Cálculo 2 - 2023.2

Aulas ? até ?: Somas de Riemann

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C2.html

Links

Umas figuras (minhas) que mostram como
definir a integral como dois limites:
2eT95 A integral como limite

Alguns slides da introdução ao curso:
2hT11 Atirei o pau no gato - tempo infinito
2hT12 Imagens de intervalos

Stewart:
StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Miranda:
Miranda207 7.1 Áreas e somas de Riemann
Miranda212 7.2 Integral definida
Miranda213 marcas
Miranda217 7.3. Definição 3: Soma superior e inferior

Leithold:
Leit5p35 (p.318) Figura 3
Leit5p36 (p.319) Figura 4
Leit5p41 (p.324) 5.5. A integral definida

Livro de Análise do Ross:
RossAp16 (p.269) The Riemann Integral

Quadros de 2023.2:
2hQ39 Quadros da aula 13 (25/set/2023)

Vou (re)usar muito material destes PDFzinhos:
2fT60 2022.2, aulas 13, 14 e 16: Somas de Riemann
2fT89 2022.2, aula 19, 14 e 16: o TFC1 e o TFC2
2eT39 2022.1, aula 15: infs e sups

Quadros de 2023.1:
2gQ32 Quadros da aula 15 (23/maio/2023)
2gQ34 Quadros da Aula 16 (26/maio/2023)
2gQ37 Quadros da Aula 18 (02/junho/2023)
2gQ39 Quadros da Aula 19 (06/junho/2023)

Spoiler: descontinuidades

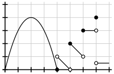
Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da f,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da f", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \quad = \quad \{\, x\in[a,b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "f tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "f tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \;\; \text{é um conjunto finito}$$

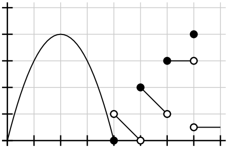
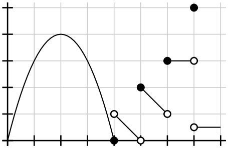
O conjunto vazio é finito, então toda f contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
2dT104 (2021.2) A função de Dirichlet
tem infinitas descontinuidades.

Spoiler: descontinuidades (2)

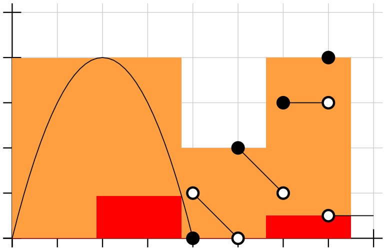
Sejam

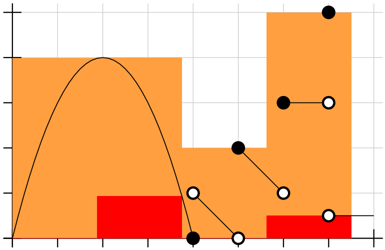
$f(x) =$  e $g(x) =$  .

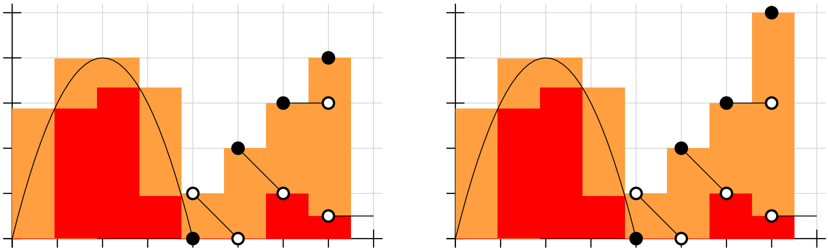
As figuras dos próximos slides mostram

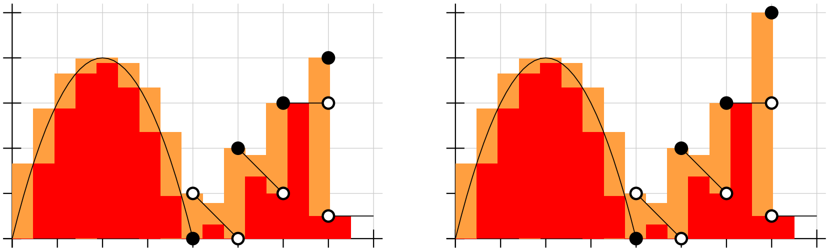
$$\overline{\int}_{[0,7.5]_{2^k}} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \overline{\int}_{[0,7.5]_{2^k}} g(x)\,dx$$

