Cálculo C2 - 2023.2

Aulas 6 e 7: integração por partes e exercícios de como estruturar contas e demonstrações

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

StewPtCap5p39 (p.360) 5.4 Integrais Indefinidas
StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
StewPtCap7p5 (p.420) 7.1 Integração por Partes

2hQ10 Quadros da aula 5 (3a, 05/set/2023)
2hQ12 Quadros da aula 6 (4a, 06/set/2023)
2hQ18 Quadros da aula 7 (2a, 11/set/2023)

2fT2 PDF de 2022.2 sobre o '[:=]'
2dT8 PDF de 2021.2 sobre o '[:=]' e justificativas
Leit2p15 (p.68): Dois exemplos de contas com justificativas

CalcEasy14:08 até 18:18: como o macaco deriva funções elementares
2fQ1 Quadros de 2022.2 sobre árvores

2fT23 Outra definição para integral indefinida
2fT26 Integração por partes em 2022.2: pedaços do quadro
2fT30 Exercícios pra casa

2gQ18 Quadros da aula 9 de 2023.1 (02/mai/2023)

Avisos

Dá pra acessar a P1 do semestre passado, e as dicas pra ela, aqui:

2gT107 (2023.1) Dicas pra P1
2gT109 (2023.1) P1

A P1 deste semestre vai ter pelo menos uma questão de integração por mudança de variável e vai ter uma questão de frações parciais. Ela não vai ter uma questão de integração por partes porque eu vou considerar que integração por partes é uma técnica de integração que serve principalmente pra preparar a gente pra aprender técnicas mais complicadas.
Vocês podem estudar técnicas de integração por estes dois capítulos do Stewart:

StewPtCap5 Integrais
StewPtCap7 Técnicas de integração

Depois vou colocar aqui os links pras seções mais importantes.

Segundo o cronograma no plano de curso era pra eu ter apresentado frações parciais na última aula (6/set), mas eu não consegui. A gente vai deixar pra aprender frações parciais depois de mudança de variável.

Estudem pelo livro!!! O que a gente vai ver nas próximas aulas são coisas que complementam o livro e que vão ajudar vocês a não errarem nas questões da prova.

Integração por partes: um exemplo

Lembre que o Mathologer diz no vídeo dele que o melhor modo da gente aprender Cálculo é começar escrevendo idéias que a gente acha que devem ser verdade, e depois a gente vê se elas dão resultados certos e se elas fazem sentido... e se fizerem sentido a gente tenta formalizar elas.

Ele também diz – a partir daqui, na "lombada número 1",

CalcEasy20:27

que a integral é a inversa da derivada, mas que $\int \cos x \, dx$ pode retornar tanto $\operatorname{sen} x$ quanto $42 + \operatorname{sen} x$. As contas à direita são bem improvisadas, mas como eu indiquei em cima que elas são só uma idéia que pode estar cheia de erros o "colega que seja menos meu amigo" não vai poder reagir deste jeito aqui...

2gT20

Exercício 0:
Calcule $\frac{d}{dx}(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x)$.

Idéia (que pode estar cheia de erros):

$$
\begin{array}{rcll}
(gh)' & \overset{(1)}{=} & g'h + gh' & \text{por [DProd]} \\
\int (gh)' \, dx & \overset{(2)}{=} & \int g'h + gh' \, dx & \\
gh & \overset{(3)}{=} & \int g'h + gh' \, dx & \\
 & \overset{(4)}{=} & \int g'h \, dx + \int gh' \, dx & \text{por [IISoma]} \\
gh & \overset{(5)}{=} & \int g'h \, dx + \int gh' \, dx & \text{por 3 e 4} \\
gh - \int g'h \, dx & \overset{(6)}{=} & \int gh' \, dx & \text{por 5} \\
\int gh' \, dx & \overset{(7)}{=} & gh - \int g'h \, dx & \text{por 6} \\
\int xe^x \, dx & \overset{(8)}{=} & xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
 & \overset{(9)}{=} & xe^x - \int e^x \, dx & \\
 & \overset{(10)}{=} & xe^x - e^x & \text{por } (e^x)' = e^x \\
\int xe^x \, dx & \overset{(11)}{=} & xe^x - e^x & \text{por 8, 9 e 10} \\
\int x^2 e^x \, dx & \overset{(12)}{=} & x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx & \text{por 7 com } \left[\begin{smallmatrix} g:=x^2 \\ h:=e^x \end{smallmatrix}\right] \\
 & \overset{(13)}{=} & x^2 e^x - 2 \int xe^x \, dx & \text{por [IIMC]} \\
 & \overset{(14)}{=} & x^2 e^x - 2\,(xe^x - e^x) & \text{por 11} \\
 & \overset{(15)}{=} & x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x &
\end{array}
$$

