Cálculo 3 - 2023.2

Aula 17: funções homogêneas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2023.2-C3.html

Links

Primeiras definições

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{A}_k] & = & \big(f(\lambda x) = \lambda^k f(x)\big) \\ [\mathrm{B}_k] & = & \big(f(x_0+\lambda\Delta x) = \lambda^k f(x_0+\Delta x)\big) \end{array}$$

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* – abreviação: h.d.g.k – quando ela obedece isto,

$$\begin{array}{l} \forall x,\lambda\in\mathbb{R}.\ f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \\ \forall x,\lambda\in\mathbb{R}.\ [\mathrm{A}_k] \end{array}$$

onde a segunda linha é abreviação da primeira; e uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é *homogênea de grau k em x_0* – abreviação: h.d.g.k em x_0 – quando ela obedece esta condição,

$$\begin{array}{l} \forall x,\lambda\in\mathbb{R}.\ \big(f(x_0+\lambda\Delta x) = \lambda^k f(x_0+\Delta x)\big) \\ \forall \Delta x,\lambda\in\mathbb{R}.\ [\mathrm{B}_k] \end{array}$$

Vou definir $[\mathrm{A}_2]$ da forma óbvia:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{A}_2] & = & [\mathrm{A}_k][k:=2] \\ & = & \big(f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)\big) \end{array}$$

$[\mathrm{A}_0], [\mathrm{A}_1], [\mathrm{A}_3], \ldots, [\mathrm{B}_1], [\mathrm{B}_0], [\mathrm{B}_2], [\mathrm{B}_3], \ldots,$ etc, vão ser todos definidos da mesma forma.

Digamos que uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é homogênea de grau 2 (“h.d.g.2”). Então ela obedece todos os casos particulares de $[\mathrm{A}_2]$, incluindo estes aqui:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{A}_2]\left[\begin{smallmatrix}\lambda:=3\\ x:=4\end{smallmatrix}\right] & = & \big(f(3\cdot 4) = 3^2 f(4)\big) \\ & = & \big(f(12) = 9f(4)\big) \\ [\mathrm{A}_2]\left[\begin{smallmatrix}\lambda:=1/2\\ x:=12\end{smallmatrix}\right] & = & \big(f(\frac{1}{2}12) = (\frac{1}{2})^2 f(12)\big) \\ & = & \big(f(6) = \frac{1}{4}f(12)\big) \end{array}$$

...e aí se a gente souber o valor de $f(x)$ pra algum x a gente consegue descobrir $f(x)$ para todos os outros ‘x’zes!

Primeiras definições (2)

Lembre que definimos:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{A}_k] & = & \big(f(\lambda x) = \lambda^k f(x)\big) \\ [\mathrm{B}_k] & = & \big(f(x_0 + \lambda\Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)\big) \end{array}$$

e que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k* ("h.d.g.k") – quando ela obedece isto,

$$\forall x, \lambda \in \mathbb{R}.\ [\mathrm{A}_k]$$

E uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau k em x_0* ("h.d.g.k em x_0") quando ela obedece esta outra condição:

$$\forall \Delta x, \lambda \in \mathbb{R}.\ [\mathrm{B}_k]$$

Exercícios

a) Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.2 e que $f(4) = 32$. Descubra os valores de $f(x)$ para $x = 1, 2, 3, -4, 0, -1, -2, -3$.

b) Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.1 e que $f(4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{-4, \ldots, 4\}$.

c) Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.0 e que $f(4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{-4, \ldots, 4\}$.

d) Digamos que $x_0 = 10$, que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é h.d.g.1 em x_0, e que $f(10 + 4) = 32$. Faça uma tabela com os valores de $f(x)$ para $x \in \{10 - 4, \ldots, 10 + 4\}$.