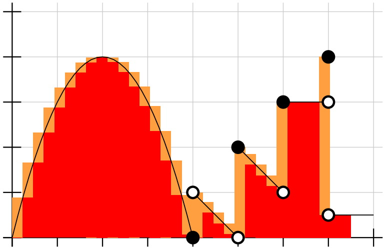
para vários valores de k. Use-as pra entender porque "na integral as descontinuidades não importam" — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

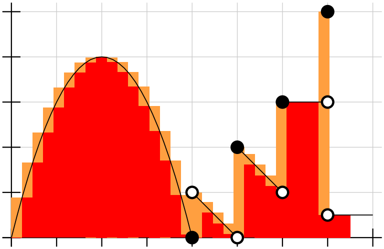


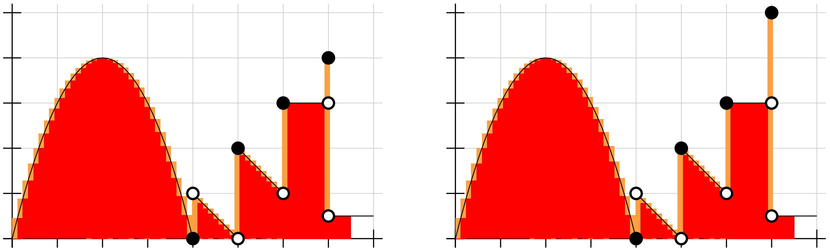


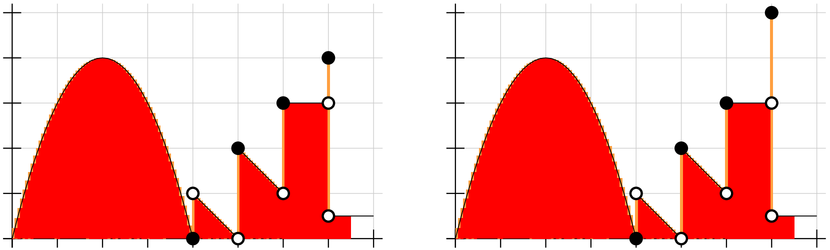










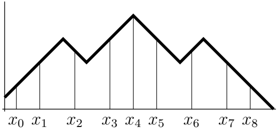


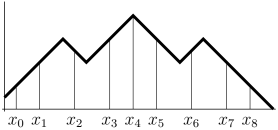
Montanhas

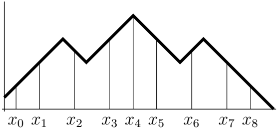
Seja $f(x)$ a função da próxima página – “as montanhas”.
Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.
Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da $f(x)$.

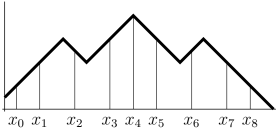
Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios
faça ele em vários passos, como nestes slides:
2fT65 Somatórios
2gT85 Partições, informalmente

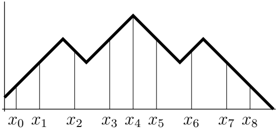
a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$
f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$

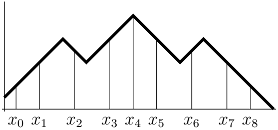

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

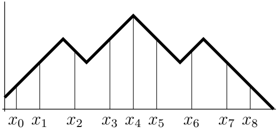

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

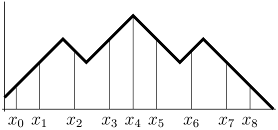

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

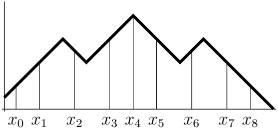

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

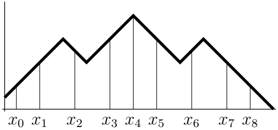

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

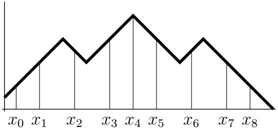

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

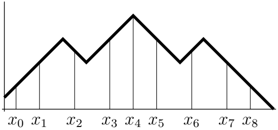

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

Miranda: somas inferiores e superiores

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações $I(f,P)$ e $S(f,P)$, e lá no meio dessas definições ele define

$$\min_{x\in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \max_{x\in I} f(x)$$

usando o truque do "vire-se": ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja: Miranda217 (Definição 3)

