StmtList} \rangle & \to & \langle \mathsf{StmtList} \rangle \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle & \to & \langle \mathsf{Id} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle & \to & \langle \mathsf{Num} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle & \to & \langle \mathsf{Expr} \rangle \; \langle \mathsf{Optr} \rangle \; \langle \mathsf{Expr} \rangle \\
\langle \mathsf{Id} \rangle & \to & \texttt{x} \\
\langle \mathsf{Id} \rangle & \to & \texttt{y} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle & \to & \texttt{0} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle & \to & \texttt{1} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle & \to & \texttt{9} \\
\langle \mathsf{Optr} \rangle & \to & > \\
\langle \mathsf{Optr} \rangle & \to & +
\end{array}$$

$$\underbrace{\texttt{if}\;(\;\underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle \mathsf{Id}\rangle}}_{\langle \mathsf{Expr}\rangle}\;\underbrace{>}_{\langle \mathsf{Optr}\rangle}\;\underbrace{\underbrace{\texttt{9}}_{\langle \mathsf{Num}\rangle}}_{\langle \mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle \mathsf{Expr}\rangle}\;)\;\underbrace{\{\;\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle \mathsf{Id}\rangle}\;=\;\underbrace{\underbrace{\texttt{0}}_{\langle \mathsf{Num}\rangle}}_{\langle \mathsf{Expr}\rangle}\;;}_{\langle \mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle \mathsf{StmtList}\rangle}\;\underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle \mathsf{Id}\rangle}\;=\;\underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle \mathsf{Expr}\rangle}\;\underbrace{+}_{\langle \mathsf{Optr}\rangle}\;\underbrace{\texttt{1}}_{\langle \mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle \mathsf{Expr}\rangle}\;;}_{\langle \mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle \mathsf{StmtList}\rangle}\;\}}_{\langle \mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle \mathsf{Stmt}\rangle}$$

A linguagem formal de Cálculo 2

Péssima notícia 1:
Nenhum livro define precisamente a gramática da "linguagem" de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

Péssima notícia 2:
Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a "notação de Leibniz", na qual expressões como $\frac{dy}{dx}dy = dx$ fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que "Cálculo 2 sem notação de Leibniz" e "Cálculo 2 com notação de Leibniz" são duas linguages diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em "Cálculo 2 com notação de Leibniz" para "Cálculo 2 sem notação de Leibniz".

$2+3=5$	sempre
$2+3 \to 5$	**NUNCA**
$\underbrace{2+3}_{5}$	sempre
$\frac{dy}{dx}dx = dy$	às vezes
$\int \operatorname{sen} x\, dx$	sempre
$\int \operatorname{sen} x$	**NUNCA**
$\int f\, dx = \int f(x)\, dx$	às vezes
$y = y(x)$	às vezes
$(a \cdot 10)[a := 4] = 4 \cdot 10$	sempre
$(a \cdot 10)[a := 4] = 40$	**NUNCA**
Quando $x=3$ temos f(x)=42	sempre
Quando $x=3$ temos f=42	**NUNCA**

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, "sintaxes" – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf
https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas "linguagens formais" e "compilam" "programas" escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\int_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle \, d\langle\mathsf{var}\rangle$$

$$\langle\mathsf{expr}\rangle\big|_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}$$

$$\forall\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\exists\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

e as notações de "set comprehensions" daqui: Mpg8

Justificativas

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e TODOS ELES supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer "Syntax error" onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:

`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html`

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

Using Substitution

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,du && \text{Let } u = 7\theta+5,\ du = 7\,d\theta,\ (1/7)\,du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,du && \text{With the (1/7) out front, the integral is now in standard form.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{Integrate with respect to } u\text{, Table 4.2.} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C && \text{Replace } u \text{ by } 7\theta+5.
\end{aligned}$$

Eu comecei a aprender um desses "programas que entendem demonstrações" em 2021 – o Lean:

`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/`

Ele é considerado muito mais fácil de usar que os "proof assistants" anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que "tava tudo certo, caramba" e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram "é óbvio".

Neste curso nós vamos ver as definições precisas de *alguns tipos* de "passos óbvios" que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por sequências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{array}{rcll}
\langle\text{expr}\rangle & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
& = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
& = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
& = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle
\end{array}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra ZILHÕES de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são "óbvios":

$$\langle\text{expr}\rangle \quad = \quad \langle\text{expr}\rangle \qquad \langle\text{justificativa}\rangle$$

Obs: eu copiei o texto acima daqui: 2dT8
Falta revisá-lo!

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato.
O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.
O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.
Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.
Aí o Alex vai chorar pontos e diz "*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*"

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele *ficou invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo infinito pra desenhar cada uma dessas figuras; se você for como o Bob você vai levar segundos.

Seja como o Bob!

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: "seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1,3])$".
Todo mundo reconhece que o intervalo $[1,3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1,3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e "cada vez mais parecidos" com o conjunto $[1,3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,3\}, \\ A_2 &= \{1,2,3\}, \\ A_3 &= \{1,1.5,2,2.5,3\}, \\ A_4 &= \{1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3\}, \ldots \end{aligned}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o "jeito esperto" – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, por um argumento informal e olhométrico, que $f([1,3])$ deve ser o intervalo $[3,4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de "levantar" todo o intervalo $[1,3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois "projetar" pro eixo y esse "intervalo levantado". Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – também meio no olhômetro – que $f([1,3]) = [3,4]$.

O Carlos vê que é óbvio que $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = \{3,3\} = \{3\}$, e portanto a imagem do intervalo $[1,3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1,3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada "Análise Matemática", baixa o "*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*" do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – mas ele leva um ano nisso.

Seja como o Bob!

Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que "entender uma fórmula" quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

> Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando "isso aqui é verdade?", ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \overset{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o '$\overset{?}{=}$' deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \qquad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como $(*)$ e $(**)$ pras igualdades –

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \qquad (**)$$

e aí eu pergunto "você quer saber se a $(**)$ é algo que vale sempre, né?", e aí a pessoa responde "É! É isso!", e aí eu consigo responder: se a $(**)$ valer sempre ela também vai valer no caso em que $x = 3$ e $y = 4$. Quando $x = 3$ e $y = 4$ a $(**)$ vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \qquad (***)$$

e aí temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{3}{}^2}_{9} + \underbrace{\underbrace{y}_{4}{}^2}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{3+4}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Ou seja, a igualdade $(***)$ é falsa, e portanto a $(**)$ não vale sempre.

Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade ($*$) era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade ($**$) ao invés disso, porque eu "advinhei" que na verdade o que a pessoa queria saber era se a ($**$) era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a ($**$) – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo "generalizar" e "particularizar" (ou: "especializar") bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer "contas com letras" no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, "encontrar a generalização certa" como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que "traduzir pra português" é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a "tradução pra português" não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões "como matemáticos" e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'a' por 'w'?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'o' por 'u'?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'A' por 'W'?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra "blitiri" todas as letras '2' por '3'?

O resultado da 1 é bem fácil: "bwnwnw", mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como "não dá pra fazer o 2 porque "banana" não tem 'o' ", "não sei se o 3 tem que dar "bWnWnW" ou "bwnwnw" ", ou "não dá pra fazer o 4 porque "blitiri" não é uma palavra e '2' e '3' " não são letras"...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, você vai ter que aprender a interpretar certas definições "como matemático": você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de "mais simples possível" vai ser bem parecida com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde "banana" no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra 'o', e dá erro se não tem;

o programa que responde "banana" no item 3 – porque ele considera que 'a' e 'A' são letras completamente diferentes, e "banana" não tem 'A' – é muito mais simples do que os programas que consideram que 'a' e 'A' são "letras parecidas";

o programa que responde "blitiri" no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como "letras".

Links:
Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:
2cT185, 2cT185
2fT63, 2fT64

2gT20 Contexto / Sabemos que $2 = 3$. Então...
2gT38 O macaco substituidor: banana

Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot$$

e me perguntava "isso aqui tá certo?", ou: "é isso?"...
Aqui a pergunta mais precisa seria "esse início tá certo?", ou "como é que eu continuo?"... eu aqui eu poderia responder ou "não!" ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot \qquad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer "Unexpected end of input", que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o "isso aqui tá certo?" é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot 42 \qquad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o '=' no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade $(**)$ é verdadeira para todas as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$?
- a igualdade $(**)$ é um caso particular da regra do produto?

“Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 em fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também... gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Letícia de Fiori
postou isso aqui no Facebook:

AL: Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.
Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.
Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.
Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.
E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

E: Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de ”perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever ”hipótese” ou ”rascunho” antes das partes que você não tem certeza e NÃO APAGAR NADA, NUNCA -
...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

AL: Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?
Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.
Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.
De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto.
Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre "retas reversas" – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos "sabem" que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar "toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula" ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhômetro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo x e a outra é paralela ao eixo y. Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima "quer dizer" – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos "simples" em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos "estudaram pelo livro", mas existem vários modos de "estudar pelo livro" e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de "estudar pelo livro" que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer "ok, jóia, tá certo!".

O "colega que seja menos seu amigo" vai fazer menos tentativas, e os personagens "o monitor" e "o professor" da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um "colega que seja menos seu amigo" te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:
Slogans27:07 até 32:45

Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: MirandaP80. Ele diz isso aqui:

> Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f + g$ é diferenciável em a e:
>
> $$(f+g)'(a) = f(a) + g(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f+g)'(a) = f(a) + g(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o "Calculus Made Easy", mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o "Calculus Made Easy" e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de "função" foi mudando...

Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: 2gT36 (p.4) O macaco e as contas formais

Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:
Visaud39:09 até 46:06

Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem "formal" que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi (VenturiGA), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker (AckerGA1) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: Visaud59:49.

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de "partículas", como "seja", "então", "temos", "isto é", "queremos", "sabemos que", "lembre que", "digamos que" e "vamos testar se".

