Cálculo 3 - 2023.2

Aula 10: “notação de físicos”

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2023.2-C3.html

Links

3hQ26 Quadros da aula 10 (29/set/2023)

3fT118 (2022.2) P2, questão 2
3fT121 (2022.2) P2, questão 2, dicas
3fT122 (2022.2) P2, questão 2, gabarito

StewPtCap1p5 (p.10) variável dependente
StewPtCap3p35 (p.188) 3.5 derivação implícita
StewPtCap3p75 (p.226) 3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais
StewPtCap3p75 (p.228) Diferenciais
StewPtCap5p48 (p.369) [4] Regra da substituição (MVI)
StewPtCap5p51 (p.372) [6] Regra da substituição (MVD)
StewPtCap11p61 (p.679) 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin
StewPtCap14p25 (p.811) 14.3 Derivadas Parciais
StewPtCap14p47 (p.833) [4] A regra da cadeia (versão geral)
Leit4p61 (p.275) Leithold: regras para a notação de Leibniz
ThompsonP77 (p.66) IX. Introducing a useful dodge
ThompsonP183 (p.172) XVI. Partial differentiation

BortCalc1pt01p44 (p.44) Humberto Bortolossi - funções
BortCalc1pt13p9 (p.9) Humberto Bortolossi - regra da cadeia

BauerDawnP20 Elaboration in proof assistants

Total differentials and the chain rule (vídeo do MIT):
`http://www.youtube.com/watch?v=2bF6H_xu0ao`

Derivação implícita

$$\begin{array}{rcl}
y = y(x) & = & f(x) \\
y_x = y_x(x) & = & f'(x) \\
\frac{d}{dx}(y^3) & = & \frac{d}{dx}(f(x)^3) \\
 & = & 3f(x)^2 f'(x) \\
 & = & 3y^2 y_x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x^3 + y^3 & = & 6xy \\
\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) & = & \frac{d}{dx}(6xy) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) & = & 6y + 6y_x \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) & = & 6y + 6y_x \\
3x^2 + 3y^2 y_x & = & 6y + 6y_x \\
x^2 + y^2 y_x & = & 2y + 2y_x \\
y^2 y_x - 2y_x & = & 2y - x^2 \\
(y^2 - 2)y_x & = & 2y - x^2 \\
y_x & = & \frac{2y - x^2}{y^2 - 2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x^3 + y^3 & = & 6xy \\
d(x^3 + y^3) & = & d(6xy) \\
d(x^3) + d(y^3) & = & 6y\,dx + 6x\,dy \\
3x^2 dx + 3y^2 dy & = & 6y\,dx + 6x\,dy \\
x^2 dx + y^2 dy & = & 2y\,dx + 2x\,dy \\
y^2 dy - 2x\,dy & = & 2y\,dx - x^2 dx \\
(y^2 - 2x)dy & = & (2y - x^2)dx \\
\frac{dy}{dx} & = & \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x^3 + f(x)^3 & = & 6xf(x) \\
\frac{d}{dx}(x^3 + f(x)^3) & = & \frac{d}{dx}(6xf(x)) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(f(x)^3) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(f(x)^3) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) & = & 6f(x) + 6f'(x) \\
x^2 + f(x)^2 f'(x) & = & 2f(x) + 2f'(x) \\
f(x)^2 f'(x) - 2f'(x) & = & 2f(x) - x^2 \\
(f(x)^2 - 2)f'(x) & = & 2f(x) - x^2 \\
f'(x) & = & \frac{2f(x) - x^2}{f(x)^2 - 2}
\end{array}$$

(2) Let x represent, in Fig. 5, the horizontal distance, from a wall, of the bottom end of a ladder, AB, of fixed length; and let y be the

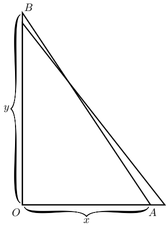


FIG. 5.

height it reaches up the wall. Now y clearly depends on x. It is easy to see that, if we pull the bottom end A a bit further from the wall, the top end B will come down a little lower. Let us state this in scientific language. If we increase x to $x+dx$, then y will become $y-dy$; that is, when x receives a positive increment, the increment which results to y is negative.