Mais itens pra fazer na figura das montanhas

a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer
e verifique que na figura das montanhas temos:

$$\begin{array}{rcl} & & \max(f(x_1), f(x_2)) \quad < \quad \max_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \\ \min_{x\in[x_2,x_3]} f(x) & < & \min(f(x_2), f(x_3)) \end{array}$$

e depois represente nas montanhas:

b) $\sum_{i=1}^{8}(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

c) $\sum_{i=1}^{8}(\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

Partições, informalmente

Informalmente uma partição de um intervalo $[a,b]$ é um modo de decompor $[a,b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco. O caso geral da igualdade acima é:

$$[a,b] = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \ldots \cup [a_N,b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido ($i = 1,\ldots,N$)
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1,\ldots,N-1$

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i	I_i
1	2	3.5	$[2,3.5]$
2	3.5	4	$[3.5,4]$
3	4	6	$[4,6]$
4	6	7	$[6,7]$

corresponde à partição de $[2,7]$ do início deste slide.

Compare com:
Miranda212 7.2 Integral definida
Leit5p41 (p.324) 5.5 A integral definida
StewPtCap5p8 (p.329) somas superiores e inferiores
StewPtCap5p10 (p.331) pontos amostrais
StewPtCap5p16 (p.337) definição da integral definida

Uma definição um pouco melhor de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$, e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a,b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2,3.5,4,6,7\}$ corresponde a:

$$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$$

Pra fazer a tradução da "versão conjunto" pra "versão tabela" ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0,\ldots,b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N. Depois que você tem a "versão tabela" é bem fácil obter a "versão união de intervalos".

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5,4,6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5,4,6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{N} f(b_i)\cdot(b_i - a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i)\cdot(b_i - a_i) \\
& = & f(b_1)\cdot(b_1 - a_1) \\
& + & f(b_2)\cdot(b_2 - a_2) \\
& = & f(4)\cdot(4 - 2.5) \\
& + & f(6)\cdot(6 - 4)
\end{array}$$

A definição de partição

Se P é um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$,
então podemos interpretar P como uma partição...
Por exemplo, se $P = \{200, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$
então $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$, e aí vamos interpretar
esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente –
como uma partição do intervalo $I = [a, b] = [20, 200]$ em
5 subintervalos ("$N = 5$"), assim:

$$\begin{array}{cccccccl}
20 & 33 & 42 & 63 & 99 & 200 & & \\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & I_1 = [a_1, b_1] \\
& a_2 & b_2 & & & & & I_2 = [a_2, b_2] \\
& & a_3 & b_3 & & & & I_3 = [a_3, b_3] \\
& & & a_4 & b_4 & & & I_4 = [a_4, b_4] \\
& & & & a_5 & b_5 & & I_5 = [a_5, b_5] \\
a & & & & & b & & I = [a, b] = [x_0, x_N]
\end{array}$$

Exercícios sobre partições

a) Converta esta "partição"

$$[4,12] = [4,5] \cup [5,6] \cup [6,9] \cup [9,10] \cup [10,12]$$

para uma tabela. Neste caso quem são a, b e N?

b) Seja $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$.
Converta P para o "formato tabela" e para o "formato união de subintervalos", que é este aqui:

$$[a,b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N].$$

c) Seja $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$.
Interprete P como uma partição. Diga quem são o N, o a e o b dela e monte a tabela dos subintervalos dela.

d) Seja $P = [2,4]_6$.
Diga quem são os pontos da partição P.

e) Seja $P = [2,5]_{2^3}$.
Diga quem são os pontos da partição P.

Uma dica sobre simplificação
No Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como

$$\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \ldots$$

do que como:

$$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$$

Lembre destes trechos da Dica 7: 2gT4

"Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar", e "Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal".

Aviso

As próximas páginas têm definições precisas de: partição, inf e sup, [inf] e [sup], integral definida, e um monte de definições intermediárias que a gente vai precisar pra entender as definições mais importantes...

O objetivo desta parte do curso é fazer vocês aprenderem um monte de $\boxed{\textit{técnicas}}$ *pra entenderem definições complicadas "visualizando o que elas querem dizer". Estas técnicas vão ser uma das partes do curso que vão ser mais úteis pras matérias seguintes.*

Aparentemente cada um dos exercícios deste PDF tem um monte de "dicas" de como fazê-lo. A gente normalmente imagina que essas dicas sejam só sugestões de um modo de chegar até o resultado final, mas aqui não é bem assim...