Cálculo 2 - 2023.1

Aulas 1 e 3: integração e derivação
com o mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Introdução

Nesta parte do curso nós vamos tentar entender
este trecho do vídeo do Mathologer,
CalcEasy03:19 até 12:47

e vamos fazer alguns exercícios –
que podem ser feitos em vários níveis de detalhe.
Leia estes trechos das legendas de uns vídeos meus:
Slogans01:10 até 08:51: sobre chutar e testar
Slogans07:17 até 07:48: ...do tamanho de um apartamento
Visaud45:14 até 52:24: ajustar o nível de detalhe
Slogans1:11:02 até 1:17:42: seja o seu prório Geogebra
Slogans1:39:46 até 1:45:02: ...com quem vale a pena estudar

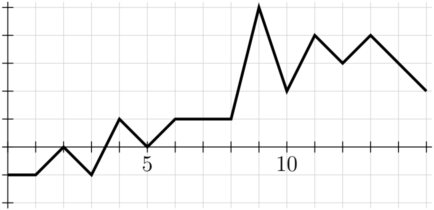
Leia também estes slides:
2gT4 (intro, p.3) "Releia a Dica 7"
2gT13 (intro, p.12) Sobre Português
2gT14 (intro, p.13) Sobre Português (2)
2gT16 (intro, p.15) Unexpected end of input
2gT19 (intro, p.18) Retas reversas

Links

Os slides das próximas páginas são versões ligeiramente reescritas destes slides de outros semestres:

2fT17 (mathologermovel, p.3) Item 3
2fT18 (mathologermovel, p.4) Item 4
2eT62 (TFC1, p.3) Algumas propriedades da integral
2eT66 (TFC1, p.7) Exercício 1
2eT69 (TFC1, p.10) A função G(x) é esta aqui
2dT225 (MT3, p.4) Uma espécie de gabarito
2eT199 (P1, p.7) eu defini as funções f e g desta forma
2eT200 (P1, p.8) gabarito

Exercício 1.
Seja $G(x)$ esta função:

$G(x) \quad =$ 

Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

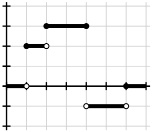
Dica 1: $G'(3.5) = 2$.
Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

Exercício 1: mais dicas

Leit1p18 (p.17: inclinação)
Miranda66 (Capítulo 3: Derivadas)
Miranda22 (1.4: Limites laterais)
Miranda74 (3.2.3: Derivadas laterais)

2eT70 (TFC1, p.11) Dicas pro exercício 4

Exercício 2.

Seja $f(x)$ $=$  .

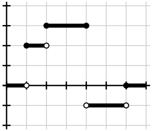
Note que:

$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = 2 \cdot (2-1)$,
$\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx = 3 \cdot (4-3)$,
$\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx = -1 \cdot (6-4)$,

Calcule:

a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$
b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$
c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x)\,dx$
d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x)\,dx$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$ 

e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx$.

a) Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \ldots, F(6)$.

b) Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0)$.

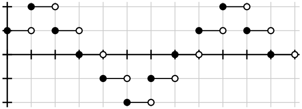
Exercício 4.
No exercício 3 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

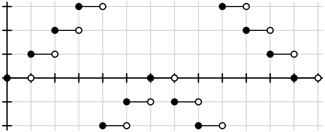
a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 3.
Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:
$\{(0, F(0)),\ (0.5, F(0.5)), \ldots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assitindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 5.

Sejam:

$f(x) =$  ,

$g(x) =$  .

Faça os gráficos destas funções:

a) $F(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt$

b) $G(x) = \displaystyle\int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt$

Cálculo 2 - 2023.1

Aulas 4 até 9: o macaco integrador
e integração por partes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links

2fT2 PDF de 2022.2 sobre o '[:=]'
2dT8 PDF de 2021.2 sobre o '[:=]' e justificativas
Leit2p15 (p.68): Dois exemplos de contas com justificativas

CalcEasy14:08 até 18:18: como o macaco deriva funções elementares
2gQ7 Quadros de 2022.2 sobre isto ↑

2fT23 Outra definição para integral indefinida
2fT26 Integração por partes em 2022.2: pedaços do quadro

O macaco substituidor: banana

Os quadros da aula de 25/abril/2023 estão aqui:

2gQ13

O objetivo deste slide é fazer você entender muito bem que a operação de *substituição*, '[:=]', é uma operação MUITO diferente da *igualdade*, '='. Você provavelmente já sabe lidar bastante bem com igualdades. Leia este slide aqui várias vezes,

2gT13 Banana

até você entender bastante bem como o programa de substituir letras descrito nele funciona. Digamos que a notação abaixo

$$\text{banona}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$$

Seja uma *abreviação* pra isto aqui:

> o resultado de substituir todas as letras 'a' por 'o' na palavra "banona" é a palavra "bonono".

Dica pro exercício
Lembre que em C `"123"` é um string de comprimento 3 e `123` é um número; `100+23` é igual a `123` mas `"100+23"` não é igual a `"123"`.

Em Cálculo 2 a gente vai ter algo parecido com essa distinção entre strings e números – a gente vai distinguir entre *expressões* e *resultados de expressões*. Por exemplo, 2+5, 3+4 e 7 são três expressões diferentes mas com o mesmo resultado... e em alguns itens do exercício abaixo você vai ter que considerar que, por exemplo, bana+na é uma palavra com 7 caracteres, banana é uma palavra com 6 caracteres, e que em nenhum momento o exercício pede pra você tratar bana+na como uma expressão cujo resultado vai ser banana se você definir o '+' como concatenação.

Exercício
Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

a) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$
b) $\text{bonono}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{banana}$
c) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bono}$
d) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$
e) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bono+no}$
f) $\text{banana}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bononono}$
g) $\text{bonono}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{banona}$
h) $\text{banona}\,[\text{a} := \text{o}] = \text{bonono}$

Péssima notícia
Em Cálculo 2 a gente vai trabalhar o tempo todo com expressões que são transformadas passo a passo. *Talvez isto seja algo completamente novo pra você.*

O macaco e as contas formais

Na aula de 25/abril nós passamos muito tempo revendo coisas que deveriam ser básicas – já vou dizer quais – e eu passei um dever de casa bem grande: *leia o que você conseguir das seções do Miranda e do Leithold sobre a regra da cadeia e faça todos os exercícios que você puder.* Aqui tem links pra elas:

Miranda87 Seção 3.5: regra da cadeia
Miranda228 Seção 7.5.1: TFC2
Leit3p45 (p.181) Seção 3.6: regra da cadeia
Leit5p61 (p.344) Seção 5.8: Os teoremas fundamentais do Cálculo

Lembre que: 1) um dos objetivos do curso é fazer vocês se tornarem capazes de estudar pelos livros, 2) as provas vão ter várias questões que vocês só vão conseguir fazer se vocês tiverem muita prática de fazer contas, e 3) o livro do Leithold é difícil em alguns lugares mas ele é INCRIVELMENTE bom – estudem por ele sempre que puderem!

Outra coisa: dê uma olhada na seção do Miranda sobre a regra da cadeia – você vai ver que essa fórmula tem uma demonstração, e que a fórmula e a demonstração só funcionam quando certas hipóteses são obedecidas. Aliás, uma questão da P1 do semestre passado foi sobre situações em que a fórmula do TFC2 dá resultados errados. Dê uma olhada nela:

2fT110 A fórmula do TFC2 nem sempre vale

A P1 deste semestre vai ter uma questão parecida com essa.

Em algumas situações nós vamos primeiro aplicar a fórmula como se ela valesse sempre, e só depois que nós fizermos todas as contas nós vamos descobrir quais são as hipóteses necessárias pra aquelas contas valerem. O nome "oficial" pra essas contas sem a verificação das hipóteses é "contas formais", mas eu vou usar a terminologia do Mathologer... ele fala muito no macaco que faz contas automaticamente sem fazer a menor idéia do que aquelas contas querem dizer, então eu vou usar expressões como "aqui vamos fazer contas como o macaco".

Exercício
Use o que você lembra de Cálculo 1 pra obter boas fórmulas pras derivadas abaixo:

$$\begin{array}{rl}
\text{a)} & \frac{d}{dx}\, e^{g(x)} \\
\text{b)} & \frac{d}{dx}\, g(x)^{1/2} \\
\text{c)} & \frac{d}{dx}\, \sqrt{g(x)} \\
\text{c)} & \frac{d}{dx}\, f(4x)
\end{array}$$

No próximo slide nós vamos ver como o macaco faz esssas contas usando a operação '[:=]'.

O macaco substituidor: EDOs, RC, TFC2

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
[4] & = & \Big(f'(x) = x^4\Big) \\
[5] & = & \Big(f'(x) = 2f(x)\Big) \\
[6] & = & \Big(f''(x) + f'(x) = 6f(x)\Big) \\
[7] & = & \Big(f'(x) = -\frac{1}{f(x)}\Big) \\
[8] & = & \Big(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\Big) \\
[RC] & = & \Big(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)\Big) \\
[TFC2] & = & \Big(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\Big)
\end{array}
$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: 2dT13 EDOs por chutar e testar.

Exercício
Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma *expressão* – *não simplifique ela*. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter `'a'` pelo caracter `'2'` no string `"a+5"` é o string `"2+5"`, não o string `"7"`, e nem o número `7`.

a) $f(g(x))\,\big[x := 42\big]$

b) $f(g(x))\,\big[g(x) := 200 \cdot x\big]$

c) $f(g(x))\,\big[f(y) := y^2 + y^3\big]$

d) $f(g(x))\,\big[f(y) := e^y\big]$

e) $f(g(x))\,\big[g(x) := 4 \cdot x\big]$

f) $f(g(x))\,\begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ g(x) := 4 \cdot x \end{bmatrix}$

g) $f(g(x))\,\big[f(y) := y^{1/2}\big]$

h) $f(g(x))\,\big[f(y) := \sqrt{y}\big]$

i) $f(g(x))\,\big[f(y) := \sqrt{y}\big]$

j) $f(g(x))\,\begin{bmatrix} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{bmatrix}$

k) $f(g(x))'\,\begin{bmatrix} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{bmatrix}$

l) [RC] $\begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{bmatrix}$

m) [RC] $\begin{bmatrix} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2}y^{-1/2} \end{bmatrix}$

n) [RC] $\begin{bmatrix} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{bmatrix}$

o) [6] $\begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{bmatrix}$

p) [6] $\begin{bmatrix} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{bmatrix}$

q) [TFC2] $\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{bmatrix}$

r) [8] $\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix}$

Diferença

Lembre que esta notação aqui

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

tem várias pronúncias:
"a integral da função $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$",
"a área sob a curva $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$",
"a área sob a curva $f(x)$ desde $x = a$ até $x = b$",
etc...

A pronúncia desta operação daqui

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

vai ser "a diferença da $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$",
e a definição formal dela vai ser esta:

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

Exercício
O Leithold e o Miranda usam notações ligeiramente diferentes da minha para a operação diferença. Dê uma olhada nestas páginas aqui,

Leit5p65 p.348
Miranda344

e traduza a expressão

$$(\sin 2x)\big|_{x=3}^{x=4}$$

da minha notação para

a) a notação do Miranda,
b) a notação do Leithold.

Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada:

Miranda181 6. Integral Indefinida
Miranda207 7. Integração definida
Leit5p3 (p.286) 5.1. Antidiferenciação
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui

$$\int f(x)\,dx$$

são gambiarras que funcionam mal.

Eu vou usar esta definição aqui,
2fT23 (p.4) Outra definição para a integral indefinida
e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:
2fT24 (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\mathrm{II}] = \left(\int f'(x)\,dx = f(x) \right)$$

Exercícios

Calcule:
a) $[\mathrm{II}] \begin{bmatrix} f(x) := x+42 \\ f'(x) := 1 \end{bmatrix}$
b) $[\mathrm{II}] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \end{bmatrix}$

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:
Miranda185 Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:
Leit5p6 (p.289) 5.1.8. Teorema

Integração por partes

Ainda não digitei as contas daqui!

Vou usar isto, de 2022.2:
2fT25 (p.6) Pedaços do quadro

E:
Leit9 9. Técnicas de integração
Leit9p4 (p.531) 9.1. Integração por partes
Miranda182 6.1.1 Regras Básicas de Integração
Miranda199 6.3 Integração por partes

Cálculo C2 - 2023.1

Aula 10: mudança de variáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links

Mudança de variável na integral definida (MVD):
2eT131 (t-ints, p.12) Uma figura pra mudança de variável
Thomas55p11 (p.376) Theorem 5: Substitution in definite integrals
2fT49 Meu PDF de 2022.2 sobre mudança de variáveis

Mudança de variável na integral indefinida (MVI):
2eT133 (t-ints, p.14) Um exemplo com contas
2eT135 (t-ints, p.16) Outro exemplo com contas
Thomas55p3 (p.370) Theorem 5: The substitution rule
Leit5p13 (p.296) A regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit9p10 (p.537) Integração de potências de sen e cos
Miranda189 6.2. Integração por substituição
Miranda192 Exemplo 6.6
Miranda193 Não podemos
Miranda196 Exercícios
Miranda255 8.3 Integrais Trigonométricas

Vídeo do Reginaldo:
`https://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g`

Contas (1)

$$
\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx & \overset{(1)}{=} & f(x)\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{u=\alpha}^{u=\beta} f'(u)\,du & \overset{(2)}{=} & f(u)\big|_{u=\alpha}^{u=\beta} \\
\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx & \overset{(3)}{=} & \operatorname{sen} x\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} 2\cos 2x\,dx & \overset{(4)}{=} & \operatorname{sen} 2x\big|_{x=a}^{x=b} \\
 & \overset{(5)}{=} & \operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a \\
 & \overset{(6)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=2a}^{u=2b} \\
\int_{u=\alpha}^{u=\beta} \cos u\,du & \overset{(7)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=\alpha}^{u=\beta} \\
\int_{u=2a}^{u=2b} \cos u\,du & \overset{(8)}{=} & \operatorname{sen} u\big|_{u=2a}^{u=2b} \\
 & \overset{(9)}{=} & \operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2a \\
 & \overset{(10)}{=} & \operatorname{sen} 2x\big|_{x=a}^{x=b} \\
 & \overset{(11)}{=} & \int_{x=a}^{x=b} 2\cos 2x\,dx \\
\int_{x=a}^{x=b} 2\cos 2x\,dx & \overset{(12)}{=} & \int_{u=2a}^{u=2b} \cos u\,du
\end{array}
$$

Contas (2)

$$
\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx & \overset{(1)}{=} & f(x)|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{u=\alpha}^{u=\beta} f'(u)\,du & \overset{(2)}{=} & f(u)|_{u=\alpha}^{u=\beta} \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} (\cos x^2) \cdot 2x\,dx & \overset{(3)}{=} & \operatorname{sen} x^2|_{x=a}^{x=b} \\
& \overset{(4)}{=} & \operatorname{sen} b^2 - \operatorname{sen} a^2 \\
& \overset{(5)}{=} & \operatorname{sen} u|_{u=a^2}^{u=b^2} \\
\int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du & \overset{(6)}{=} & \operatorname{sen} u|_{u=a^2}^{u=b^2} \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} (\cos x^2) \cdot 2x\,dx & \overset{(7)}{=} & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(8)}{=} & g(h(x))|_{x=a}^{x=b} \\
& \overset{(9)}{=} & g(h(b)) - g(h(a)) \\
& \overset{(10)}{=} & g(u)|_{u=h(a)}^{u=h(b)} \\
\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du & \overset{(11)}{=} & g(u)|_{u=h(a)}^{u=h(b)} \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(12)}{=} & \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g'(u)\,du \\
\\
\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(13)}{=} & \int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du
\end{array}
$$

Um exemplo

Isto aqui é um exemplo de como contas com mudança de variável costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x+4$.

Compare com:
Miranda189 6.2: Integração por substituição
Leit5p13 (p.296) Teorema 5.2.1: a regra da cadeia para a antidiferenciação
Leit5p16 (p.299) Exemplo 5

Compare as contas à esquerda, que não têm nem os limites de integração nem as barras de diferença, com estas:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen} u)\Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen}(3x+4))\Big|_{x=a}^{x=b}\right)
\end{aligned}$$

Nós vamos tratar a versão à esquerda como uma abreviação pra versão da direita. Note que pra ir da versão "completa" pra "abreviada" é super fácil, é só apagar os limites de integração e as barras de diferença – mas pra ir da versão "abreviada" pra "completa" a gente precisa reconstruir os limites de integração e as barras de diferença, o que é bem mais difícil.

Caixinhas de anotações

O meu truque preferido pra não me enrolar nas contas de uma mudança de variável é fazer uma caixinha de anotações como essa aqui,

$$\left[\begin{array}{c} u = 3x+4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+4) = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ \color{red}{du = 3\,dx} \\ \color{red}{dx = \frac{1}{3}\,du} \end{array}\right]$$

na qual: a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova – que nesse exemplo é $u = 3x+4$, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras como:

$$dx = 42\,du$$

Durante quase todo o curso de C2 a gente vai tratar esse tipo de coisa como uma igualdade entre expressões incompletas – mais ou menos como se a gente estivesse dizendo isso aqui:

$$+20) = /99]$$

Na caixinha à esquerda eu colori as linhas que são gambiarras em vermelho.

Aqui tem um exemplo grande:
2fT112 (C2-P1, p.5) Questão 1: gabarito

Os detalhes horríveis

Nesta página aqui – Miranda193 – o Miranda diz “Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela”, mas ele não explica porquê... se em

$$\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(u)\,dx$$

esse u fosse uma abreviação para $3x+4$ essa integral acima seria equivalente à do início do slide anterior, né?... =(

Neste slide eu vou tentar contar o que eu sei sobre como o método da substituição funciona – *pra convencer vocês de que não vale a pena vocês tentarem entender os detalhes agora.*

Toda mudança de variável numa integral definida é consequência da igualdade (13) do slide “Contas (2)”. Por exemplo, compare:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} g(h(x))h'(x)\,dx & \overset{(13)}{=} & \displaystyle\int_{u=h(a)}^{u=h(b)} g(u)\,du \\ \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx & = & \displaystyle\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \end{array}$$

A gente pode tentar descobrir qual é a substituição certa passo a passo, começando pelas funções mais simples.... eu faria assim: olhando pra parte direita eu chuto que $g(u) = 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}$; olhando pra parte esquerda eu chuto que $h(x) = 3x+4$, e daí $h'(x) = 3$; aí eu testo esta substituição aqui,

$$(13)\begin{bmatrix} g(u) := 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3} \\ h(x) := 3x+4 \\ h'(x) := 3 \end{bmatrix}$$

e vejo que o resultado dela é *equivalente* (mas não igual!!!) à última igualdade da coluna da esquerda – não preciso nem substituir o a e o b.

Os detalhes horríveis (2)

Estas contas aqui,

$$\begin{array}{rcl} u & = & x^4 \\ \frac{du}{dx} & = & 4x^3 \\ du & = & \frac{du}{dx}dx \\ & = & 4x^3\,dx \end{array}$$

fazem sentido se a gente considerar que:

1. x é uma variável independente,
2. u é uma variável dependente, com $u = u(x) = x^4$,
3. dx é uma variável independente,
4. du é uma variável dependente, com $du = \frac{du}{dx}dx$,
5. estas regras sobre diferenciais valem: Leit4p61 (p.275),
6. estas regras sobre variáveis dependentes valem: Stew14p53 (p.951),
7. o dx num $\int f(x)\,dx$ funciona como uma diferencial.

Eu já perguntei pra vários matemáticos fodões que eu conheço – incluindo os desenvolvedores do Maxima, na mailing list – onde eu posso encontrar alguma formalização das regras de como lidar com variáveis dependentes, diferenciais e mudança de variável na integral indefinida, e todos eles me responderam a mesma coisa: "*não faço a menor idéia! Eu sei algumas das regras mas não todas, e não sei onde você pode procurar...*" =(

Moral: é melhor a gente tratar o $du = 4x^3\,dx$ como uma gambiarra...

Caixinhas com mais anotações

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^7\,d\theta &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^6\cos\theta\,d\theta \\
&=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4((\cos\theta)^2)^3\cos\theta\,d\theta \\
&=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4(1-(\operatorname{sen}\theta)^2)^3\cos\theta\,d\theta \\
&=& \int s^4(1-s^2)^3\,ds
\end{array}
\quad
\left[\begin{array}{c}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
\cos\theta\,d\theta = ds
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{rcl}
\int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^7\,d\theta &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^4(\cos\theta)^6\cos\theta\,d\theta \\
&=& \int s^4(1-s^2)^3\,ds
\end{array}
\quad
\left[\begin{array}{c}
\operatorname{sen}\theta = s \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
\cos\theta\,d\theta = ds \\
(\cos\theta)^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta^2) \\
(\cos\theta)^2 = 1-s^2 \\
(\cos\theta)^6 = (1-s^2)^3
\end{array}\right]$$

Caixinhas com mais anotações (2)

$$\begin{aligned}
\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &= \int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)\sqrt{(\cos\theta)^2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta
\end{aligned}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta
\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
\int s\sqrt{1-s^2}\,ds &= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^2\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds &= \int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int 1\,d\theta \\
&= \theta \\
&= \operatorname{arcsen} s
\end{aligned}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\
ds = \cos\theta\,d\theta \\
s^2 = (\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-s^2 = 1-(\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-s^2 = (\cos\theta)^2 \\
\sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\
\operatorname{arcsen} s = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\
\operatorname{arcsen} s = \theta \\
\theta = \operatorname{arcsen} s
\end{array}\right]$$

O macaco, de novo

Estas duas igualdades são falsas

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} & = & \cos\theta \\ \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta & = & \theta \end{array}$$

quando $\theta = \pi$... confira!