Yes, but how much? Suppose the ladder was so long that when the bottom end A was 19 inches from the wall the top end B reached just 15 feet from the ground. Now, if you were to pull the bottom end out 1 inch more, how much would the top end come down? Put it all into inches: $x = 19$ inches, $y = 180$ inches. Now the increment of x which we call dx, is 1 inch: or $x + dx = 20$ inches.

How much will y be diminished? The new height will be $y - dy$. If we work out the height by Euclid I. 47, then we shall be able to find how much dy will be. The length of the ladder is

$$\sqrt{(180)^2 + (19)^2} = 181 \text{ inches.}$$

Clearly then, the new height, which is $y - dy$, will be such that

$$\begin{aligned} (y-dy)^2 &= (181)^2 - (20)^2 = 32761 - 400 = 32361, \\ y - dy &= \sqrt{32361} = 179.89 \text{ inches.} \end{aligned}$$

Now y is 180, so that dy is $180 - 179.89 = 0.11$ inch.

So we see that making dx an increase of 1 inch has resulted in making dy a decrease of 0.11 inch.

And the ratio of dy to dx may be stated thus:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0.11}{1}.$$

It is also easy to see that (except in one particular position) dy will be of a different size from dx.

Now right through the differential calculus we are hunting, hunting, hunting for a curious thing, a mere ratio, namely, the proportion which dy bears to dx when both of them are indefinitely small.

It should be noted here that we can only find this ratio $\dfrac{dy}{dx}$ when y and x are related to each other in some way, so that whenever x varies y does vary also. For instance, in the first example just taken, if the base x of the triangle be made longer, the height y of the triangle becomes greater also, and in the second example, if the distance x of the foot of the ladder from the wall be made to increase, the height y

Exercício 1.

As contas à direita são uma versão um pouco modernizada das contas das páginas 11 e 12 do livro do Thompson. Repare que estamos usando x_0 e y_0 pros valores "antes" e 'x_1 e y_1 pros valores "depois", e isso nos permite mencionar nas mesmas contas os valores de "antes" e de "depois" — o Thompson precisa mantê-los em blocos de contas separados, e precisa de explicações em inglês pra dizer o que é o quê.

a) Numere as linhas das páginas 11 e 12 do Thompson e escreva ao lado de cada igualdade à direita a que linha do Thompson ela corresponde.

b) Faça uma versão da Fig.5 do Thompson que tenha proporções (um pouco) mais coerentes com os dados das contas dele, e que indique quais distâncias são x_0, x_1, y_0 e y_1. Faça tudo no olhômetro - não use régua.

c) Nas minhas contas eu usei o símbolo ℓ pro comprimento da escada ("length"). Represente graficamente o círculo

$$\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \ell \,\}$$

e represente os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) nele. Faça tudo à mão sem régua, mas incluindo informações suficientes pro leitor entender o seu gráfico.

d) O $\frac{dy}{dx}$ do Thompson corresponde à derivada de qual função, em que ponto? Diga que função é essa, calcule a derivada dela, calcule na calculadora o valor da derivada dela no ponto certo, e compare o seu resultado com o valor do Thompson.