Lembre que neste slide daqui, da "Introdução ao curso",

2hT22 Sobre aulas expositivas

eu falei em "músculos mentais diferentes". Essa idéia vai valer aqui também; por exemplo, nos slides sobre o "Jogo colaborativo" eu digo que é pro jogador P escrever as suas jogadas num determinado formato e pro jogador O escrever as suas respostas num outro formato, e digo que se o jogador P não entender imediatamente a resposta do jogador O é porque o jogador P tem que rever certos exercícios básicos de "set comprehensions"...

Escrever as jogadas exatamente nesses formatos vai exercitar uma série de músculos mentais bem específicos.

Aviso (2)

Quando a gente vê um artista do Cirque de Soleil fazendo um número de aéreos a gente reconhece imediatamente que ele tem uma coordenação motora absurda e que ele tá usando um monte de músculos que a gente nunca usou e um monte de outros músculos que a gente nem sabia que existiam...

Quando a gente vê uma pessoa que entende bem – *e que é capaz de explicar claramente* – cada detalhe de uma definição bizarramente complicada como essa daqui, que o Stewart fez altos malabarismos pra ela caber em 9 linhas,

StewPtCap5p16 (p.337)

é a mesma coisa, só que essa pessoa treinou músculos mentais. *Nos exercícios deste PDFzinho a gente vai treinar vários dos músculos mentais que essas pessoais mais usam – e pra isso a gente vai fazer devagar e por escrito e com desenhos muitas coisas que elas fazem de cabeça.*

Também dá pra comparar o que a gente vai fazer aqui com a historinha deste slide:

2hT11 Atirei o pau no gato

Algumas mudanças de nota no Atirei o pau no gato exigem que a gente levante uns dedos da flauta ao mesmo tempo que a gente abaixa outros... a gente só consegue aprender isso treinando muitas vezes muito devagar, e enquanto a gente não treina bastante o som fica horrível.

Um jogo colaborativo

...ou: como debugar representações gráficas.
Pense num jogo colaborativo. Os jogadores se chamam P ("proponente"), e O ("oponente"). O P quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto A, e à primeira vista o O quer mostrar que o P está errado... mas na verdade o objetivo dos dois é fazer com que o P chegue numa representação gráfica que não tem erro nenhum.

Digamos que

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2),\ y \in [1, 2) \,\}.$$

O P desenha uma representação gráfica com um nome diferente de A e "propõe" ela — por exemplo, o P diz isso aqui:

$A' =$ 

O oponente O diz: "verifica o ponto $(1, 1)$". Os dois verificam o ponto $(1, 1)$ do A' e vêem que o desenho do A' é ambíguo no ponto $(1, 1)$, já que esse é um ponto de fronteira e o P não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta "$(1, 1) \in A'$?" não é nem **V** nem **F**, é "erro", e portanto $A \neq A'$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha essa rodada, e o P tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o P propõe uma outra representação gráfica, com um outro nome, diferente de A e de A'. Por exemplo, P propõe isso aqui:

$A'' =$ 

O oponente O diz: "verifica o ponto $(0, 0)$". Os dois verificam, e vêem que:

$$(0, 0) \notin A, \quad (0, 0) \in A''$$

E portanto $A \neq A''$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha mais essa rodada.

Quando o P propõe um desenho que o O não consegue mostrar que está errado o P ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o P, vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o O. Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador P) e testá-las (fazendo o papel do jogador O vocês mesmos).

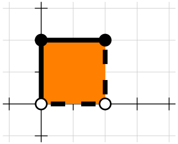
Um jogo colaborativo (2)

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[1,2),\ y\in[1,2)\,\} \\ B & = & \{\,(x,2x) \mid x\in[1,2)\,\} \\ C & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\ \wedge\ x+y<2\,\} \end{array}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar *regiões*.