Três provas da regra da integral da soma

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Sejam:} & [\text{DSoma}] & = & ((f+g)' = f' + g')\,, \\
 & [\text{II}] & = & (\int f'\,dx = f)\,, \\
 & [\text{IISoma}] & = & (\int f+g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx) \\
\text{e:} & [\text{TFC1}] & = & \left(\left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' = f(x)\right)\,, \\
\text{Queremos ver que} & \int f+g\,dx & = & \int f\,dx + \int g\,dx.
\end{array}$$

Compare esta prova aqui, que é bem passo a passo
e que tem justificativas bem detalhadas,

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Digamos que} & F' & \overset{(1)}{=} & f & \\
\text{e} & G' & \overset{(2)}{=} & g. & \\
\text{Então} & (F+G)' & \overset{(3)}{=} & F'+G' & \text{por [DSoma]} \begin{bmatrix} f:=F' \\ g:=G' \end{bmatrix} \\
 & & \overset{(4)}{=} & f+G' & \text{por 1} \\
 & & \overset{(5)}{=} & f+g, & \text{por 2} \\
 & (F+G)' & \overset{(6)}{=} & f+g, & \text{por 3, 4 e 5} \\
 & \int f\,dx & \overset{(7)}{=} & \int F'\,dx & \text{por 1} \\
 & & \overset{(8)}{=} & F, & \text{por [II]} \begin{bmatrix} f:=F \\ f':=F' \end{bmatrix} \\
 & \int f\,dx & \overset{(9)}{=} & F, & \text{por 7 e 8} \\
 & \int g\,dx & \overset{(10)}{=} & \int G'\,dx & \text{por 2} \\
 & & \overset{(11)}{=} & G, & \text{por [II]} \begin{bmatrix} f:=G \\ f':=G' \end{bmatrix} \\
 & \int g\,dx & \overset{(12)}{=} & G, & \text{por 10 e 11} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(13)}{=} & \int (F+G)'\,dx & \text{por 6} \\
 & & \overset{(14)}{=} & F+G & \text{por [II]} \begin{bmatrix} f:=F+G \\ f':=(F+G)' \end{bmatrix} \\
 & & \overset{(15)}{=} & \int f\,dx + G & \text{por 9} \\
 & & \overset{(16)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 12} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(17)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 13, 14, 15, 16}
\end{array}$$

...com esta outra aqui,

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Digamos que} & F' & \overset{(1)}{=} & f & \\
\text{e} & G' & \overset{(2)}{=} & g. & \\
\text{Então} & (F+G)' & \overset{(3)}{=} & F'+G' & \text{por [DSoma]} \\
 & & \overset{(4)}{=} & f+g, & \text{por 1 e 2} \\
 & \int f\,dx & \overset{(5)}{=} & F, & \text{por 1 e [II]} \\
 & \int g\,dx & \overset{(6)}{=} & G, & \text{por 2 e [II]} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(7)}{=} & \int (F+G)'\,dx & \text{por 3 e 4} \\
 & & \overset{(8)}{=} & F+G & \text{por [II]} \\
 & & \overset{(9)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 5 e 6}
\end{array}$$