Mas elas são verdadeiras para $\theta = 0$, e para todo θ num certo intervalo em torno do 0 que eu não quero contar qual é.

Lembre quem em Cálculo 2 a gente vai primeiro fazer as contas como o macaco que faz todas as contas como se tudo funcionasse, e a gente vai deixar pra checar os detalhes, como se θ está no intervalo certo, só no final, depois de termos feito as contas todas.

O Leithold é super cuidadoso nas contas e nesses detalhes como os domínios da funções e o intervalo onde mora o θ, mas a maioria dos outros livros de Cálculo 2 que eu conheço não são – eles são meio porcalhões com esses detalhes... e a gente também vai ser, senão não vai dar tempo de cobrir o suficiente da matéria.

Desabreviando o $42 = 99$

Lembre que a nossa regra básica pra integral indefinida é esta aqui,

$$[\mathrm{II}] \;=\; \left(\int f'(x)\,dx = f(x)\right)$$

e eu usei ela pra demostrar isto aqui:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int 0\,dx & \overset{(1)}{=} & 42 \\ \displaystyle\int 0\,dx & \overset{(2)}{=} & 99 \\ 42 & \overset{(3)}{=} & 99 \end{array}$$

As justificativas são:
(1): por [II], com $f(x) = 42$
(2): por [II], com $f(x) = 99$
(3): por (1) e (2)

Se a gente desabreviar as contas da esquerda – como num dos primeiros slides – a gente obtém isto aqui:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 0\,dx & \overset{(4)}{=} & 42\big|_{x=a}^{x=b} \\ \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 0\,dx & \overset{(5)}{=} & 99\big|_{x=a}^{x=b} \\ 42\big|_{x=a}^{x=b} & \overset{(6)}{=} & 99\big|_{x=a}^{x=b} \end{array}$$

E agora a igualdade (6) é claramente verdade – confira!

O truque dos intervalos

Dê uma olhada nas primeiras páginas daqui:

Leit5p3 5.1. Antidiferenciação

O Leithold usa expressões como "num intervalo I", "para todo $x \in I$" e "definidas no mesmo intervalo" um montão de vezes. O truque de usar sempre intervalos resolve esse esse problema daqui super bem:

2fT24 Meme: expanding brain, versão ln

A minha definição preferida pra integral indefinida,

2fT23 Outra definição pra integral indefinida

também resolve o problema – de um modo bem mais simples, e que é suficiente pro tipo de conta que a gente tem que treinar em Cálculo 2.

MVI

A nossa fórmula pra mudança de variável na integral indefinida vai ser esta aqui:

$$[\text{MVI}] \;=\; \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du\right)$$

Dá pra demonstrar ela deste jeito,

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x)) \;=\; f(u) \;=\; \int f'(u)\,du$$

onde a primeira e a terceira igualdades são consequências do [II], e a igualdade do meio só vale se tivermos $u = g(x)$.

Os livros demonstram a [MVI] de um jeitos que eu nunca achei muito convincentes – ou fingindo que tudo é óbvio, ou "derivando tudo em x". As contas abaixo me ajudaram a entender o que acontece quando a gente "deriva tudo em x":

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Simplificando raizes quadradas

Na aula de 16/maio/2023 você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^k\,ds$ para qualquer valor de k. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\
& = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\
& = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\
& = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\
& = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}
\end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 2

(Obs: ainda não atualizei este slide!)

No final da aula de 28/set/2022 – veja a foto do quadro:

`http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=23`

nós vimos que a demonstração de que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ pode ser generalizada, e aí a gente obtém a "fórmula da derivada da função inversa", que eu chamei de [DFI]...

Essa generalização pode ser "especializada" pra obter outros casos particulares diferentes de $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

a) Faça o primeiro exercício que eu pus no quadro:

$$[\mathrm{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} = ?$$

b) Faça o segundo exercício do quadro:

$$[\mathrm{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = ?$$

c) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arctan.

d) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arcsec.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

(Obs: ainda não atualizei este slide!)

Cálculo C2 - 2023.1

Aula 15: Frações Parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links

Tanto o Leithold quanto o Daniel Miranda têm seções sobre frações parciais:

Leit9p24 (p.551) Seção 9.5
Miranda240 Seção 8.1: Frações parciais

Neste semestre eu vou considerar que frações parciais são principalmente uma desculpa pra gente aprender duas coisas: a) um jeito de lidar com polinômios que vai nos permitir fazer um montão de contas com polinômios ou de cabeça ou escrevendo muito pouco, e b) um caso que a gente precisa usar um pouquinho de Álgebra Linear – "resolver um sistema" – pra transformar uma integral complicada em outra mais simples.

Tem figuras manuscritas sobre a "notação de caixinhas pra polinômios" aqui: 2xQ26, 2yQ43, 2yQ106. Eu tentei fazer um programa pra typesettear essas figuras mas o resultado ficou feio – 2bT212 – e eu ainda não tive tempo de melhorá-lo.

A P1 vai ter uma questão em que você vai ter que resolver uma integral como essa aqui:

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,dx$$

A VR e a VS vão ter questões em que você vai ter que resolver integrais de "funções racionais impróprias", como isto aqui,

$$\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}\,dx$$

em que você vai precisar de divisão de polinômios com resto.

A integral do $\frac{1}{x}$

Lembre que:

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{II}] & = & \left(\int f'(x)\,dx \;=\; f(x) \right) \\
[\text{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x) \right) \\
[\text{DFI}] & = & \left(\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \\
 & = & 1 \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\
f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\
g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array} \right)
\end{array}
$$

e que eu estou usando uma definição pra integral indefinida na qual as duas igualdades abaixo são equivalentes:

$$
\begin{array}{rcl}
f(x) & = & \frac{d}{dx} g(x) \\
\int f(x)\,dx & = & g(x)
\end{array}
$$

Ou seja, pra mim o '$+C$' é opcional.

Me contaram que o Reginaldo dá errado pra quem não escreve o '$+C$', então se você for fazer C2 com ele no próximo semestre não esqueça o '$+C$'!!!

Exercício 1
Calcule a integral abaixo. Dica: $u = bx + c$.

$$\int \frac{a}{bx+c}\,dx$$

Temos:

$$
\begin{array}{rcl}
\exp(\ln(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\ln' x & \overset{(2)}{=} & 1/\exp'(\ln(x)) \\
 & \overset{(3)}{=} & 1/\exp(\ln(x)) \\
 & \overset{(4)}{=} & 1/x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(5)}{=} & f'(g(x))g'(x) \\
\frac{d}{dx} \ln(-x) & \overset{(6)}{=} & \ln'(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(7)}{=} & 1/(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(8)}{=} & 1/x \\
\ln|x| & \overset{(9)}{=} & \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
\frac{d}{dx} \ln|x| & \overset{(10)}{=} & \frac{d}{dx} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(11)}{=} & \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx} \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(12)}{=} & \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(13)}{=} & 1/x \\
1/x & \overset{(14)}{=} & \frac{d}{dx} \ln x \\
1/x & \overset{(15)}{=} & \frac{d}{dx} \ln(-x) \\
1/x & \overset{(16)}{=} & \frac{d}{dx} \ln|x| \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(17)}{=} & \frac{d}{dx} \ln x \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(18)}{=} & \frac{d}{dx} \ln(-x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(19)}{=} & \frac{d}{dx} \ln|x|
\end{array}
$$

Contas sem “vai um” e polinômios

Compare esta conta com números,

$$
\begin{array}{rl}
2773 & \underline{|\ 12\ \ } \\
\underline{-24} & \ 231 \\
37 & \\
\underline{-36} & \\
13 & \\
\underline{-12} & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
2400 &=& 200 \cdot 12 \\
360 &=& 30 \cdot 12 \\
12 &=& 1 \cdot 12 \\
2772 &=& 231 \cdot 12 \\
2773 &=& 231 \cdot 12 + 1
\end{array}
$$

Com esta conta com polinômios:

$$
\begin{array}{rl}
2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 & \underline{|\ \ x + 2\ \ } \\
\underline{-(2x^3 + 4x^2)} & \ 2x^2 + 3x + 1 \\
3x^2 + 7x & \\
\underline{-(3x^2 + 6x)} & \\
1x + 3 & \\
\underline{-(1x + 2)} & \\
1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x^3 + 4x^2 + 0x + 0 &=& (2x^2 + 0x + 0) \cdot (x + 2) \\
3x^2 + 6x + 0 &=& (3x + 0) \cdot (x + 2) \\
1x + 2 &=& 1 \cdot (x + 2) \\
2x^3 + 7x^2 + 7x + 1 &=& (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) \\
2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 &=& (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) + 1
\end{array}
$$

Exercício 2
Traduza a conta com polinômios da esquerda pra notação de caixinhas daqui: 2xQ26, 2yQ43.

Exercício 3
Traduza a conta abaixo pra notação de caixinhas:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5} \\
&= \frac{2(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{(x+3)4}{(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{2(x-5) + (x+3)4}{(x+3)(x-5)}
\end{aligned}
$$

Funções racionais

Exercício 4

Entenda a definição de "função racional própria" daqui – Miranda240 – e acrescente mais linhas nas contas do exercício 3 pra "simplificar" o resultado até ele virar uma "função racional própria". Faça isso tanto na notação usual quanto na notação de caixinhas.

Exercício 5

Entenda as contas do Exemplo 8.1 daqui – Miranda241 – e transforme a expressão abaixo numa função racional imprópria:

$$1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5}$$

Exercício 6

Isto aqui é verdade:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15}$$

mostre porquê "aumentando o nível de detalhe" – transforme a igualdade acima numa série de igualdades na qual cada passo seja bem fácil de verificar.

Exercício 7

Resolva:

a) $(A+B)x + (-5A+3B) = 9x + 11$

b) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{9x+11}{x^2-2x-15}$

c) $\dfrac{(A+B)x + (-5A+3B)}{x^2-2x-15} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

d) $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-5} = \dfrac{2x+7}{x^2-2x-15}$

e) $\displaystyle\int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2-2x-15}\,dx$

Exercício 8

(Bem trabalhoso, pra casa!)
Mostre como organizar a solução do (7f) em várias séries de igualdades fáceis de justificar, como no slide 3. Você pode precisar de algumas coisinhas em português, como na última página do PDF de 2022.2: 2fT137.