Use bolinhas cheias pra indicar "este ponto pertence ao conjunto", bolinhas ocas pra indicar "este ponto não pertence ao conjunto", linhas grossas contínuas pra indicar "esse trecho da fronteira pertence ao conjunto" e linhas tracejadas pra indicar "esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto". Por exemplo:



Dica: se você não tem nenhuma prática com as duas notações da forma $\{\ldots \mid \ldots\}$ – por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} \{\,\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}} \mid \underbrace{a\ge 3}_{\text{filtro}}\,\} & = & \{3,4\} \\ \{\,\underbrace{10a}_{\text{expr}} \mid \underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}}\,\} & = & \{10,20,30,40\} \end{array}$$

então comece fazendo alguns exercícios daqui:

MpgP8 (até a p.12) Set Comprehensions

Todos os exercícios dessa parte do MPG dão conjuntos finitos, e os conjuntos A, B e C da coluna da esquerda são infinitos.

Imagens de intervalos

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então em princípio a expressão $f(\{7,8,9\})$ deveria dar um erro, porque f é uma função que espera receber um número, e $\{7,8,9\}$ é um conjunto... mas aí normalmente a gente define que o comportamento da f quando ela recebe um conjunto vai ser este aqui:

$$f(A) \quad = \quad \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

A gente diz que $f(A)$ é a imagem do conjunto A.

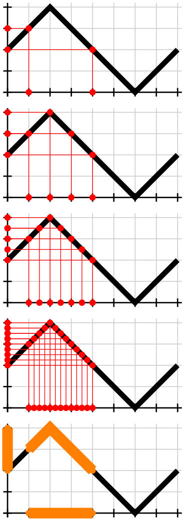
Algumas pessoas – como o Carlos, aqui: 2gT12 – acham que isto é sempre verdade:

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)].$$

Não seja como o Carlos!!! Seja como o Bob!!!

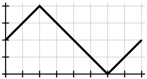
Nas figuras à direita temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(\{1,4\}) & = & \{f(1), f(4)\} \\
 & = & \{3,2\} \\
 & = & \{2,3\} \\
f(\{1,2,3,4\}) & = & \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\
 & = & \{2,3,4,3\} \\
 & = & \{2,3,4\} \\
f([1,4]) & = & [2,4] \\
[f(1), f(4)] & = & [3,2] \\
 & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid 3 \le y \le 2 \,\} \\
 & = & \emptyset \\
 & \ne & f([1,4])
\end{array}$$



Imagens de intervalos: exercício

Seja $f(x)$ esta função:

$f(x) =$ 

Calcule estas imagens de intervalos:

a) $f([0,1])$	a') $f((0,1))$
b) $f([1,2])$	b') $f((1,2))$
c) $f([0,2])$	c') $f((0,2))$
d) $f([2,3])$	d') $f((2,3))$
e) $f([1,3])$	e') $f((1,3))$
f) $f([0,3])$	f') $f((0,3))$
g) $f([0,4])$	g') $f((0,4))$
h) $f([4,8])$	h') $f((4,8))$
i) $f([0,8])$	i') $f((0,8))$
j) $f([1,7])$	j') $f((1,7))$

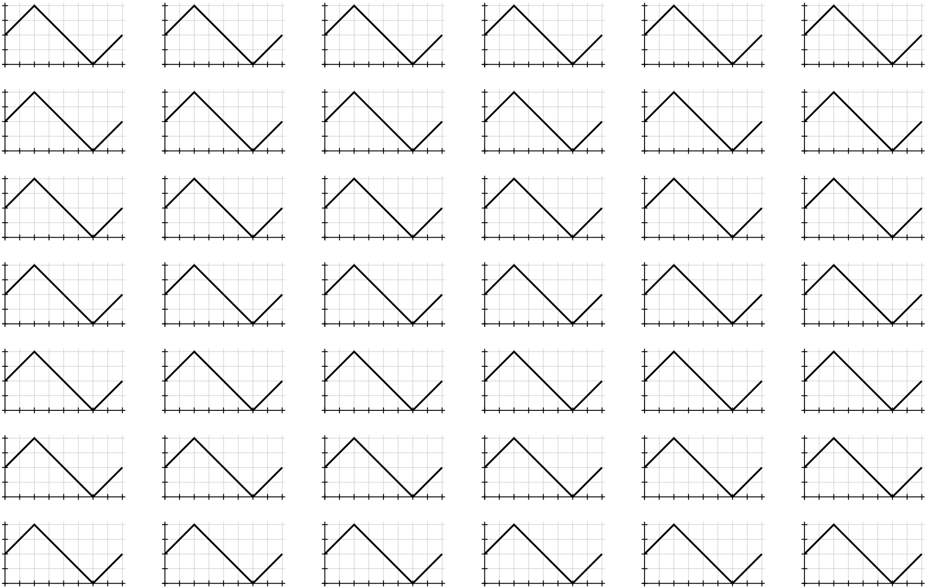
Dicas:

1) Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou "semi-abertos".