e com esta aqui:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{Sabemos que} & \left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' & \overset{(1)}{=} & f(x) & \text{por [TFC1]} \\
\text{e} & \left(\int_{t=a}^{t=x} g(t)\,dt\right)' & \overset{(2)}{=} & g(x). & \text{por [TFC1]} \\
\text{Sejam:} & F(x) & \overset{(3)}{=} & \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt, & \\
 & G(x) & \overset{(4)}{=} & \int_{t=a}^{t=x} g(t)\,dt. & \\
\text{Então:} & F' & \overset{(5)}{=} & f, & \text{por 1 e 3} \\
 & G' & \overset{(6)}{=} & g, & \text{por 2 e 4} \\
 & (F+G)' & \overset{(7)}{=} & F'+G' & \text{por [DSoma]} \\
 & & \overset{(8)}{=} & f+g, & \text{por 5 e 6} \\
 & \int f\,dx & \overset{(9)}{=} & F, & \text{por 5 e [II]} \\
 & \int g\,dx & \overset{(10)}{=} & G, & \text{por 6 e [II]} \\
 & \int f+g\,dx & \overset{(11)}{=} & \int (F+G)'\,dx & \text{por 7 e 8} \\
 & & \overset{(12)}{=} & F+G & \text{por [II]} \\
 & & \overset{(13)}{=} & \int f\,dx + \int g\,dx & \text{por 9 e 10.}
\end{array}$$

"Escreva as justificativas"

Lembre que eu chamei a regra da multiplicação por constante na derivada de [DMC] e a regra da soma na derivada de [DSoma]. Vou usar estes nomes curtos aqui pra regra da multiplicação por constante na integral indefinida e pra regra da soma na integral indefinida:

$$\begin{array}{rcl} [\text{IIMC}] & = & \left(\int cf\,dx = c\int f\,dx\right) \\ [\text{IISoma}] & = & \left(\int f+g\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx\right) \end{array}$$

Nos exercícios 1 e 2 abaixo o contexto vai ser este aqui:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Sejam:} & [\text{DMC}] & = & ((cf)' = cf')\,, \\ & [\text{II}] & = & \left(\int f'\,dx = f\right), \\ \text{e:} & [\text{TFC1}] & = & \left(\left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' = f(x)\right). \\ \text{Queremos ver que} & \int cf\,dx & = & c\int f\,dx. \end{array}$$

Exercício 1.
Escreva as justificativas "completas" de cada passo da demonstração abaixo – aliás, só dos passos que têm um "por ..." à direita. Uma justificativa "completa" é uma em que a gente diz as substituições, como aqui: [II] $\begin{bmatrix} f:=42h \\ f':=42h' \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcll} \text{Digamos que} & F' & \overset{(1)}{=} & f. & \\ \text{Então:} & \int F'\,dx & \overset{(2)}{=} & F, & \text{por ...} \\ & \int f\,dx & \overset{(3)}{=} & F, & \text{por ...} \\ & (cF)' & \overset{(4)}{=} & cF' & \text{por ...} \\ & & \overset{(5)}{=} & cf, & \text{por ...} \\ & (cF)' & \overset{(6)}{=} & cf, & \text{por ...} \\ & \int cf\,dx & \overset{(7)}{=} & \int (cF)'\,dx & \text{por ...} \\ & & \overset{(8)}{=} & cF & \text{por ...} \\ & & \overset{(9)}{=} & c\int f\,dx & \text{por ...} \\ & \int cf\,dx & \overset{(10)}{=} & c\int f\,dx & \text{por ...} \end{array}$$

Exercício 2.
Escreva as justificativas dos passos que têm um "por ..." na demonstração abaixo. Aqui você não precisa escrever as substituições – você pode escrever "por [II]" ao invés de "por [II] $\begin{bmatrix} f:=42h \\ f':=42h' \end{bmatrix}$".

$$\begin{array}{rrcll} \text{Sabemos que} & \left(\int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right)' & \overset{(1)}{=} & f(x) & \text{por ...} \\ \text{Seja} & F(x) & \overset{(2)}{=} & \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt. & \\ \text{Então:} & F' & \overset{(3)}{=} & f, & \text{por ...} \\ & (cF)' & \overset{(4)}{=} & cf, & \text{por ...} \\ & \int cf\,dx & \overset{(5)}{=} & cF & \text{por ...} \\ & & \overset{(6)}{=} & c\int f\,dx & \text{por ...} \end{array}$$

"Escreva as justificativas" (2)

É muito comum os livros escreverem demonstrações de um jeito super curto e super difícil de entender. As duas técnicas mais básicas pra gente decifrar essas demonstrações super curtas são 1) testar casos particulares e 2) reescrever elas com mais passos de modo que cada passo da versão expandida fique fácil de justificar. Nos exercícios desta página você vai exercitar a técnica (2).