$\boxed{\text{Aviso:}}$ Todos os slides a partir daqui são antigos!
Assim que der eu vou fazer uma faxina neles
e deixar só o que ainda serve!!!

Exercício 1
Algumas consequências da regra da cadeia...

$$[\mathrm{RC}] \;=\; \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a) $g(x) = 2x$
b) $g(x) = 2x + 3$
c) $g(x) = x + 3$
d) $g(x) = x + 3,\ f(x) = \ln x$
e) $g(x) = -x$
f) $g(x) = -x,\ f(x) = \ln x$
g) $g(x) = -x + 200,\ f(x) = \ln x$

Exercício 2.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

Derivadas formais (de novo)
Todas estas igualdades são verdadeiras,
mas se tentarmos formalizar elas com
todos os detalhes vamos ver que várias delas
falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dx}\ln x &=& \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}\ln(-x) &=& \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}\ln|x| &=& \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x) \\ \int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x)+C \\ \int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x) \\ \int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x)+C \\ \int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|) \\ \int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|)+C \\ \int \frac{1}{x}\,dx &=& \begin{cases} \ln(-x)+C_1 & \text{quando } x<0, \\ \ln(x)+C_2 & \text{quando } x>0 \end{cases} \end{array}$$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x+5}=\frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)}+\frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$=\frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$=\frac{2x+10+4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$=\frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x+5}\right)\ \underset{\substack{\text{"apart"}\\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"}\\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}}\ \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 3.

a) $\mathsf{together}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)={\color{red}?}$

b) $\mathsf{together}\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}\right)={\color{red}?}$

c) $\mathsf{together}\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}\right)={\color{red}?}$

Exercício 4.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a)

a)
$$
\begin{aligned}
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&= \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
c &= A+B \\
d &= -Ab-Ba \\
e &= -a-b \\
f &= ab
\end{aligned}
$$

Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\begin{array}{l} \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f}\right) \begin{bmatrix} c{:=}A{+}B \\ d{:=}{-}Ab{-}Ba \\ e{:=}{-}a{-}b \\ f{:=}ab \end{bmatrix} \\ = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}\right), \end{array}$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{array}{rcl} c & = & A+B \\ d & = & -Ab-Ba \\ e & = & -a-b \\ f & = & ab \end{array}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5) = 0:$$

São:

$$\begin{array}{l} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] \;= \\ ((2-2)(2-5)=0) \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] \;= \\ ((5-2)(5-5)=0) \end{array}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 4: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10:$$

uma é $a = 2$ e $b = 5$, e a outra é $a = 5$ e $b = 2$.
Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.
A gente pode chutar que $a = 5$, $b = 2$, e que c, d, e, f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 4: item (c)
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o
"princípio por trás das frações parciais":

$$[\text{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251`
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\text{PFP}] \begin{bmatrix} a{:=}? \\ b{:=}? \\ A{:=}? \\ B{:=}? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 5.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2}\,dx \quad = \quad ?$$

Exercício 6.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.

Cálculo C2 - 2023.1

Aulas 15, 16 e 18: Somas de Riemann

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links

Leithold:
Leit5p35 (p.318) Figura 3
Leit5p36 (p.319) Figura 4
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

Miranda:
Miranda207 7.1 Áreas e somas de Riemann
Miranda212 7.2 Integral definida
Miranda217 7.3. Definição 3: Soma superior e inferior

Livro de Análise do Ross:
RossAp16 (p.269) The Riemann Integral

Vou (re)usar muito material destes PDFzinhos:
2fT60 2022.2, aulas 13, 14 e 16: Somas de Riemann
2fT89 2022.2, aula 19, 14 e 16: o TFC1 e o TFC2
2eT39 2022.1, aula 15: infs e sups

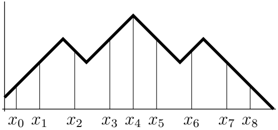
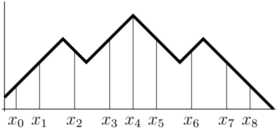
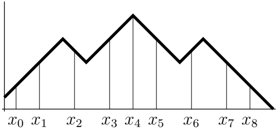
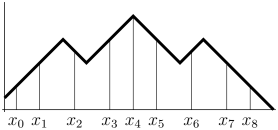
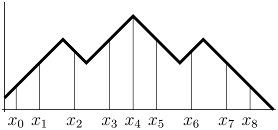
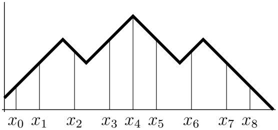
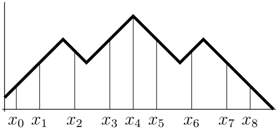
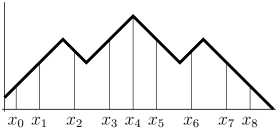
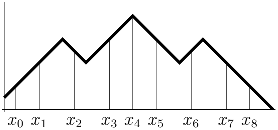
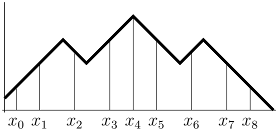
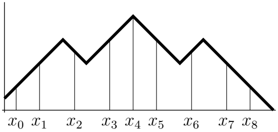
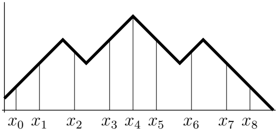
Algumas figuras importantes:
2eT95 A integral como limite
2fT91 Algumas definições: partição, inf e sup, integral

Montanhas

Seja $f(x)$ a função da próxima página – "as montanhas".
Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.
Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da $f(x)$.

Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios
comece expandindo ele em dois passos, como na página 7.

a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$
f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

Miranda: somas inferiores e superiores

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações $I(f,P)$ e $S(f,P)$, e lá no meio dessas definições ele define

$$\min_{x\in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \max_{x\in I} f(x)$$

usando o truque do "vire-se": ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja: Miranda217 (Definição 3)

Mais itens pra fazer na figura das montanhas

a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer
e verifique que na figura das montanhas temos:

$$\begin{array}{rcl} \max(f(x_1),f(x_2)) & \lneqq & \displaystyle\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \\ \displaystyle\min_{x\in[x_2,x_3]} f(x) & \lneqq & \min(f(x_2),f(x_3)) \end{array}$$

e depois represente nas montanhas:

b) $\sum_{i=1}^{8}(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

c) $\sum_{i=1}^{8}(\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

Aviso

As próximas páginas têm definições precisas de:
partição, inf e sup, [inf] e [sup], integral definida,
e um monte de definições intermediárias que a
gente vai precisar pra entender as definições
mais importantes...

O objetivo desta parte do curso é fazer vocês aprenderem um monte de truques pra entenderem definições complicadas "visualizando o que elas querem dizer". Estes truques vão ser uma das partes do curso que vão ser mais úteis pras matérias seguintes, mas esses assuntos vão valer bem poucos pontos na prova.

Partições, informalmente

Informalmente uma partição de um intervalo $[a,b]$ é um modo de decompor $[a,b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.
O caso geral da igualdade acima é:

$$[a,b] = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \ldots \cup [a_N,b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido ($i = 1, \ldots, N$)
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1, \ldots, N-1$

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i	I_i
1	2	3.5	$[2,3.5]$
2	3.5	4	$[3.5,4]$
3	4	6	$[4,6]$
4	6	7	$[6,7]$

corresponde à partição de $[2,7]$ do início deste slide.

Veja: Miranda212, Leit5p41 (p.324, seção 5.5).

Uma definição um pouco melhor de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$,
e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a,b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$ corresponde a:

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

Pra fazer a tradução da "versão conjunto" pra "versão tabela" ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0, \ldots, b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N. Depois que você tem a "versão tabela" é bem fácil obter a "versão união de intervalos".

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{N} f(b_i)\cdot(b_i - a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i)\cdot(b_i - a_i) \\
& = & f(b_1)\cdot(b_1 - a_1) \\
& + & f(b_2)\cdot(b_2 - a_2) \\
& = & f(4)\cdot(4 - 2.5) \\
& + & f(6)\cdot(6 - 4)
\end{array}$$

A definição de partição

Se P é um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$,
então podemos interpretar P como uma partição...
Por exemplo, se $P = \{200, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$
então $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$, e aí vamos interpretar
esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente –
como uma partição do intervalo $I = [a, b] = [20, 200]$ em
5 subintervalos ("$N = 5$"), assim:

$$\begin{array}{cccccccl}
20 & 33 & 42 & 63 & 99 & 200 & & \\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & I_1 = [a_1, b_1] \\
 & a_2 & b_2 & & & & & I_2 = [a_2, b_2] \\
 & & a_3 & b_3 & & & & I_3 = [a_3, b_3] \\
 & & & a_4 & b_4 & & & I_4 = [a_4, b_4] \\
 & & & & a_5 & b_5 & & I_5 = [a_5, b_5] \\
a & & & & & b & & I = [a, b] = [x_0, x_N]
\end{array}$$

As definições de inf e sup

Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$ —
e também $\inf(D)$ e $\sup(D)$, pra $D \subset \mathbb{R}$ —
desta forma:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\
C & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\
D & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\
D' & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\
L & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d \,\} \\
U & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y \,\} \\
(\alpha = \inf(D)) & = & \alpha \in L \land (\forall \ell \in L.\ \ell \leq \alpha) \\
(\beta = \sup(D)) & = & \beta \in U \land (\forall u \in U.\ \beta \leq u)
\end{array}$$

Algumas somas de Riemann

Vou definir:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}$$

Compare com: os exercícios das montanhas,
as páginas 208–210 do Miranda (Miranda208), e:
`https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann`

Nas duas últimas linhas o $f([a_i, b_i])$ é a imagem de um intervalo. Temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(A) & = & \{\, f(a) \mid a \in A \,\} \\
f(\{7,8,9\}) & = & \{\, f(a) \mid a \in \{7,8,9\} \,\} \\
& = & \{f(7), f(8), f(9)\}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
[a,b]_N & = & \{\, a+k(\frac{b-a}{N}) \mid k \in \{0,\dots,N\}\,\} \\
& = & \{a+0(\frac{b-a}{N}),\ a+1(\frac{b-a}{N}),\ \dots,\ a+N(\frac{b-a}{N})\} \\
& = & \{a,\ a+\frac{b-a}{N},\ a+2\frac{b-a}{N},\ a+3\frac{b-a}{N},\ \dots,\ b\} \\
\overline{\int}_P f(x)\,dx & = & [\sup]_P \\
& = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx & = & [\inf]_P \\
& = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i) \\
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx & = & \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \ \text{ existe}\right) & = & \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\right) \\
& = & \left(\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)} \\
& = & \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)}
\end{array}
$$

Exercícios sobre partições

a) Converta esta “partição”

$$[4,12] = [4,5] \cup [5,6] \cup [6,9] \cup [9,10] \cup [10,12]$$

para uma tabela. Neste caso quem são a, b e N?

b) Seja $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$.
Converta P para o “formato tabela” e para o “formato união de subintervalos”, que é este aqui:

$$[a,b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N].$$

c) Seja $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$.
Interprete P como uma partição. Diga quem são o N, o a e o b dela e monte a tabela dos subintervalos dela.

d) Seja $P = [2,4]_6$.
Diga quem são os pontos da partição P.

e) Seja $P = [2,5]_{2^3}$.
Diga quem são os pontos da partição P.