Segundas definições

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{A}_k] & = & \big(f(\lambda x) = \lambda^k f(x)\big) \\
[\mathrm{B}_k] & = & \big(f(x_0 + \lambda\Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)\big) \\
[\mathrm{C}_k] & = & \big(g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x, y)\big) \\
[\mathrm{D}_k] & = & \left(\begin{array}{l} g(x_0 + \lambda\Delta x, y_0 + \lambda\Delta x) \\ = \lambda^k g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{array}\right)
\end{array}$$

As definições $[\mathrm{A}_k]$ e $[\mathrm{B}_k]$ são as mesmas de antes.

Vou dizer que uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau* k ("h.d.g.k") quando ela obedece isto,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 . \forall \lambda \in \mathbb{R}. \ [\mathrm{C}_k]$$

e vou dizer que uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *homogênea de grau* k ("h.d.g.k em (x_0, y_0)") quando ela obedece isto:

$$\forall (\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2 . \forall \lambda \in \mathbb{R}. \ [\mathrm{D}_k]$$

Por exemplo, se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é h.d.g.2 em $(10, 20)$ então ela obedece isto...

$$\begin{array}{l} g(10 + 5 \cdot 3, 20 + 5 \cdot 4) \\ = 5^2 g(10 + 3, 20 + 4) \end{array}$$

Você consegue ver quem são λ, Δx e Δy neste caso?

Exercício

a) Digamos que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é h.d.g.2 em $(10, 20)$ e que $g(10 + 3, 20 + 4) = 6$. Descubra os valores de

$$g(10 + \lambda \cdot 3, 20 + \lambda \cdot 4)$$

para $\lambda \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

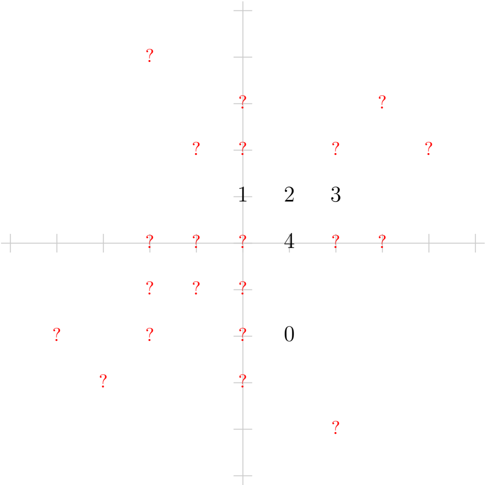
b) Faça a mesma coisa que no item anterior, mas supondo que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é h.d.g.1 em $(10, 20)$ ao invés de h.d.g.2 em $(10, 20)$.

c) Idem, mas agora supondo que a g é h.d.g.0 em $(10, 20)$.

Exercício 1

Na figura da direita cada numerozinho representa alguma coisa que *sabemos* sobre uma certa função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogênea de grau 1 e cada '?' representa alguma coisa que *queremos saber* sobre ela; por exemplo, o 5 na posição (2,1) quer dizer que sabemos que $g(2,1) = 5$ e o '?' na posição (4,2) quer dizer que você vai ter que descobrir o valor de $g(4,2)$ e escrever esse valor sobre a interrogação.

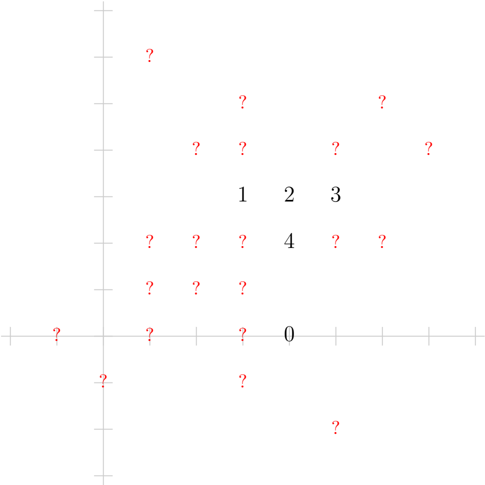
Complete a figura à direita escrevendo os valores certos sobre as interrogações.