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \ell$$
$$x_0^2+y_0^2 = \ell^2$$
$$x_1^2+y_1^2 = \ell^2$$
$$(x_0+dx)^2+(y_0-dy)^2 = \ell^2$$
$$(y_0-dy)^2 = \ell^2-x_1^2$$
$$\begin{aligned} y_0-dy &= \sqrt{\ell^2-x_1^2} \\ &= \sqrt{181^2-20^2} \\ &= \sqrt{32761-400} \\ &= \sqrt{32361} \\ &\approx 179.89 \end{aligned}$$
$$180-dy = 179.89$$
$$180-179.89 = dy$$
$$dy = 0.11$$
$$dx = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.11}{1} = 0.11$$

Exercício 2.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Os livros mais modernos:
i) distinguem dx e Δx,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o "ponto base" não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p)+f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p)+f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4) + f'(4)(4.02-4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x=4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \\ & & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ & & = & 2 + 0.005 \\ & & = & 2.005 \\ & \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342\ldots \end{array}$$

A última linha acima tem um '$=$' ao invés de um '$\approx$', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

O exemplo 4.4 da página 120

$$\begin{array}{rcl}
V(x) &=& \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3) \\
V'(x) &=& \frac{\pi}{3}(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2) \\
V(x_1) &\approx& V(x_0) + V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x_1) - V(x_0) &\approx& V'(x_0)(x_1 - x_0) \\
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(5) &=& \frac{\pi}{3}(30 \cdot 5^2 - 5^3) \\
&=& \frac{\pi}{3}625 \\
V'(5) &=& \pi(20 \cdot 5 - 5^2) \\
&=& 75\pi
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5) \\
\Delta V &\approx& V'(5)\Delta x \\
&=& 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
V(x^*) - V(5) &\approx& V'(5)(x^* - 5) \\
V(x^*) &\approx& V(5) + V'(5)(x^* - 5) \\
&=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi\Delta x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
& \Delta x &=& 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) &=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
& &=& \frac{\pi}{3}625 + 75\pi \cdot 0.1 \\
& &\approx& 654.5 + 23.56
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
& \Delta x &=& \pm 0.1 \\
\Rightarrow & V(x^*) &=& \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
& &=& \frac{\pi}{3}625 \pm 75\pi \cdot 0.1 \\
& &\approx& 654.5 \pm 23.56 \\
& V(x^*) &\in& [654.5 - 23.56, 654.5 + 23.56]
\end{array}$$

O exemplo 4.4 da página 120 (2)

No exemplo 4.4 o D. Miranda faz as contas o mais rápido possível — porque ele quer que os leitores passem meia hora reescrevendo as contas e checando os detalhes — e ele usa um monte de truques de físicos... por exemplo, ele fala em "erro de medida" e usa o '$\pm$' no sentido que os físicos costumam usar: pra matemáticos a frase "as soluções de $(x-17)(x+23)=0$ são da forma $x=20\pm 3$" quer dizer que $x=20-3$ ou $x=20+3$, mas pra físicos "$x=20\pm 3$" quer dizer $x \in [20-3, 20+3]$...

Tem um monte de pessoas na turma que não fizeram Física.

Na página anterior eu escrevi as contas do exemplo 4.4 tentando fazer com que elas ficassem bem fáceis de verificar por pessoas que não fizeram Física. Eu fiz as contas com simplificações, como $V'(5)=75\pi$, bem passo a passo, e deixei as contas com aproximações, como $75\pi \cdot 0.1 \approx 23.56$, pro final; além disso eu repeti algumas linhas, como a que diz

$$V(x^*) - V(5) \approx V'(5)(x^*-5)$$

várias vezes, e ao invés de tentar ver direto quais eram as consequências de $\Delta x = \pm 0.1$ eu comecei vendo as consequências de $\Delta x = 0.1$ e só depois passei pra $\Delta x = \pm 0.1$... as contas com $\Delta x = \pm 0.1$ são parecidas com as pra $\Delta x = 0.1$, mas com alguns detalhes complicados novos.

Exercício 3.
Faça as contas do Exemplo 4.5 do D. Miranda — o que é sobre uma esfera — de um jeito parecido com o que eu usei nas contas do Exemplo 4.4 — que era sobre uma tigela...

Faça tudo BEM passo a passo e deixe os truques "de físicos" pros passos finais das contas.

Exercício 4.
Faça a mesma coisa pro Exemplo 4.6.