Uma dica sobre simplificação
No Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como

$$\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \ldots$$

do que como:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$$

Lembre destes trechos da Dica 7: 2gT4
“Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar”, e “Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal”.

Imagens de intervalos

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então em princípio a expressão $f(\{7,8,9\})$ deveria dar um erro, porque f é uma função que espera receber um número, e $\{7,8,9\}$ é um conjunto... mas aí normalmente a gente define que o comportamento da f quando ela recebe um conjunto vai ser este aqui:

$$f(A) \quad = \quad \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

A gente diz que $f(A)$ é a imagem do conjunto A.

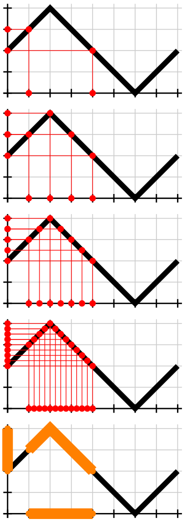
Algumas pessoas – como o Carlos, aqui: 2gT12 – acham que isto é sempre verdade:

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)].$$

Não seja como o Carlos!!! Seja como o Bob!!!

Nas figuras à direita temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(\{1,4\}) & = & \{f(1), f(4)\} \\
 & = & \{3,2\} \\
 & = & \{2,3\} \\
f(\{1,2,3,4\}) & = & \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\
 & = & \{2,3,4,3\} \\
 & = & \{2,3,4\} \\
f([1,4]) & = & [2,4] \\
[f(1), f(4)] & = & [3,2] \\
 & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid 3 \le y \le 2 \,\} \\
 & = & \emptyset \\
 & \neq & f([1,4])
\end{array}$$



Imagens de intervalos: exercício

Seja $f(x)$ esta função:

$f(x) =$ 

Calcule estas imagens de intervalos:

a) $f([0,1])$
b) $f([1,2])$
c) $f([0,2])$
d) $f([2,3])$
e) $f([1,3])$
f) $f([0,3])$
g) $f([0,4])$
h) $f([4,8])$
i) $f([0,8])$
j) $f([1,7])$

a') $f((0,1))$
b') $f((1,2))$
c') $f((0,2))$
d') $f((2,3))$
e') $f((1,3))$
f') $f((0,3))$
g') $f((0,4))$
h') $f((4,8))$
i') $f((0,8))$
j') $f((1,7))$

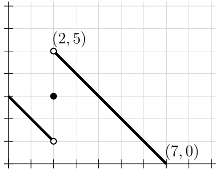
Dicas:

Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou "semi-abertos".

O Leithold define intervalos semi-abertos aqui: Leit1p7

Daqui a pouco nós vamos ver um modo de testar as respostas dos itens desse exercício, e um modo de resolver ele por chutar e testar... mas aguente um pouquinho!

Agora uma função descontínua

Sejam $f(x) =$ 

e $B = [1, 3]$.

Representente graficamente estes conjuntos —
as definições deles são as mesmas do slide 3:

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\ D & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\ D' & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\ L & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d \,\} \\ U & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y \,\} \end{array}$$

Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas dificílimas são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições "querem dizer".

As definições formais de "retângulo acima (ou abaixo) da curva" e "melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva" são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

“Para todo” (∀) e “existe” (∃)

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{F}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Repare...

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \quad x < 4) & = & \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad x = 6) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \vee x = 6) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F}
\end{array}$$

...que dá pra *visualizar* o que a expressão
$(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \vee x = 6)$
"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s
de expressões mais simples, e combinando
esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s.

Visualizando '$\forall$'s e '$\exists$'s (2)

Às vezes vai valer a pena definir proposições como nomes mais curtos, como $F(x) = (2 \leq x)$, $G(x) = (x \leq 4)$, $H(x) = (x = 6)$... Aí:

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad G(x)) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad\qquad H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\underline{\qquad})$ e $(\exists x \in A.\underline{\qquad})$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2, 10]$.

Visualizando '∀'s e '∃'s (3)

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:
O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: $\bullet$
O **F** é uma bolinha branca, ou oca: $\circ$

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\quad G(x)) & = & \bullet \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad\qquad H(x)) & = & \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ
\end{array}$$

Você pode fazer as suas próprias definições — como o meu "$\bullet :=$ **V** e $\circ :=$ **F**" acima — mas elas $\boxed{\text{têm}}$ que ficar claras o suficiente... releia a dica 7:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=3`

Instruções de desenho (explícitas)

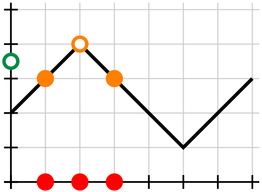
Sejam $f(x) =$  ,

e $P(y) \;=\; \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{\;x\;}_{\text{em }(x,0)}) < y}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,y)}$.

As anotações sob as chaves são “instruções de desenho” que o Bob vai usar pra calcular cada $P(y)$ de cabeça, e pra visualizar o que $P(y)$ “quer dizer”...

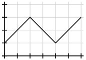
Na próxima página eu fiz as figuras pra $P(3.5)$.

$$
\begin{aligned}
P(3.5) &= \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)}) < 3.5}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(f(\underbrace{1}_{\text{em }(1,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(1,f(1))} \land \underbrace{(f(\underbrace{2}_{\text{em }(2,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(2,f(2))} \land \underbrace{(f(\underbrace{3}_{\text{em }(3,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(3,f(3))}}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em }(1,3)}) \land (\underbrace{4 < 3.5}_{\text{em }(2,4)}) \land (\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{\bullet}_{\text{em }(1,3)}) \land (\underbrace{\circ}_{\text{em }(2,4)}) \land (\underbrace{\bullet}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\circ}_{\text{em }(0,3.5)}
\end{aligned}
$$



Instruções de desenho: exercício

Sejam:

$$f(x) \quad = \quad$$  ,

$$\begin{array}{rcl} P(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) < y \ , \\ Q(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \leq y \ , \\ R(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \geq y \ , \\ S(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) > y \ , \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P'(y) & = & \forall x \in [3,5].f(x) < y \ , \\ Q'(y) & = & \forall x \in [3,5].f(x) \leq y \ , \\ R'(y) & = & \forall x \in [3,5].f(x) \geq y \ , \\ S'(y) & = & \forall x \in [3,5].f(x) > y \ . \end{array}$$

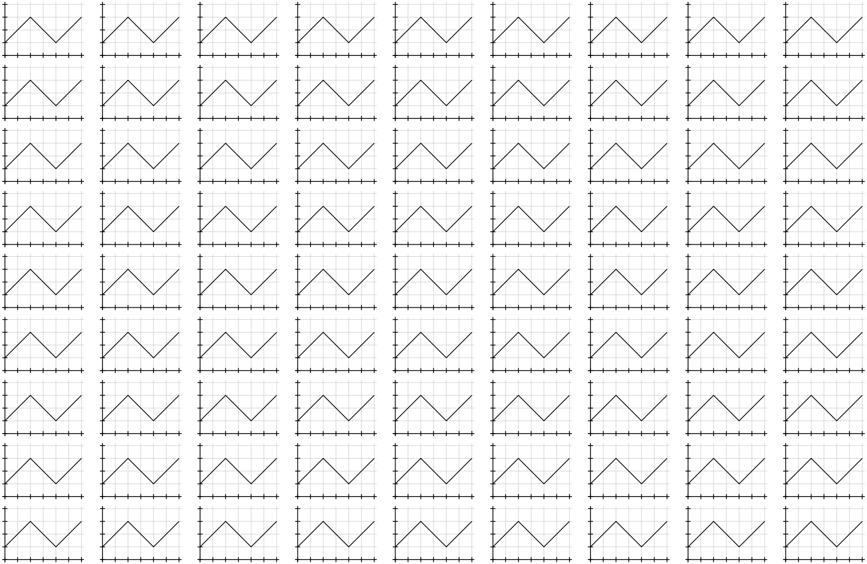
Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da $f(x)$ da próxima página, e dê o resultado dela.
Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a) $P(3.5), P(3.0), \ldots, P(0.5)$
b) $Q(3.5), Q(3.0), \ldots, Q(0.5)$
c) $R(3.5), R(3.0), \ldots, R(0.5)$
d) $S(3.5), S(3.0), \ldots, S(0.5)$

e) $P'(3.5), P'(3.0), \ldots, P'(0.5)$
f) $Q'(3.5), Q'(3.0), \ldots, Q'(0.5)$
g) $R'(3.5), R'(3.0), \ldots, R'(0.5)$
h) $S'(3.5), S'(3.0), \ldots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... veja este slide antigo:

2dT142 "E pra conjuntos infinitos?"



Instruções de desenho: outro exercício

A seção “Mais sobre bolinhas” daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29
tem dicas sobre como visualizar subconjuntos “definidos por proposições”, como este aqui:

$$\{\, x \in A \mid P(a) \,\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de A com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas “descrições mais simples” vão ser em notação de intervalos.