2) O Leithold define intervalos semi-abertos aqui: Leit1p7

3) Nos casos em que você tiver dificuldade de encontrar o $f(I)$ desenhe num gráfico só:

a função $f(x)$,
o conjunto I (no eixo x),
o conjunto $\{\,(x, f(x)))\mid x \in I\,\}$
(sobre o gráfico da f),
e o conjunto $f(I)$ (no eixo y).

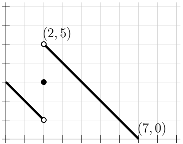


As definições de inf e sup

Digamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $B\subset\mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$ —
e também $\inf(D)$ e $\sup(D)$, pra $D\subset\mathbb{R}$ —
desta forma:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \\
C & = & \{\,(x,f(x))\mid x\in B\,\} \\
D & = & \{\,f(x)\mid x\in B\,\} \\
E & = & \{\,y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in B.\ f(x)=y\,\} \\
U & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ d\le y\,\} \\
L & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ y\le d\,\} \\
(\alpha=\sup(D)) & = & \alpha\in U\wedge(\forall u\in U.\ \alpha\le u) \\
(\beta=\inf(D)) & = & \beta\in L\wedge(\forall \ell\in L.\ \ell\le\beta)
\end{array}$$

Agora uma função descontínua

Sejam $f(x) =$ 

e $B = [1, 3]$.

Exercício

a) Represente graficamente estes conjuntos — as definições deles são as mesmas do slide anterior:

$$\begin{array}{rcl} C &=& \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\ D &=& \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\ E &=& \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\ U &=& \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y \,\} \\ L &=& \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d \,\} \end{array}$$

Dica pro L e pro U: desenhe o infinito perto, como aqui:

2eT40 Uma figura

Lembre que

$$\begin{array}{rcl} B &=& [1, 3] \\ D &=& f(B) \end{array}$$

e que definimos o inf e o sup desta forma:

$$\begin{array}{rcl} (\alpha = \sup(D)) &=& \alpha \in U \land (\forall u \in U.\ \alpha \leq u) \\ (\beta = \inf(D)) &=& \beta \in L \land (\forall \ell \in L.\ \ell \leq \beta) \end{array}$$

Isso é uma definição estranha e indireta... pode ser que a gente calcule $(42 = \inf(D))$ e $(99 = \inf(D))$ por ela e os dois dêem verdadeiro – se isso acontecer então $\inf(D)$ não vai um número!!!

Exercício (cont.)

Calcule:

b) $(6 = \sup(D))$
c) $(5 = \sup(D))$
d) $(4 = \sup(D))$
e) $(2 = \sup(D))$
f) $(1 = \sup(D))$
g) $(0 = \sup(D))$

“Para todo” ($\forall$) e “existe” ($\exists$)

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{F}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Dá pra *visualizar* o que a expressão

$$(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, 2 \leq x < 4 \vee x = 6)$$

"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s de expressões mais simples, e combinando esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s. E digamos que:

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & (2 \leq x), \\ G(x) & = & (x \leq 4), \\ H(x) & = & (x = 6) \end{array}$$

Então temos:

$$\begin{array}{rl} & (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, 2 \leq x < 4 \vee x = 6) \\ = & (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, (2 \leq x \wedge x < 4) \vee x = 6) \\ = & (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.\, (F(x) \wedge G(x)) \vee H(x)) \end{array}$$

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:
O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: $\bullet$
O **F** é uma bolinha branca, ou oca: $\circ$

Compare:

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. 2 \leq x) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \quad x < 4) & = & \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. 2 \leq x < 4) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad x = 6) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. F(x)) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \quad G(x)) & = & \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. F(x) \wedge G(x)) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad H(x)) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) & = & \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. F(x)) & = & \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \quad G(x)) & = & \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. F(x) \wedge G(x)) & = & \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad H(x)) & = & \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \\ (\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) & = & \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\_\_\_\_)$ e $(\exists x \in A.\_\_\_\_)$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2, 10]$.