Uma das fórmulas mais úteis – e mais difíceis de entender – de Cálculo 2 é essa aqui, a da mudança de variável na integral indefinida:

$$[\mathrm{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

Ela tem uma demonstração curta que eu levei mais de 20 anos pra entender e uma demonstração mais comprida em que os passos são bem mais fáceis de justificar. O Stewart e o Miranda mostram a demonstração curta nestas páginas daqui:

StewPtCap5p48 (p.369) 5.5 A Regra da Substituição
MirandaP189 6.2 Integração por substituição

e uma versão da demonstração mais comprida nestas páginas:

MirandaP230 7.6 Integração por Substituição na Integral Definida
StewPtCap5p51 (p.372) Regra da Substituição para as integrais definidas

Você vai precisar de muitos chutes e testes pra resolver os dois exercícios desta página, e você provavelmente não vai conseguir resolvê-los num dia só... mas eles vão te ajudar com questões que vão valer muitos pontos nas provas!

Exercício 3.
Reescreva a demonstração abaixo com mais passos e com justificativas completas; repare que nela está implícito que $F' = f$. Lembre que você pode acrescentar passos no início!

$$\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}$$

Exercício 4.
Faça a mesma coisa aqui:

$$\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x)) \\ & = & F(u) \\ & = & \int f(u)\,du \end{array}$$

Dica: refaça os exercícios 3 e 4 várias vezes em dias diferentes até você conseguir refazê-los sem errar muito e sem demorar muito... eles vão te ajudar a entender porque é que a gente não pode misturar a variável antiga e a nova na mesma integral. Releia esta história aqui, 2gT11, trate estes exercícios como exercícios de música, e seja como o Bob!

Um caso particular

$$\text{[MVD]} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVD]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVD]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$\text{[MVD4]} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(g(b)) - F(g(a)) \\ &=& F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(2b) - F(2a) \\ &=& F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& F(2b) - F(2a) \\ &=& F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$\text{[MVD4]} \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& (-\cos 2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& (-\cos 2b) - (-\cos 2a) \\ &=& (-\cos u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Um caso particular (2)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\int f(2x)\cdot 2\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x)) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& F(2x) \\ &=& F(u) \\ &=& \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& (-\cos 2x) \\ &=& (-\cos u) \\ &=& \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Outro caso particular

$$[\text{MVD}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVD}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx = \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVD4}] = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx & = & F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & F(x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & F(b^2) - F(a^2) \\ & = & F(u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx & = & (-\cos x^2)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos b^2) - (-\cos a^2) \\ & = & (-\cos u)\big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ & = & \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Outtro caso particular (2)

$$[\text{MVI}] = \left(\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\int f(x^2)\cdot 2x\,dx = \int f(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVI}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du \right)$$

$$[\text{MVI3}] = \left(\begin{array}{rcl} \int f(g(x))g'(x)\,dx &=& F(g(x)) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

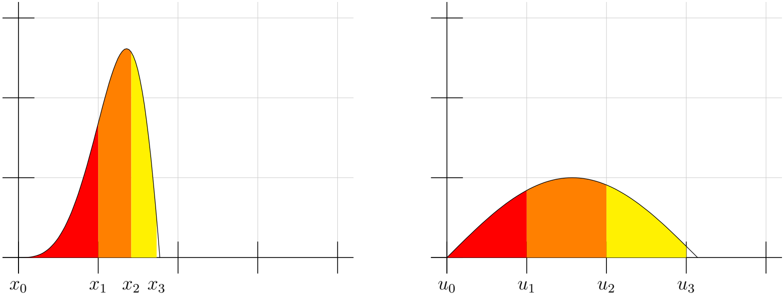
$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int f(x^2)\cdot 2x\,dx &=& F(x^2) \\ &=& F(u) \\ &=& \int f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx &=& F(x^2) \\ &=& F(u) \\ &=& \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{MVI3}]\begin{bmatrix} g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \\ f(u) := \operatorname{sen} u \\ F(u) := (-\cos u) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \int \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx &=& (-\cos x^2) \\ &=& (-\cos u) \\ &=& \int \operatorname{sen} u\,du \end{array} \right)$$