As funções $P, \ldots, S, P', \ldots, S'$ são as do exercício 8. O símbolo $\overline{\mathbb{R}}$ denota a “reta real estendida”:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ & = & (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\ & = & [-\infty, +\infty] \end{array}$$

Para mais detalhes, veja:
https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line

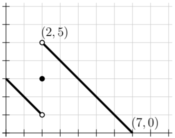
a) $\{\, y \in [0,3] \mid P(y) \,\}$
b) $\{\, y \in [0,3] \mid Q(y) \,\}$
c) $\{\, y \in [0,3] \mid R(y) \,\}$
d) $\{\, y \in [0,3] \mid S(y) \,\}$

a’) $\{\, y \in [0,3] \mid P'(y) \,\}$
b’) $\{\, y \in [0,3] \mid Q'(y) \,\}$
c’) $\{\, y \in [0,3] \mid R'(y) \,\}$
d’) $\{\, y \in [0,3] \mid S'(y) \,\}$

e) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid P(y) \,\}$
f) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid Q(y) \,\}$
g) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid R(y) \,\}$
h) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid S(y) \,\}$

i) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y) \,\}$
j) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y) \,\}$
k) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y) \,\}$
l) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y) \,\}$

Aproximações por cima e por baixo

Sejam $f(x) =$ 

e $P = \{1, 3, 4, 5\}$,
e por enquanto considere que:

$$\begin{array}{rcl} \sup(f(B)) & = & \max_{x \in B} f(x) \quad \text{e} \\ \inf(f(B)) & = & \min_{x \in B} f(x). \end{array}$$

Represente graficamente:

a) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$

b) $\underline{\int}_P f(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx$

d) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_2} f(x)\,dx$

e) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_4} f(x)\,dx$

Um jogo colaborativo

...ou: como debugar representações gráficas.
Pense num jogo colaborativo. Os jogadores se chamam P (“proponente”), e O (“oponente”). O P quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto A, e à primeira vista o O quer mostrar que o P está errado... mas na verdade o objetivo dos dois é fazer com que o P chegue numa representação gráfica que não tem erro nenhum.

Digamos que

$$A = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2),\ y \in [1,2) \,\}.$$

O P desenha uma representação gráfica com um nome diferente de A e “propõe” ela — por exemplo, o P diz isso aqui:

$A' =$ 

O oponente O diz: “verifica o ponto $(1,1)$”. Os dois verificam o ponto $(1,1)$ do A' e vêem que o desenho do A' é ambíguo no ponto $(1,1)$, já que esse é um ponto de fronteira e o P não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta “$(1,1) \in A'$?” não é nem **V** nem **F**, é “erro”, e portanto $A \neq A'$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha essa rodada, e o P tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o P propõe uma outra representação gráfica, com um outro nome, diferente de A e de A'. Por exemplo, P propõe isso aqui:

$A'' =$ 

O oponente O diz: “verifica o ponto $(0,0)$”. Os dois verificam, e vêem que:

$$(0,0) \notin A, \quad (0,0) \in A''$$

E portanto $A \neq A''$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha mais essa rodada.

Quando o P propõe um desenho que o O não consegue mostrar que está errado o P ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o P, vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o O. Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador P) e testá-las (fazendo o papel do jogador O vocês mesmos).

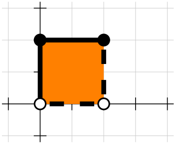
Um jogo colaborativo (2)

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2),\ y \in [1,2)\,\} \\ B & = & \{\,(x,2x) \mid x \in [1,2)\,\} \\ C & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \ \wedge\ x+y < 2\,\} \end{array}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar *regiões*.

Use bolinhas cheias pra indicar "este ponto pertence ao conjunto", bolinhas ocas pra indicar "este ponto não pertence ao conjunto", linhas grossas contínuas pra indicar "esse trecho da fronteira pertence ao conjunto" e linhas tracejadas pra indicar "esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto". Por exemplo:



Cálculo C2 - 2023.1

Dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

A P1 vai ter uma questão de derivar e integrar funções
no olhômetro, como essas daqui:
http://anggtwu.net/LATEX/2023-1-C2-carro.pdf

A P1 vai ter uma questão de "mostre que neste caso aqui a fórmula do TFC2 dá um resultado errado", como a questão 3 daqui: 2fT110. O gabarito dela está aqui: 2fT114.

A P1 vai ter uma questão de substituição trigonométrica em que o termo malvado vai ser da forma $\sqrt{1-s^2}$. O PDFzinho sobre isso é esse aqui,
http://anggtwu.net/LATEX/2023-1-C2-mudanca-de-variaveis.pdf
mas os quadros sobre isso têm algumas idéias importantes que eu ainda não LaTeXei. Link: 2gQ24.

Obs: a VR e VS vão ter questões de substituição trigonométrica com termos malvados mais complicados, mas a P1 não!!!

A P1 vai ter uma questão de "substituição não trigonométrica".

A P1 vai ter uma questão de frações parciais. O melhor modo de estudar pra ela é fazendo o exercício 8 da página 5 daqui,
http://anggtwu.net/LATEX/2023-1-C2-fracoes-parciais.pdf
que depende de todos os exercícios anteriores.

Cálculo 2 - 2023.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Questão 1
(Total: 2.5 pts)

Calcule:

$$\int s^3\sqrt{1-s^2}\,ds\ .$$

Questão 2
(Total: 2.5 pts)

Calcule a integral abaixo fazendo pelo menos duas mudanças de variável e teste o seu resultado:

$$\int \frac{\cos(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Questão 3
(Total: 2.5 pts)

Calcule e teste o seu resultado:

$$\int \frac{2x+3}{(x-4)(x+5)}\,dx\ .$$

Dicas:

1) Nestas questões o que vai contar mais pontos é você organizar as contas de modo que cada passo seja fácil de entender, de verificar, e de justificar – "chegar no resultado certo" vai valer relativamente pouco.

2) Recomendo que vocês usem o método das "caixinhas de anotações" nas mudanças de variável... numa caixinha de anotações a primeira linha diz a relação entre a variável nova e a antiga, todas as outras linhas são consequências da primeira, e dentro da caixinha de anotações você pode usar as gambiarras com diferenciais, como isto aqui: $dx = 42\,du$...

3) ...por exemplo:

$$\left[\begin{array}{c} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ \theta = \operatorname{arcsen} s \end{array}\right]$$

Questão 4
(Total: 1.5 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula" do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando $a = 1$, $b = 3$ e

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x < 2, \\ -x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

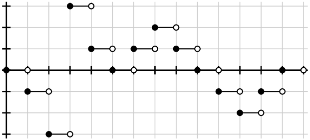
Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente $F(x)$ e $F'(x)$ e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

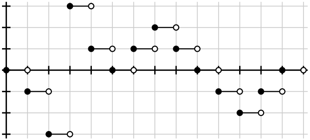
Questão 5
(Total: 1.0 pts)

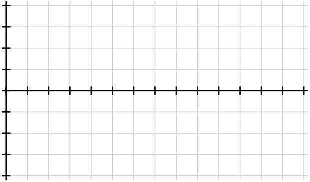
Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte. Seja

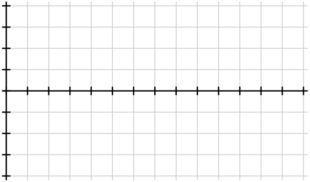
$$F(x) \;=\; \int_{t=5}^{t=x} f(t)\,dt.$$

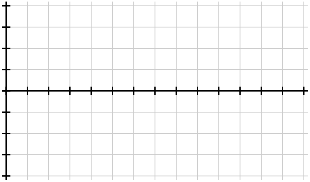
Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

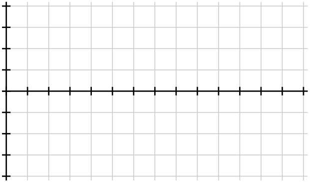












Questão 1: gabarito

$$
\begin{array}{rcl}
\int s^3\sqrt{1-s^2}\,ds &=& \int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)(\cos\theta)\,d\theta \\
&=& \int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^3\,d\theta \\
&=& \int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&=& \int c^2(1-c^2)(-1)\,dc \\
&=& \int c^2(c^2-1)\,dc \\
&=& \int c^4-c^2\,dc \\
&=& \frac{c^5}{5}-\frac{c^3}{3} \\
&=& \frac{(\cos\theta)^5}{5}-\frac{(\cos\theta)^3}{3} \\
&=& \frac{\sqrt{1-s^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c}
s=\operatorname{sen}\theta \\
s^2=(\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-s^2=(\cos\theta)^2 \\
\sqrt{1-s^2}=\cos\theta \\
\frac{ds}{d\theta}=\cos\theta \\
ds=\cos\theta\,d\theta
\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{c}
c=\cos\theta \\
\frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\
dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(-1)dc=\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(\operatorname{sen}\theta)^2=1-c^2
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{d}{ds}\left(\frac{\sqrt{1-s^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}\right) &=& \frac{1}{5}\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^5-\frac{1}{3}\frac{d}{ds}\sqrt{1-s^2}^3 \\
&=& \frac{1}{5}\frac{d}{ds}(1-s^2)^{5/2}-\frac{1}{3}\frac{d}{ds}(1-s^2)^{3/2} \\
&=& \frac{1}{5}\frac{5}{2}(1-s^2)^{3/2}\frac{d}{ds}(1-s^2)-\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}\frac{d}{ds}(1-s^2) \\
&=& \frac{1}{5}\frac{5}{2}(1-s^2)^{3/2}(-2s)-\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}(-2s) \\
&=& \frac{1}{5}\frac{5}{2}(-2)s(1-s^2)^{3/2}-\frac{1}{3}\frac{3}{2}(-2)s(1-s^2)^{1/2} \\
&=& -s(1-s^2)^{3/2}+s(1-s^2)^{1/2} \\
&=& -s(1-s^2)^{2/2}(1-s^2)^{1/2}+s(1-s^2)^{1/2} \\
&=& -s(1-s^2)(1-s^2)^{1/2}+s(1-s^2)^{1/2} \\
&=& (-s(1-s^2)+s)(1-s^2)^{1/2} \\
&=& (-s+s^3+s)(1-s^2)^{1/2} \\
&=& s^3\sqrt{1-s^2}
\end{array}
$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{\cos(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx & = & \int \cos(2+u)\,du \\
& = & \int \cos v\,dv \\
& = & \operatorname{sen} v \\
& = & \operatorname{sen}(2+u) \\
& = & \operatorname{sen}(2+\sqrt{x}) \\
\\
\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2+\sqrt{x}) & = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{d}{dx}(2+\sqrt{x}) \\
& = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{d}{dx}x^{1/2} \\
& = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{1}{2}x^{-1/2} \\
& = & \cos(2+\sqrt{x})\,\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
& = & \frac{\cos(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c}
u = \sqrt{x} = x^{1/2} \\
\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\
u^2 = x \\
x = u^2
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}
v = 2+u \\
dv = du \\
v-2 = u \\
u = v-2
\end{array}\right]$$