Exercício 2

Na figura da direita cada numerozinho representa alguma coisa que *sabemos* sobre uma certa função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogênea de grau $\boxed{2}$ em $\boxed{(3,2)}$ – note que isto é bem diferente do exercício anterior! – e cada '?' representa alguma coisa que *queremos saber* sobre ela; por exemplo, o 5 na posição $(3+2, 2+1)$ quer dizer que sabemos que $g(3+2,2+1) = 5$ e o '?' na posição $(3+4,3+2)$ quer dizer que você vai ter que descobrir o valor de $g(3+4,3+2)$ e escrever esse valor sobre a interrogação.

Complete a figura à direita escrevendo os valores certos sobre as interrogações.



Polinômios homogêneos

Normalmente a gente começa a ouvir falar de funções homogêneas por polinômios homogêneos, que são polinômios que todos os monômios deles têm o mesmo grau... por exemplo,

$$2x^3y^4 + 5x^4y^3 - 6x^7$$

é um polinômio em duas variáveis, x e y, que é homogêneo de grau 7, porque x^3y^4, x^4y^3, e x^7 são monômios de grau 7. Qualquer polinômio em duas variáveis pode ser decomposto em polinômios homogêneos; por exemplo:

$$\begin{array}{rcll}
F(x,y) & = & a & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 0} \\
& + & bx + cy & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 1} \\
& + & dx^2 + exy + fy^2 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 2} \\
& + & gx^3 + hxy^2 + jx^2y + ky^3 & \leftarrow \text{parte homogênea de grau 3} \\
& + & \ldots &
\end{array}$$

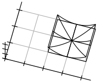
Repare que fica implícito que $a, b, \ldots, k, \ldots$ são constantes.
Veja estas páginas da Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial
https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function

Nas figuras da próxima página a coluna da esquerda mostra vários polinônomios h.d.g.2 $\boxed{\text{em } (3,2)}$.

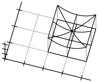
Δx^2

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$



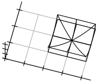
$2 + \Delta x^2$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}$$



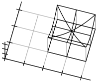
Δy^2

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$



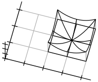
$2 + \Delta y^2$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$



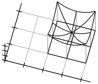
$\Delta x^2 + \Delta y^2$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}$$



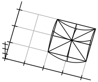
$2 + \Delta x^2 + \Delta y^2$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{array}$$



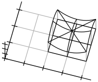
$\Delta x^2 - \Delta y^2$

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}$$



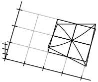
$2 + \Delta x^2 - \Delta y^2$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}$$



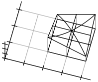
$\Delta x \cdot \Delta y$

$$\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$



$2 + \Delta x \cdot \Delta y$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$



```
(%i1) /* f:R->R, homogeneous of degree k */
      f(x) := a * x^k;
(%o1)
```

$$f\left(x\right) := a\,x^{k}$$

```
(%i2) f(x0);
(%o2)
```

$$a\,x_0^{k}$$

```
(%i3) f(m*x0);
(%o3)
```

$$a\,\left(m\,x_0\right)^{k}$$

```
(%i4) o  : f(m*x0) = m^k * f(x0);
(%o4)
```

$$a\,\left(m\,x_0\right)^{k}=a\,m^{k}\,x_0^{k}$$

```
(%i5) o2 : ratsimp(o);
(%o5)
```

$$a\,\left(m\,x_0\right)^{k}=a\,m^{k}\,x_0^{k}$$

```
(%i6) is(o);    /* false because "is" is dumb */
(%o6)
```

false

```
(%i7) is(o2);   /* true */
(%o7)
```

false

```
(%i8)
```

```
(%i8)   /* f:R^2->R, homogeneous of degree 2 */
(%i8)      f(   x,   y) := a*x^2 + b*x*y + c*y^2;
```

(%o8)

$$f(x,y) := a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2$$

```
(%i9)      f(  x0,  y0);
```