“dy is always a dependent variable”
Agora vamos ver como vários livros
lidam com esta idéia aqui:

$$\frac{dy}{dx}dx = dy$$

Repare que temos $\frac{dy}{dx}\Delta x \approx \Delta y$ mas $\frac{dy}{dx}dx = dy$.
O livro do Thomas explica isso bem melhor que o
livro do D. Miranda. Leia a definição de diferenciais
na p.225 do Thomas e entenda os exemplos 4 e 5
das páginas 225 e 227 dele:
`http://angg.twu.net/2022.1-C3/thomas_secoes_3.7_e_3.8.pdf`

O truque das variáveis novas

No capítulo VI o Thompson calcula $\frac{d}{dx}((x^2+c)+(ax^4+b))$ organizando as contas mais ou menos desta forma:

$$\begin{array}{rcl} y & = & (x^2+c)+(ax^4+b) \\ \frac{dy}{dx} & = & \frac{d((x^2+c)+(ax^4+b))}{dx} \\ & = & \frac{d(x^2+c)}{dx} + \frac{d(ax^4+b)}{dx} \\ & = & 2x+4ax^3 \end{array}$$

No capítulo IX – "Introducing a useful dodge" –
o Thompson mostra como a gente pode simplificar contas como essa introduzindo "variáveis dependentes" novas.

Exercício 5.
Entenda os exemplos (1)–(4) das páginas 66–68 do Thompson.

Exercício 6.
Faça os exercícios (1)–(4) da página 72 do Thompson.

Links:
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=45
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=83

Derivadas parciais no Thompson
Leia o início do capítulo XVI do Thompson —
"XVI. Partial Differentiation" — da p.172 até p.174.
Entenda os exemplos (1) até (3) dele.

Exercício 7.
Faça os exercícios (1)–(5) das páginas 177 e 178 do Thompson.
Obs: o (6) precisa de gráficos 3D, vamos fazer ele depois.

Exercício 8.
Digamos que $F(x,y) = x^3y^4$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, $h(t) = e^{2t}$.
Vamos usar esta notação aqui: $F_x = \frac{\partial}{\partial x}F$, $g_t = \frac{d}{dt}g$, etc.
a) Calcule $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ usando "notação de matemáticos".
b) Digamos que $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = F(x,y)$.
Calcule $\frac{d}{dt}z$ usando "notação de físicos".

Derivadas parciais e derivadas totais

Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.

Vamos começar com um caso bem concreto — um que eu usei em EDOs com variáveis separáveis em C2... link:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf

O nosso caso bem concreto vai ser:
$z = z(x, y) = x^2 + y^2$,
$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
quando nós só consideramos o $z = z(x, y) = x^2 + y^2$
as derivadas parciais de z são $z_x = 2x$ e $z_y = 2y$,
mas quando também consideramos o $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
aí temos $z = z(x, y(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = 1$, e $\frac{dz}{dx} = 0$.

Esta derivada $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} z(x, y(x))$ é chamada de derivada total de z com relação a y.

Exercício 9.
Digamos que $z = z(x,y) = (x+2)(y+3)$
e que $y = y(x) = \operatorname{sen} x$.
a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
b) Calcule $\frac{dz}{dx}$.
c) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Convenção: quando uma expressão como z_x puder ser interpretada tanto como uma derivada parcial quanto como uma derivada total o default é interpretá-la como derivada parcial.

Exercício 10.
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.
(Isto é uma versão mais geral do exercício 9).

a) Calcule $\frac{d}{dx} z$.

b) Calcule $\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} z$.

Dica: siga as dicas dos próximos dois slides, e escreva as suas contas em várias notações diferentes "em paralelo".