Questão 3: gabarito

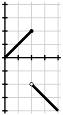
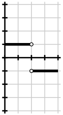
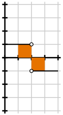
$$
\begin{array}{rcl}
\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} & = & \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} \\
 & = & \frac{A(x+5)}{(x-4)(x+5)} + \frac{B(x-4)}{(x-4)(x+5)} \\
 & = & \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} \\
 & = & \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)} \\
 & = & \frac{(A+B)x+(5A-4B)}{(x-4)(x+5)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x+3 & = & (A+B)x+(5A-4B) \\
A+B & = & 2 \\
5A-4B & = & 3 \\
A & = & 11/9 \\
B & = & 7/9
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{2x+3}{(x-4)(x+5)} & = & \frac{11/9}{x-4} + \frac{7/9}{x+5} \\
\int \frac{2x+3}{(x-4)(x+5)}\,dx & = & \int \frac{11/9}{x-4} + \frac{7/9}{x+5}\,dx \\
 & = & \frac{11}{9}\int \frac{1}{x-4}\,dx + \frac{7}{9}\int \frac{1}{x+5}\,dx \\
 & = & \frac{11}{9}\ln|x-4| + \frac{7}{9}\ln|x+5|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\left(\frac{11}{9}\ln|x-4| + \frac{7}{9}\ln|x+5|\right) & = & \frac{11}{9}\frac{1}{x-4} + \frac{7}{9}\frac{1}{x+5} \\
 & = & \frac{\frac{11}{9}(x+5)+\frac{7}{9}(x-4)}{(x-4)(x+5)} \\
 & = & \frac{(\frac{11}{9}+\frac{7}{9})x+(\frac{55}{9}-\frac{28}{9})}{(x-4)(x+5)} \\
 & = & \frac{2x+3}{(x-4)(x+5)}
\end{array}
$$

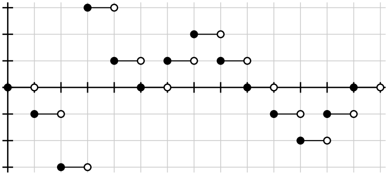
Questão 4: gabarito

$F(x) =$  $F'(x) =$  $\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx =$  $= 0$

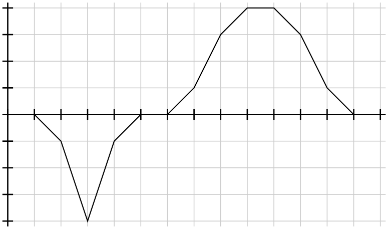
$$\underbrace{\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx}_{0} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)\big|_{x=1}^{x=3}}_{F(3)-F(1)}}_{(-3)-1}}_{-4}}_{\mathbf{F}}$$

Questão 5: gabarito

$$f(x) \;=$$



$$F(x) \;=\; \int_{t=5}^{t=x} f(t)\,dt \;=$$



Cálculo 2 - 2023.1

Aula 21: EDOs com variáveis separáveis.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

Links

Algumas figuras de campos de direções:
DiffyQsP27, Stew9p9, 2eT214

EDOs por chutar e testar:
2gT40, 2dT13

2dT293 Material sobre EDOVSs de 2021.2
2dT306 Slides sobre inversas de 2021.2
Leit7 Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

Questões sobre EDOVSs nas provas de 2022.2:
2fT123, 2fT126 P2, gabarito
2fT135, 2fT137 VS, anexo

ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2: Variáveis separáveis
Stew9p18 (p.618) 9.3: Separable equations

Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:
ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas
ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular
ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro "soluções implícitas", como $x^2 + y^2 = C$ or $x^2 + y^2 = 42$, e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em "soluções explícitas", em que y é uma função de x... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x = \sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_1(x) = \sqrt{C - x^2} \\
x = -\sqrt{C - x^2} & \Rightarrow & f_2(x) = -\sqrt{C - x^2} \\
x = \sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_3(x) = \sqrt{42 - x^2} \\
x = -\sqrt{42 - x^2} & \Rightarrow & f_4(x) = -\sqrt{42 - x^2}
\end{array}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das "soluções implícitas" pras "soluções implícitas", principalmente nos casos em que a gente tem "várias inversas"...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que $g_1(y) = \sqrt{y}$ e $g_2(y) = -\sqrt{y}$ são duas inversas diferentes para $f(x) = x^2$. Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: Leit7.

Inversas: um exemplo complicado
Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x+3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{array}{rcl} y &=& (x+3)^4+5 \\ y-5 &=& (x+3)^4 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& \sqrt[4]{(x+3)^4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& x+3 \\ -3+\sqrt[4]{y-5} &=& x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sqrt[4]{y-5} &=& -(x+3) \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ \sqrt[4]{y-5} &=& -x-3 \\ 3+\sqrt[4]{y-5} &=& -x \\ -(3+\sqrt[4]{y-5}) &=& x \end{array}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y-5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^{-}1(y) = -(3 + \sqrt[4]{y-5}).$$

Sabemos que $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$, e portanto:

$$\begin{array}{rcl} \alpha \geq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x+3 \geq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{(x^3)^4} = x+3 \\ x+3 \leq 0 &\Rightarrow& \sqrt[4]{(x^3)^4} = -(x+3) \end{array}$$

Ou seja, nas contas à esquerda se $x+3 \geq 0$ nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se $x+3 \leq 0$ nós temos que seguir o caminho da direita.
O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5\,\} \\ A_2 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5,\ x+3 \geq 0\,\} \\ A_3 &=& \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4+5,\ x+3 \leq 0\,\} \end{array}$$

Os conjuntos A_2 e A_3 são gráficos de funções inversíveis e A_1 é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são $\mathbb{R}$, $\{\,x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0\,\}$ e $\{\,x \in \mathbb{R} \mid x+3 \leq 0\,\}$ respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *E neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*

Cálculo 2 - 2023.1

Aula 23: EDOs lineares
com coeficientes constantes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

2aT1
BoyceDip3

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac & bc\\ ad & bd\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac+bd\end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix} \quad 1 = \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{pmatrix} \quad S-1 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1\\ & & & & -1\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix}f(1)\\ f(2)\\ f(3)\\ f(4)\\ f(5)\end{pmatrix} \quad Sf = \begin{pmatrix}f(2)\\ f(3)\\ f(4)\\ f(5)\\ 0\end{pmatrix} \quad (S-1)f = \begin{pmatrix}f(2)-f(1)\\ f(3)-f(2)\\ f(4)-f(3)\\ f(5)-f(4)\\ -f(5)\end{pmatrix}$$

Cálculo 2 - 2023.1

Aula nn: ponha o título aqui

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

2dT306 Slides sobre inversas de 2021.2

Cálculo 2 - 2023.1

Dicas pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.1-C2.html

As questões da prova

A P2 vai ter:

- Uma questão de somas de Riemann, valendo 1 ponto;
- Uma questão de volumes, valendo 1 ponto;
- Uma questão de EDOs com variáveis separáveis ("EDOVSs"),
- Uma questão de EDOs lineares com coeficientes constantes ("EDOLCCs").

As questões de EDOs provavelmente vão valer 4 pontos cada uma.

Nas questões sobre EDOs o jeito de escrever vai importar **MUITO**. Se vocês não usarem as partículas em português do jeito certo as respostas de vocês vai ficar ou erradas ou ambíguas, e:

> nessas questões toda vez que eu encontrar algo ambíguo eu VOU interpretar do jeito errado!!!

Lembre que PRA MIM um dos objetivos principais do curso de Cálculo 2 é fazer as pessoas aprenderem a escrever contas muito complicadas de um jeito que essas contas fiquem não só corretas como muito fáceis de entender e de revisar!!!

Releia estas dicas várias vezes:

2gT4 (p.3) "Releia a Dica 7"
2fT135, 2fT137

“Lembre que” e “queremos que”

Ainda não digitei isso!!!

Tem uma versão curtinha da explicação do truque do “lembre que” neste quadro aqui: 2gQ53

Dica 1: releia os capítulos que nós usamos no curso e encontre os lugares em que eles usam algo como o truque do “lembre que” pra usar alguma fórmula cuja demonstração é complicada sem precisar demonstrar ela de novo!

Dica 2: Procure também os lugares em que eles fazem algo como o “queremos que”!

Dica 3: leia também este slide:
2gT23 (p.22) Formal vs. coloquial

Dicas pras questões de EDOLCCs

Releia os quadros da aula de 23/jun/2023: 2gQ50.

As contas desses quadros têm alguns errinhos, você vai ter que corrigi-los!

Treine bastante as contas que mostram que e^{ix} e e^{-ix} são combinações lineares de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ e vice-versa e as contas que mostram que $e^{(\alpha+\beta i)x}$ e $e^{(\alpha-\beta i)x}$ são combinações lineares de $e^{\gamma x}\cos\delta x$ e $e^{\gamma x}\operatorname{sen}\delta x$ e vice-versa. Note que eu não estou dizendo qual é a relação entre α e β e γ e δ; você vai ter que descobrir.

Estude pelos livros!!!! Eles têm figuras que explicam porque algumas EDOLCCs "com raízes complexas" descrevem oscilações.

Em alguns itens do tipo "teste o seu resultado" algumas contas vão ficar **MUITO** mais curtas e fáceis de revisar se você souber definir funções intermediárias e souber usar o "seja" e o "então". Por exemplo, digamos que você precise calcular a quarta derivada de $e^{42x}\operatorname{sen} 99x$; essa conta fica muito mais fácil de fazer se você começar fazendo $f = e^{42x}$, $g = \operatorname{sen} 99x$ e $h = \cos 99x$. A maioria das pessoas faz de tudo pra evitar aprender a usar funções intermediárias, mas o Bob faz contas complicadas rápido porque ele sabe usar funções intermediárias muito bem! Seja como o Bob!

Treine o modo de encontrar as raízes de polinômios de 2º grau "simples" por chutar-e-testar, sem usar Bhaskara – "simples" aqui quer dizer "com raízes inteiras". Por exemplo,

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 6 \\ = \; & (x-a)(x-b) \\ = \; & x^2 - \underbrace{(a+b)}_{1}x + \underbrace{ab}_{-6} \end{aligned}$$

a	b	ab	$a+b$
-6	1	-6	-5
-3	2	-6	-1
-2	3	-6	1
-1	6	-6	5
1	-6	-6	-5
2	-3	-6	-1
3	-2	-6	1
6	-1	-6	5

Dá pra fazer algo parecido com equações de 2º grau cujas raízes são números complexos conjugados. Se $z = a+ib$ então $\overline{z} = a - ib$; tente expandir $(x-z)(x-\overline{z})$ e simplificar o resultado o máximo que você puder, e depois faça alguns exemplos em que a e b são inteiros pequenos e tente montar você mesmo um método como o da tabela ali de acima.

Dicas pra questão de volumes

Estude pelo Miranda