Você pode fazer as suas próprias definições — como o meu "$\bullet = \mathbf{V}$ e $\circ = \mathbf{F}$" — mas elas têm que ficar claras o suficiente... releia isto:

2gT4 "Releia a Dica 7"

Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas dificílimas são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições "querem dizer".

As definições formais de "retângulo acima (ou abaixo) da curva" e "melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva" são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

Instruções de desenho (explícitas)

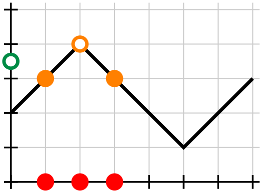
Sejam $f(x) =$  ,

e $$P(y) = \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{x}_{\text{em } (x,0)}) < y}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,y)}.$$

As anotações sob as chaves são "instruções de desenho" que o Bob vai usar pra calcular cada $P(y)$ de cabeça, e pra visualizar o que $P(y)$ "quer dizer"...

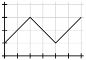
Na próxima página eu fiz as figuras pra $P(3.5)$.

$$\begin{aligned}
P(3.5) &= \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)}) < 3.5}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(f(\underbrace{1}_{\text{em }(1,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(1,f(1))} \;\land\; \underbrace{(f(\underbrace{2}_{\text{em }(2,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(2,f(2))} \;\land\; \underbrace{(f(\underbrace{3}_{\text{em }(3,0)}) < 3.5)}_{\text{em }(3,f(3))}}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em }(1,3)}) \;\land\; (\underbrace{4 < 3.5}_{\text{em }(2,4)}) \;\land\; (\underbrace{3 < 3.5}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{\bullet}_{\text{em }(1,3)}) \;\land\; (\underbrace{\circ}_{\text{em }(2,4)}) \;\land\; (\underbrace{\bullet}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,3.5)} \\
&= \underbrace{\circ}_{\text{em }(0,3.5)}
\end{aligned}$$



Instruções de desenho: exercício

Sejam:

$f(x) \quad = \quad$  ,

$$\begin{array}{rcl}
P(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) < y \ , \\
Q(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) \leq y \ , \\
R(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) \geq y \ , \\
S(y) & = & \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) > y \ ,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
P'(y) & = & \forall x \in [3,5]. f(x) < y \ , \\
Q'(y) & = & \forall x \in [3,5]. f(x) \leq y \ , \\
R'(y) & = & \forall x \in [3,5]. f(x) \geq y \ , \\
S'(y) & = & \forall x \in [3,5]. f(x) > y \ .
\end{array}$$

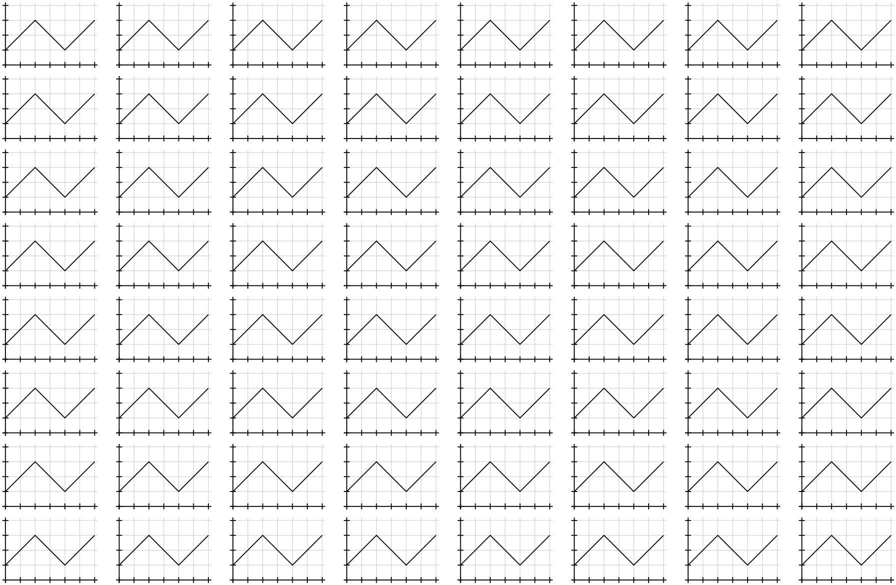
Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da $f(x)$ da próxima página, e dê o resultado dela.
Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a) $P(3.5), P(3.0), \ldots, P(0.5)$
b) $Q(3.5), Q(3.0), \ldots, Q(0.5)$
c) $R(3.5), R(3.0), \ldots, R(0.5)$
d) $S(3.5), S(3.0), \ldots, S(0.5)$