(%o9)

$$c\,y_0^2 + b\,x_0\,y_0 + a\,x_0^2$$

```
(%i10)      f(m*x0,m*y0);
```

(%o10)

$$c\,m^2\,y_0^2 + b\,m^2\,x_0\,y_0 + a\,m^2\,x_0^2$$

```
(%i11) o  : f(m*x0,m*y0) = m^2 * f(x0,y0);
```

(%o11)

$$c\,m^2\,y_0^2 + b\,m^2\,x_0\,y_0 + a\,m^2\,x_0^2 = m^2\,\left(c\,y_0^2 + b\,x_0\,y_0 + a\,x_0^2\right)$$

```
(%i12) o2 : ratsimp(o);
```

(%o12)

$$c\,m^2\,y_0^2 + b\,m^2\,x_0\,y_0 + a\,m^2\,x_0^2 = c\,m^2\,y_0^2 + b\,m^2\,x_0\,y_0 + a\,m^2\,x_0^2$$

```
(%i13) is(o2);   /* true */
```

(%o13)

true

```
(%i14)
```

```
(%i14)   /* f:R^2->R, homogeneous of degree 3 */
(%i14)      f(   x,   y) := a*x^3 + b*x^2*y + c*x*y^2 + d*y^3;
(%o14)
```

$$f(x, y) := a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3$$

```
(%i15)      f(  x0,  y0);
(%o15)
```

$$d\,y_0^3 + c\,x_0\,y_0^2 + b\,x_0^2\,y_0 + a\,x_0^3$$

```
(%i16)      f(m*x0,m*y0);
(%o16)
```

$$d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3$$

```
(%i17) o  : f(m*x0,m*y0) = m^3 * f(x0,y0);
(%o17)
```

$$d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3 = m^3\,\left(d\,y_0^3 + c\,x_0\,y_0^2 + b\,x_0^2\,y_0 + a\,x_0^3\right)$$

```
(%i18) o2 : ratsimp(o);
(%o18)
```

$$d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3 = d\,m^3\,y_0^3 + c\,m^3\,x_0\,y_0^2 + b\,m^3\,x_0^2\,y_0 + a\,m^3\,x_0^3$$

```
(%i19) is(o2);   /* true */
(%o19)
```

true

```
(%i20)
```

Exercício 5.
Relembre o que era o "estudo do sinal de uma função" que você deve ter visto em Cálculo 1, e faça um diagramas indicando em que intervalos cada uma das funções abaixo é positiva, negativa, ou zero.

Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo`

a) x
b) $x+1$
c) $x(x+1)$
d) $4-x$
e) $x(x+1)(4-x)$

Exercício 6.
Agora adapte essa idéia do diagrama do sinal para $\mathbb{R}^2$,
no quadrado com $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ e $y \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$,
e faça o diagrama do sinal para cada uma das funções abaixo.
Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:

`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo`

a) Δx
b) Δx^2
c) Δy
d) $\Delta x \Delta y$
e) $\Delta x + \Delta y$
f) $\Delta x - \Delta y$
g) $(\Delta x + \Delta y)^2$
h) $(\Delta x - \Delta y)^2$
i) $(\Delta x + \Delta y)(\Delta x - \Delta y)$
j) $(\Delta x + \Delta y)\Delta x$
k) $-(\Delta x + \Delta y)^2$

Exercício 7.
A partir de agora vamos considerar que:

$$\begin{array}{rcl}
x & = & x(t) \\
 & = & x(t_1) \\
 & = & x_0 + \alpha \cdot (t_1 - t_0) \\
 & = & x_0 + \alpha \Delta t \\
y & = & y(t) \\
 & = & y(t_1) \\
 & = & y_0 + \beta \cdot (t_1 - t_0) \\
 & = & y_0 + \beta \Delta t
\end{array}$$

Onde $t_0 = 5$; x_0 e y_0 continuam os mesmos de antes, e α e β são constantes cujos valores podem depender do contexto.

