Cálculo 2 - 2023.2

Aula 16: a função de Dirichlet

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

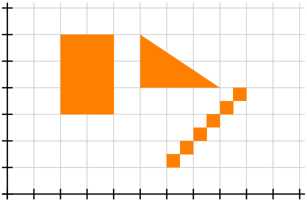
Links

2gQ39 (2023.1) Quadros da aula 19 (06/jun/2023)

Áreas no olhômetro

A partir daqui eu vou supor que todo mundo sabe calcular determinadas áreas "no olho" — contando quadradinhos, fazendo "base · altura" (pra retângulos), ou fazendo "(base · altura)/2" (pra triângulos)...

Tente calcular a área da figura abaixo de cabeça.
Se você não conseguir peça ajuda URGENTE!!!



A função de Dirichlet

A *função de Dirichlet* é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ela não tem um nome oficial, então
vamos chamá-la de 'f' nos próximos slides.

O gráfico dela alterna freneticamente entre $y = 0$ e $y = 1$.

Lembre que:
os números racionais são os cuja expansão decimal é "periódica", e os irracionais são os que não são assim; entre cada dois racionais diferentes há um irracional, e entre cada dois irracionais diferentes há um racional...

A função de Dirichlet (2)

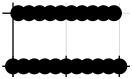
Lembre que podemos obter um irracional entre, digamos, $a = \frac{10}{7} = 1.42857\underline{142857}$ e $b = \frac{1285715}{900000} = 1.428572\underline{2}$, modificando a expansão decimal de um dele e trocando-a pela expansão decimal de $\sqrt{2}$ a partir de um certo ponto... Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2} & = & 1.41421356237... \\ b & = & 1.42857\underline{222222}... \\ c & = & 1.42857156237... \\ a & = & 1.42857\underline{142857}... \end{array}$$

Neste caso temos $a < c < b$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dá pra fazer algo parecido pra obter um racional entre dois irracionais.

A função de Dirichlet (3)

Dá pra desenhar o gráfico da função de Dirichlet assim:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} =$$ 

Repare que isso só funciona porque o desenho é claramente ambíguo... um leitor “normal” não consegue descobrir no olho quais são as coordenadas das bolinhas em $y = 1$ e em $y = 0$, então ele é obrigado a olhar pra definição formal da $f(x)$...

e aí quando ele entende a definição formal da $f(x)$ ele descobre que o desenho quer dizer “muitas bolinhas em $y = 1$, muito próximas umas das outras, e muitas bolinhas em $y = 0$ muito próximas das outras”...

...e ele entende que esse “muitas” quer dizer “infinitas”.

Exercício 19.
A função de Dirichlet é um dos exemplos mais simples de uma função que não é integrável.

Sejam $f(x)$ a função de Dirichlet,
e $d_k = \underline{\overline{\int}}_{[0,1]_{2^k}} f(x)\,dx$.

a) Representе graficamente d_0, d_1, d_2, d_3.
b) Calcule no olhômetro o limite $\lim_{k\to\infty} d_k$.
(Dica: esse limite não dá zero...)

c) Represente graficamente $[\max]_{[0,1]_{2^2}}$ e $[\min]_{[0,1]_{2^2}}$.
(Dica: o método do máximo "não enxerga" os pontos com $y = 1$...)