e) $P'(3.5), P'(3.0), \ldots, P'(0.5)$
f) $Q'(3.5), Q'(3.0), \ldots, Q'(0.5)$
g) $R'(3.5), R'(3.0), \ldots, R'(0.5)$
h) $S'(3.5), S'(3.0), \ldots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... veja este slide antigo:

2dT142 "E pra conjuntos infinitos?"



Instruções de desenho: outro exercício

A seção “Mais sobre bolinhas” daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29
tem dicas sobre como visualizar subconjuntos “definidos por proposições”, como este aqui:

$$\{\, x \in A \mid P(a) \,\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de A com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas “descrições mais simples” vão ser em notação de intervalos.

As funções $P, \ldots, S, P', \ldots, S'$ são as do exercício 8. O símbolo $\overline{\mathbb{R}}$ denota a “reta real estendida”:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ & = & (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\ & = & [-\infty, +\infty] \end{array}$$

Para mais detalhes, veja:
https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line

a) $\{\, y \in [0,3] \mid P(y) \,\}$
b) $\{\, y \in [0,3] \mid Q(y) \,\}$
c) $\{\, y \in [0,3] \mid R(y) \,\}$
d) $\{\, y \in [0,3] \mid S(y) \,\}$

a’) $\{\, y \in [0,3] \mid P'(y) \,\}$
b’) $\{\, y \in [0,3] \mid Q'(y) \,\}$
c’) $\{\, y \in [0,3] \mid R'(y) \,\}$
d’) $\{\, y \in [0,3] \mid S'(y) \,\}$

e) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid P(y) \,\}$
f) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid Q(y) \,\}$
g) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid R(y) \,\}$
h) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid S(y) \,\}$

i) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y) \,\}$
j) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y) \,\}$
k) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y) \,\}$
l) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y) \,\}$

Algumas somas de Riemann

Vou definir:

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}
$$

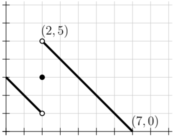
Compare com: os exercícios das montanhas,
as páginas 208–210 do Miranda (Miranda208), e:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

Nas duas últimas linhas o $f([a_i, b_i])$ é a imagem de um intervalo. Temos:

$$
\begin{array}{rcl}
f(A) & = & \{\, f(a) \mid a \in A \,\} \\
f(\{7,8,9\}) & = & \{\, f(a) \mid a \in \{7,8,9\} \,\} \\
 & = & \{f(7), f(8), f(9)\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
[a,b]_N &= \{\, a + k(\tfrac{b-a}{N}) \mid k \in \{0, \ldots, N\} \,\} \\
&= \{a + 0(\tfrac{b-a}{N}),\ a + 1(\tfrac{b-a}{N}),\ \ldots,\ a + N(\tfrac{b-a}{N})\} \\
&= \{a,\ a + \tfrac{b-a}{N},\ a + 2\tfrac{b-a}{N},\ a + 3\tfrac{b-a}{N},\ \ldots,\ b\} \\
\overline{\int}_P f(x)\,dx &= [\sup]_P \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx &= [\inf]_P \\
&= \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \ \text{ existe}\right) &= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\right) \\
&= \left(\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)} \\
&= \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)}
\end{aligned}
$$

Aproximações por cima e por baixo

Sejam $f(x) =$ 

e $P = \{1, 3, 4, 5\}$,
e por enquanto considere que:

$$\begin{array}{rcl} \sup(f(B)) & = & \max_{x \in B} f(x) \quad \text{e} \\ \inf(f(B)) & = & \min_{x \in B} f(x). \end{array}$$

Represente graficamente:

a) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$

b) $\underline{\int}_P f(x)\,dx$

c) $\underline{\overline{\int}}_P f(x)\,dx$

d) $\underline{\overline{\int}}_{[1,5]_2} f(x)\,dx$

e) $\underline{\overline{\int}}_{[1,5]_4} f(x)\,dx$