Uma figura pra mudança de variável

$$\begin{aligned} x^2 &= u \\ \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x \, dx &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u \, du \end{aligned}$$



O macaco e as contas formais

Na aula de 25/abril nós passamos muito tempo revendo coisas que deveriam ser básicas – já vou dizer quais – e eu passei um dever de casa bem grande: *leia o que você conseguir das seções do Miranda e do Leithold sobre a regra da cadeia e faça todos os exercícios que você puder.* Aqui tem links pra elas:

Miranda87 Seção 3.5: regra da cadeia
Miranda228 Seção 7.5.1: TFC2
Leit3p45 (p.181) Seção 3.6: regra da cadeia
Leit5p61 (p.344) Seção 5.8: Os teoremas fundamentais do Cálculo

Lembre que: 1) um dos objetivos do curso é fazer vocês se tornarem capazes de estudar pelos livros, 2) as provas vão ter várias questões que vocês só vão conseguir fazer se vocês tiverem muita prática de fazer contas, e 3) o livro do Leithold é difícil em alguns lugares mas ele é INCRIVELMENTE bom – estudem por ele sempre que puderem!

Outra coisa: dê uma olhada na seção do Miranda sobre a regra da cadeia – você vai ver que essa fórmula tem uma demonstração, e que a fórmula e a demonstração só funcionam quando certas hipóteses são obedecidas. Aliás, uma questão da P1 do semestre passado foi sobre situações em que a fórmula do TFC2 dá resultados errados. Dê uma olhada nela:

2fT110 A fórmula do TFC2 nem sempre vale

A P1 deste semestre vai ter uma questão parecida com essa.

Em algumas situações nós vamos primeiro aplicar a fórmula como se ela valesse sempre, e só depois que nós fizermos todas as contas nós vamos descobrir quais são as hipóteses necessárias pra aquelas contas valerem. O nome "oficial" pra essas contas sem a verificação das hipóteses é "contas formais", mas eu vou usar a terminologia do Mathologer... ele fala muito no macaco que faz contas automaticamente sem fazer a menor idéia do que aquelas contas querem dizer, então eu vou usar expressões como "aqui vamos fazer contas como o macaco".

Exercício
Use o que você lembra de Cálculo 1 pra obter boas fórmulas pras derivadas abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{d}{dx}\, e^{g(x)} \\ \text{b)} & \frac{d}{dx}\, g(x)^{1/2} \\ \text{c)} & \frac{d}{dx}\, \sqrt{g(x)} \\ \text{c)} & \frac{d}{dx}\, f(4x) \end{array}$$

No próximo slide nós vamos ver como o macaco faz esssas contas usando a operação '[:=]'.

Diferença

Lembre que esta notação aqui

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

tem várias pronúncias:
"a integral da função $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$",
"a área sob a curva $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$",
"a área sob a curva $f(x)$ desde $x = a$ até $x = b$",
etc...

A pronúncia desta operação daqui

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

vai ser "a diferença da $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$",
e a definição formal dela vai ser esta:

$$f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

Exercício
O Leithold e o Miranda usam notações ligeiramente diferentes da minha para a operação diferença. Dê uma olhada nestas páginas aqui,

Leit5p65 p.348
Miranda344

e traduza a expressão

$$(\sin 2x)\big|_{x=3}^{x=4}$$

da minha notação para

a) a notação do Miranda,
b) a notação do Leithold.

Integral indefinida

Tanto o Leithold quanto o Miranda explicam a *integral indefinida* antes da *integral definida*. Dê uma olhada:

Miranda181 6. Integral Indefinida
Miranda207 7. Integração definida
Leit5p3 (p.286) 5.1. Antidiferenciação
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida
StewPtCap5p40 (p.361) A primitiva mais geral de $1/x^2$

Todos os modos fáceis de atribuir um significado intuitivo para expressões como esta aqui

$$\int f(x)\,dx$$

são gambiarras que funcionam mal.