Dicas pro exercício 10

Compare:

$$[\mathsf{A1}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(g(h(x))) \\ = f'(g(h(x)))\frac{d}{dx} g(h(x)) \\ = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A2}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \operatorname{sen}(\cos(\tan(x))) \\ = \operatorname{sen}'(\cos(\tan(x)))\frac{d}{dx} \cos(\tan(x)) \\ = \operatorname{sen}'(\cos(\tan(x))) \cos'(\tan(x)) \tan'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A3}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w'(z(y(x)))\frac{d}{dx} z(y(x)) \\ = w'(z(z(x)))z'(y(x))y'(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A4}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w(z(y(x))) \\ = w_z(z(y(x)))\frac{d}{dx} z(y(x)) \\ = w_z(z(z(x)))z_y(y(x))y_x(x) \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{A5}] \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} w \\ = w_z \frac{d}{dx} z \\ = w_z z_y y_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y &= y(x) \\ z &= z(y) = z(y(x)) \\ w &= w(z) = w(z(y)) = w(z(y(z))) \end{aligned}$$

Dicas pro exercício 10 (cont.)

O [A1] é a versão em "notação de matemáticos".
O [A1] é a versão mais geral.
O [A2] é um caso particular do [A1].
O [A3] é uma "versão renomeada" do [A1].
O [A4] é uma "versão abreviada" do [A3].

Toda vez que a gente tiver dúvidas sobre como fazer contas
numa notação como a do [A5] a gente vai expandir ele pra notação do [A4], depois renomear as funções "que têm nomes de variáveis", como $y(x) \rightsquigarrow f(x)$, depois fazer as contas na "notação de matemáticos", e depois voltar pra "notação de físicos"...

Ou seja: se $y = y(x)$, $z = z(y)$ e $w = w(z)$,

$$\begin{array}{rl} & \frac{d}{dx} w = ? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx} w(z(y(x))) = ? \\ \rightsquigarrow & \frac{d}{dx} h(g(f(x))) = ? \end{array}$$

e a gente tem que escrever os nomes novos...por exemplo:

$$\begin{array}{l} y = y(x) = h(x), \\ z = z(y) = g(y), \\ w = w(z) = f(z) \end{array}$$

e aí a gente calcula $\frac{d}{dx} h(g(f(x)))$ e depois traduz as contas de volta pra "notação de físicos".

Lembre que eu nunca vi esse método de tradução explicado direito, então o que está aqui é uma *tentativa* de explicá-lo...

Ah, e se a gente se perder nas contas na notação do [A1] a gente pode tentar fazer um caso particular, como o [A2], e depois voltar pro [A1]...

Uma pirâmide

(A gente viu isto na aula de 2022may20.)

O objetivo desta aula e das próximas é fazer vocês aprenderem a olhar pra algo como isso aqui...

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

...e verem uma pirâmide.

Uma pirâmide (2)

Note que isto é *muito* diferente da noção de função de Cálculo 1... não estamos dizendo o domínio da função $F(x, y)$ do slide anterior, não estamos dando uma fórmula pra ela, e só estamos dando o valor dela em alguns pontos...

A figura do slide anterior só define uma função se 1) a gente diz que ela representa a função mais simples possível que assume aqueles valores, 2) se todo mundo tem a mesma noção de "função mais simples possível", e 3) se não estamos num caso ambíguo.

Releia isto aqui, sobre "adivinhar trajetórias":

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-vetor-tangente.pdf#page=7`

No diagrama de numerozinhos do slide anterior o leitor precisa "adivinhar" que a superfície $z = F(x, y)$ é feita de pedaços de planos.

Low Poly

Computadores preferem pensar que superfícies 3D são feitas de triângulos — veja o golfinho abaixo e a página da Wikipedia sobre "Low Poly"— mas humanos preferem imaginar que triângulos vizinhos que estão no mesmo plano em $\mathbb{R}^3$ são grudados e viram polígonos mais complicados... Além disso qualquer diagrama de numerozinhos pode ser triangulado de vários jeitos, e humanos costumam achar que a triangulação da pirâmide acima à direita é "mais natural" que a triangulação de baixo...