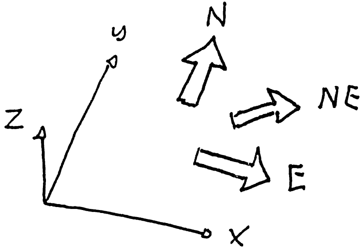
Exercício 7 (cont.)
A trajetória $(x(t), y(t))$ é sempre um movimento retilíneo uniforme pra quaisquer valores de α e β.

a) Calcule $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$.

Cada escolha de valores para α e β dá uma trajetória diferente. Nos itens abaixo você vai visualizar algumas dessas trajetórias e vai desenhá-las no papel — desta forma aqui: você vai marcar no plano os pontos $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ para $\Delta t = -1, 0, 1$, vai escrever "$\Delta t = -1$", "$\Delta t = 0$" e "$\Delta t = 1$" do lado dos pontos correspondentes a esses valores de Δt, e ao lado de cada desenho você vai escrever os valores de α e β.

b) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
c) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Exercício 7 (cont.)
...e além disso você vai escrever algo como “Leste” (ou “E”), “Noroeste” (ou “NW”) do lado de cada um dos seus desenhos de trajetórias pra indicar em que direção o ponto (x, y) está andando. Use a convenção que costuma ser usada em mapas, matemática e videogames, em que o Leste é pra direita e o Norte é pra cima:



Exercício 7 (cont.)

d) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = -1$
e diga o nome da direção dela.

e) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
e diga o nome da direção dela.

f) Quais são os valores mais simples de α e β —
onde "simples" quer dizer "0, 1 ou -1" — que fazem
a trajetória ir pro nordeste? E pro sudoeste?

Nos próximos exercícios eu vou me referir a essas
trajetórias em que α e β são números "simples"
pelos nomes das direções delas.

O significado geométrico de z_t
Nós sabemos calcular z, z_t e z_{tt} a partir de t,
e sabemos calcular z, z_t e z_{tt} em t_0.

Com um pouquinho de esforço você deve ser
capaz de visualizar o que acontece perto de t_0...
o valor da primeira derivada, $(z_t)(t_0)$, diz o seguinte:

$$\begin{array}{lcl}
z \text{ aumenta quando } t \text{ aumenta (``crescente'')} & \iff & (z_t)(t_0) > 0 \\
z \text{ ``fica horizontal'' quando } t \text{ aumenta} & \iff & (z_t)(t_0) = 0 \\
z \text{ diminui quando } t \text{ aumenta (``decrescente'')} & \iff & (z_t)(t_0) < 0
\end{array}$$

Veja o vídeo!!!

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=VwowES6EM3Y

O significado geométrico de z_{tt}

Nos casos em que z "fica horizontal" nós vamos usar a segunda derivada, $(z_{tt})(t_0)$, pra ver se o gráfico de $z(t)$ "parece uma parábola" ao redor de t_0, e se essa parábola tem concavidade pra cima ou pra baixo:

$$\begin{array}{lcl}
\text{concavidade pra cima} & \iff & (z_{tt})(t_0) > 0 \\
\text{“parece horizontal”} & \iff & (z_{tt})(t_0) = 0 \\
\text{concavidade pra baixo} & \iff & (z_{tt})(t_0) < 0
\end{array}$$

Eu usei muitos termos informais de propósito. No próximo exercício você vai tentar descobrir sem fazer contas qual é o comportamento da z em torno de t_0, e no outro exercício você vai fazer as contas e vai ver se o seu olhômetro funcionou direito.

Exercício 8.
Em cada um dos desenhos dos próximos slides diga o que acontece quando a trajetória $(x(t), y(t))$ anda em uma das oito direções simples, que são:

norte, nordeste, leste, sudeste,
sul, sudoeste, oeste, noroeste.

Use estas categorias na suas respostas:

z cresce
z decresce
z faz uma parábola com concavidade pra cima
z faz uma parábola com concavidade pra baixo
z é “muito horizontal”