Eu vou usar esta definição aqui,

2fT23 (p.4) Outra definição para a integral indefinida

e aqui tem um caso em que a definição usual quebra:

2fT24 (p.5) Meme: expanding brain, versão ln

Nós vamos começar usando a integral indefinida como o macaco que faz contas sem ter idéia do significado do que está fazendo, e só depois que tivermos bastante prática nós vamos discutir os vários jeitos de atribuir significados intuitivos para

A regra básica vai ser esta aqui:

$$[\mathrm{II}] = \left(\int f'(x)\,dx = f(x)\right)$$

Exercícios

Calcule:

a) $[\mathrm{II}]\begin{bmatrix} f(x) := x+42 \\ f'(x) := 1 \end{bmatrix}$

b) $[\mathrm{II}]\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \end{bmatrix}$

c) Resolva os exercícios 1 a 10 daqui por chutar e testar:
Miranda185 Exercícios 6.1

d) Entenda tudo que esta nesta página:
Leit5p6 (p.289) 5.1.8. Teorema

Outra definição pra integral indefinida

O Leithold, e a maioria dos livros, usam uma definição bem complicada pra $\int 2x\,dx$... pra eles $\int 2x\,dx$ é o conjunto de todas as 'f's que obedecem isto aqui:

$$f'(x) = 2x$$

e x^2+C é o conjunto de todas as 'g's que são "da forma x^2+C" para algum $C \in \mathbb{R}$, e pra ele esta igualdade

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

quer dizer: o conjunto de funções $\int 2x\,dx$ é igual ao conjunto de funções x^2+C.

Nós vamos usar uma $\boxed{\text{outra definição}}$ pra igualdades como esta,

$$\int f(x)\,dx = g(x),$$

que é a seguinte: as três igualdades abaixo vão ser equivalentes pra nós,

$$\begin{array}{rcl} \int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\ \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\ f(x) & \overset{?}{=} & \frac{d}{dx}g(x) \end{array}$$

Essa tradução vai servir pra qualquer igualdade com integrais, e ela vai nos permitir testar facilmente se uma igualdade com integrais é verdadeira ou não. Por exemplo, digamos que o macaco integrador do Mathologer tem estas integrais na tabela de integrais dele:

$$\begin{array}{rcl} \int x\,dx & = & \frac{1}{2}x^2 + 3 \\ \int 2x\,dx & = & x^2 + 42 \end{array}$$

Então dá pra testar esta igualdade

$$\int 2x\,dx \quad = \quad 2\int x\,dx + 99$$

assim:

$$\begin{array}{rcl} \int 2x\,dx & \overset{?}{=} & 2\int x\,dx + 99 \\ \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\int 2x\,dx}_{x^2+42}}_{2x} & \overset{?}{=} & \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{(\underbrace{2\underbrace{\int x\,dx}_{\frac{1}{2}x^2+3}}_{x^2+6}+99)}_{x^2+105}}_{2x} \end{array}$$

ou seja, a igualdade acima é verdadeira — e a gente conseguiu testar isso usando números "concretos" ao invés de '$+C$'s! Yesss!!! =)

Meme: expanding brain, versão ln

Na definição do Leithold a fórmula
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ é FALSA!!!
A fórmula certa é a que aparece na quarta linha desse meme aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln x \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln|x| + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
\end{array}$$

Esse vídeo aqui mostra como é que o C_1 "ajusta a altura da parte esquerda" e o C_2 "ajusta a altura da parte direita" do gráfico:
http://www.youtube.com/watch?v=u4kex7hDC2o#t=5m25s

Integração por partes

Vou usar isto, de 2022.2:
2fT25 (p.6) Pedaços do quadro

E:
Leit9 9. Técnicas de integração
Leit9p4 (p.531) 9.1. Integração por partes
Miranda182 6.1.1 Regras Básicas de Integração
Miranda199 6.3 Integração por partes

Ainda não LaTeXei as contas desta aula!
Mas os quadros dela – os sobre integração por partes – estão aqui: 2gQ20.

