

Cálculo 4 - 2023.1

Segunda prova (P2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2023.1-C4.html>

Questão 1 (e única)**(Total: 10.0 pts)**

O objetivo desta questão é mostrar que esta igualdade

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dV$$

é verdadeira quando B é a esfera de raio 2 centrada na origem e:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y^3)\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\mathbf{j} + (z^3 + x^3)\mathbf{k}$$

- a) **(1.0 pts)** Calcule $\operatorname{div} F$.
 b) **(4.5 pts)** Calcule o lado esquerdo da igualdade.
 c) **(4.5 pts)** Calcule o lado direito da igualdade.

Algumas fórmulas:

$$(x, y, z) = \begin{aligned} &(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \\ &\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \\ &\rho \cos \varphi) \end{aligned} \quad (p.927)$$

$$\begin{aligned} dV &= dx \, dy \, dz \\ &= \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \end{aligned} \quad (p.929)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{F} \quad (p.979)$$

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA \quad (p.994)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (p.997)$$

$$\frac{\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{1}{a} \mathbf{r}(\varphi, \theta) \quad (p.998)$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (p.998)$$

$$= \iint_S \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA \quad (p.999)$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dV \quad (p.1008)$$

Algumas das fórmulas acima só fazem sentido no contexto certo. Você vai receber cópias de algumas páginas do Stewart (7ª ed) em português pra consulta; “(p.42)” quer dizer que aquela fórmula aparece na página 42.