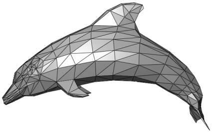
Assista o vídeo sobre "funções quadráticas" (a partir do 4:05) pra entender como nós vamos usar diagramas de numerozinhos pra superfícies que não precisam ser compostas de polígonos, e o vídeo sobre "cabos na diagonal" pra entender essa história das triangulações "mais naturais".

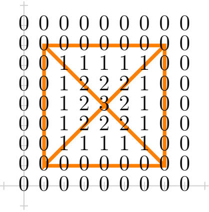
Links:

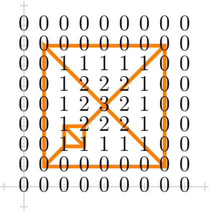
https://en.wikipedia.org/wiki/Low_poly

http://www.youtube.com/watch?v=2noSv8hyNIk
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas.mp4

http://www.youtube.com/watch?v=nxsIK0tPWAI
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-c3-cabos-na-diagonal.mp4

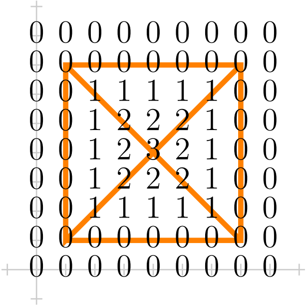






Regiões

No próximo exercício vamos considerar que o plano está divido nestas 5 regiões, que vamos chamar de N, W, E, S, e B — faces Norte, Oeste, Leste, Sul e “base”...



Regiões (2)

As definições do $f_1, f_2, \ldots, f_5$ à direita definem a mesma função, e a definição do $f_5(x)$ é uma tradução "pra notação com '$\in$'s" da definição do $f_4(x)$...

Muitos matemáticos — e livros, como por exemplo os do Guidorizzi — consideram que as definições do $f_4(x)$ e do $f_5(x)$ são ruins porque as condições, ou "regiões", depois dos "quando"s não são disjuntas, e aí essas definições "só fazem sentido" se a gente mostrar que quando $x \in (-\infty, 2] \cap [2, 4]$ temos $2 = x$, e que quando $x \in [2, 4] \cap [4, -\infty)$ temos $x = 4$...

A definição $f_1(x)$ por um gráfico nos permite pular certos detalhes. É "óbvio" que ela corresponde a uma definição por casos com três casos diferentes, mas com a definição pelo gráfico a gente não precisa definir se o ponto $x = 2$ pertence à primeira região ou à segunda, e nem se o ponto $x = 4$ pertence à segunda região ou à terceira...

Dá pra gente definir a pirâmide do slide anterior "de um jeito que deixaria o Guidorizzi feliz" por uma definição por casos como a definição do $F_P(x)$ à direita, em que cada uma das funções F_B, F_N, F_W, F_E, F_S é um "plano", isto é, é da forma $a + bx + cy$, e os conjuntos B, N, W, E, S são descritos formalmente de jeitos como este aqui...

$$S \quad = \quad \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y,\ 1 \leq y,\ x + y \leq 8 \,\}$$

Dê uma olhada nos slides 6 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=6
Daqui a algumas aulas nós vamos fazer um monte de exercícios de traduzir entre notação de conjuntos e representações gráficas — nós vamos precisar disso pra entender conjuntos abertos em fechados em $\mathbb{R}^2$ — mas por enquanto nós vamos definir regiões do plano por figuras.