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{TFC2}] & \overset{(1)}{=} & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(x)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
[\mathrm{TFC2}] \begin{bmatrix} f(x):=3 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(2)}{=} & \left(\int_{x=2}^{x=5} 0\,dx = 3\big|_{x=2}^{x=5}\right) \\
[\mathrm{TFC2}] \begin{bmatrix} f(x):=4 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(3)}{=} & \left(\int_{x=2}^{x=5} 0\,dx = 4\big|_{x=2}^{x=5}\right) \\
3\big|_{x=2}^{x=5} & \overset{(4)}{=} & \int_{x=2}^{x=5} 0\,dx \\
 & \overset{(5)}{=} & 4\big|_{x=2}^{x=5} \\
3\big|_{x=2}^{x=5} & \overset{(6)}{=} & 4\big|_{x=2}^{x=5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{II}] & \overset{(7)}{=} & \left(\int f'(x)\,dx = f(x)\right) \\
[\mathrm{II}] \begin{bmatrix} f(x):=3 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(8)}{=} & \left(\int 0\,dx = 3\right) \\
[\mathrm{II}] \begin{bmatrix} f(x):=4 \\ f'(x):=0 \\ a:=2 \\ b:=5 \end{bmatrix} & \overset{(9)}{=} & \left(\int 0\,dx = 4\right) \\
3 & \overset{(10)}{=} & \int 0\,dx \\
 & \overset{(11)}{=} & 4 \\
3 & \overset{(12)}{=} & 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
[\mathrm{IIMC}_2] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int cg'(x)\,dx & = & cg(x) \\ & = & c\int g'(x)\,dx \end{array} \right) \\
[\mathrm{IIMC}_1] & = & \left(\int cg'(x)\,dx \;=\; c\int g'(x)\,dx \right) \\
[\mathrm{IIMC}] & = & \left(\int ch(x)\,dx \;=\; c\int h(x)\,dx \right) \\
[\mathrm{IIMC}_2] \begin{bmatrix} g(x) := \int_{t=a}^{t=x} h(x)\,dt \\ g'(x) := h(x) \end{bmatrix} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int ch(x)\,dx & = & c\left(\int_{t=a}^{t=x} h(x)\,dt\right) \\ & = & c\int h(x)\,dx \end{array} \right) \\
[\mathrm{IIMC}_2] \begin{bmatrix} g(x) := H(x) \\ g'(x) := h(x) \end{bmatrix} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int ch(x)\,dx & = & cH(x) \\ & = & c\int h(x)\,dx \end{array} \right) \\
[\mathrm{IIMC}_1] \begin{bmatrix} g(x) := H(x) \\ g'(x) := h(x) \end{bmatrix} & = & \left(\int ch(x)\,dx \;=\; c\int h(x)\,dx \right) \\
[\mathrm{IIMC}_1] \begin{bmatrix} g'(x) := h(x) \end{bmatrix} & = & \left(\int ch(x)\,dx \;=\; c\int h(x)\,dx \right)
\end{array}
$$

StewPtCap5p33 (p.354): $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

StewPtCap5p39 (p.360): $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \,\Big]_a^b$

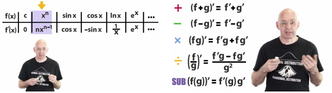
Propriedades da integral indefinida

StewPtCap5p40 (p.361) Propriedades da integral indefinida

Contas fáceis e difíceis

CalcEasy14:21 O macaco derivador
As regras de derivação têm uma direção
As primeiras técnicas de integração que nós vamos ver usam "contas fáceis", mas depois a gente vai ver mudança de variáveis, que as pessoas acham "muito difícil".

aaa



$$\begin{array}{rrcl}
1. & c' & \Rightarrow & 0 \\
2. & (x^n)' & \Rightarrow & nx^{n-1} \\
3. & \operatorname{sen} x & \Rightarrow & \cos x \\
4. & \cos x & \Rightarrow & -\operatorname{sen} x \\
5. & \ln x & \Rightarrow & \frac{1}{x} \\
6. & e^x & \Rightarrow & e^x \\
\\
7. & (f+g)' & \Rightarrow & f'+g' \\
8. & (f-g)' & \Rightarrow & f'-g' \\
9. & (fg)' & \Rightarrow & f'g+fg' \\
10. & \left(\frac{f}{g}\right)' & \Rightarrow & \frac{f'g-fg'}{g^2} \\
11. & (f(g))' & \Rightarrow & f'(g)g'
\end{array}$$