$f_1(x) \quad = $ 

$$f_2(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x < 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 < x \end{cases}$$

$$f_3(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 < x < 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_4(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 2, \\ x & \text{quando } 2 \leq x \leq 4, \\ 4 & \text{quando } 4 \leq x \end{cases}$$

$$f_5(x) \quad = \quad \begin{cases} 2 & \text{quando } x \in (-\infty, 2], \\ x & \text{quando } x \in [2, 4], \\ 4 & \text{quando } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

$$F_P(x) \quad = \quad \begin{cases} F_B(x,y) & \text{quando } (x,y) \in B, \\ F_N(x,y) & \text{quando } (x,y) \in N, \\ F_W(x,y) & \text{quando } (x,y) \in W, \\ F_E(x,y) & \text{quando } (x,y) \in E, \\ F_S(x,y) & \text{quando } (x,y) \in S, \end{cases}$$

Exercício 11.
Faça o diagrama de numerozinhos de cada uma das superfícies $z = F(x, y)$ abaixo. Desenhe os numerozinhos nos pontos com $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — ou seja, 25 numerozinhos em cada item.

a) $F(x, y) = 2x$
b) $F(x, y) = 3y$
c) $F(x, y) = 2x + 3y$
d) $F(x, y) = 10 + 2x + 3y$

Exercício 12.
Mostre que se $z = F(x, y)$ é um plano com equação $F(x, y) = a + bx + cy$ então isto aqui vale:

$$\forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2.\ \Delta z = b\Delta x + c\Delta y.$$

Exercício 13.

A pirâmide dos slides anteriores pode ser descrita formalmente por uma definição por casos como esta aqui,

$$z \;=\; F_P(x) \;=\; \begin{cases} F_B(x,y) & \text{quando } (x,y)\in B, \\ F_N(x,y) & \text{quando } (x,y)\in N, \\ F_W(x,y) & \text{quando } (x,y)\in W, \\ F_E(x,y) & \text{quando } (x,y)\in E, \\ F_S(x,y) & \text{quando } (x,y)\in S, \end{cases}$$

onde cada um dos $F_R(x,y)$, onde R é B, N, E, W ou S, é uma equação de um plano — ou seja, é "da forma $a+bx+cy$". Descubra quais são estas equações de planos e escreva a sua resposta neste formato aqui, mas com os números certos:

$$\begin{array}{rcl} F_B(x,y) &=& 2+3x+4y \\ F_N(x,y) &=& 5+6x+7y \\ F_W(x,y) &=& 8+9x+10y \\ F_E(x,y) &=& 11+12x+13y \\ F_S(x,y) &=& 14+15x+16y \end{array}$$

Exercício 14 (“barranco”).

No exemplo da pirâmide a gente começou com um diagrama de numerozinhos e aí encontrou um modo de dividir o plano em 5 regiões que fazia com que todos os numerozinhos numa mesma região ficassem no mesmo plano. Faça a mesma coisa com o diagrama de numerozinhos abaixo — você vai precisar de pelo menos 6 regiões.

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

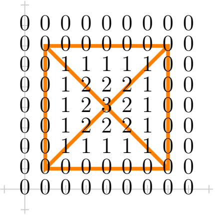
4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exercício 15.

Lembre que em planos a fórmula da aproximação linear

$$\begin{aligned} F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &\approx F(x_0,y_0) \\ &+ F_x(x_0,y_0)\Delta x \\ &+ F_y(x_0,y_0)\Delta y \end{aligned}$$



dá resultados exatos...

Seja $z = F(x,y)$ a função que dá a superfície da pirâmide da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(1.5, 3)
b) F(1.1, 3)
c) F(5.1, 3)
d) F(5.1, 2)
e) F(5.2, 2.3)
f) F(5.2, 1.9)
g) F(3.1, 2.1)
h) F(2.9, 1.9)

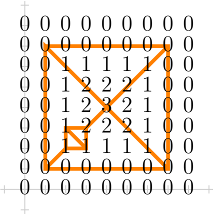
Tente fazer as contas de cabeça.
Se você se enrolar faça as contas todas explicitamente, e use os "truques de tradução" das páginas 6 e 7 pra fazer as contas da forma mais clara possível... depois esconda as suas contas e tente obter todos os resultados de novo de cabeça.

Exercício 16.

Seja $z = F(x, y)$ a função que dá a superfície da pirâmide com duas faces extras da figura à direita. Descubra os valores de:

a) F(2.1, 2.1)
b) F(2.5, 2.5)
c) F(2.6, 2.6)

fazendo as contas de cabeça.

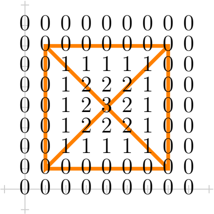


Derivada direcional (Bortolossi)

O Bortolossi define a derivada direcional deste jeito, na p.296 do capítulo 8 dele:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Digamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que os argumentos da f se chamem x e y, que $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, que o vetor $\mathbf{v}$ seja (α, β), e que $z = z(x, y) = f(x, y)$.



Exercício 17.
Seja $f(x, y) = z(x, y) = F(x, y)$, onde $F(x, y)$ é a pirâmide do exercício 15 (figura à direita).
Sejam $\mathbf{p} = (x_0, y_0) = (2, 3)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(\alpha, \beta)} = \overrightarrow{(2, 0)}$.
Calcule $\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{t}$ para os seguintes valores de t:

a) $t = 1$
b) $t = 2$
c) $t = 3$
d) $t = 1/2$
e) $t = 1/4$
f) $t = -1$
g) $t = -1/2$
h) $t = -1/4$

Exercício 18.
A partir do que você obteve no exercício 17, qual você acha que deve ser o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(2,0)}}((2, 3))$?

Exercício 19.
...e o valor de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}((2, 3))$?

O gradiente

Obs: esse exercício aqui vai ser totalmente reescrito depois! Leia a definição de gradiente na página p.298 do capítulo 8 do Bortolossi. Tente entendê-la usando as dicas abaixo.

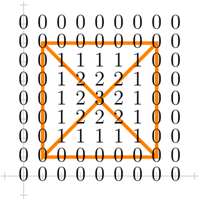
Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então:

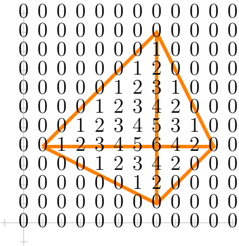
a) $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0)$,

b) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(1,0)}}(x_0, y_0)$,

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{(0,1)}}(x_0, y_0)$

d) $\nabla F = \overrightarrow{(F_x, F_y)}$





Exercício 20.

a) Usando a F da pirâmide mais simples, calcule: $\nabla F(2,4), \nabla F(4,2), \nabla F(6,4), \nabla F(4,6)$.

b) Represente graficamente $(x_0, y_0) + \nabla F(x_0, y_0)$ para estes valores de (x_0, y_0): $(2,4), (4,2), (6,4), (4,6)$.

c) Seja G a função da pirâmide torta do mini-teste. Calcule: $\nabla G(5,3), \nabla G(8,3), \nabla G(8,6), \nabla G(5,6)$.

d) Represente graficamente $G(x,y) + \nabla G(x,y)$ para cada um dos 4 pontos do item (c).

Exercício 21.

Leia a definição de curvas de nível nas páginas 97 e 98 do capítulo 3 do Bortolossi.

a) Seja $F(x,y) = 2x + y$.

b) Faça o diagrama de numerozinhos da $F(x,y)$ para os pontos com $x, y \in \{0,1,2,3\}$.

c) Desenhe quatro curvas de nível diferentes da $F(x,y)$ sobre o diagrama do item (b).

d) Represente graficamente $F + \nabla F$ para cada um destes 16 pontos do (b). Isto vai dar 16 vetores, cada um apoiado num dos numerozinhos.

Exercício 22.
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 21, mas agora para
$F(x, y) = 3x - 2y$.

Exercício 23.
Faça a mesma coisa que você fez nos exercício 21 e 22, mas agora para
$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{10}$ e
$x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Exercício 24.
Faça a mesma coisa que você fez no exercício 23, mas agora para
$F(x, y) = \frac{xy}{10}$.