Cálculo 3 - 2024.1

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

http://anggtwu.net/LATEX/2024-1-C3-dicas-pra-P1.pdf

Questão 1

(Total: 4.0 pts)
O diagrama de numerozinhos da última folha da prova corresponde a uma superfície $z = F(x,y)$ que tem 6 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 7 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 6 faces é que é a correta.

a) **(1.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 6 polígonos que são as projeções destas faces no plano do papel.

b) **(0.5 pts)** Chame estas faces de face N ("norte"), S ("sul"), W ("oeste"), E ("leste"), CN ("centro-norte") e CS ("centro-sul"), e chame as equações dos planos delas de $F_N(x,y)$, $F_S(x,y)$, $F_W(x,y)$, $F_E(x,y)$, $F_{CN}(x,y)$, e $F_{CS}(x,y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(0.5 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P_{CN} &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_{CN}(x,y) \,\}, \\ P_{CS} &=& \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_{CS}(x,y) \,\}, \\ r &=& P_{CN} \cap P_{CS}. \end{array}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

d) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) **(0.5 pts)** Seja

$$A = \{0,1,\ldots,7\} \times \{0,1,\ldots,10\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x,y) \in A$ represente graficamente $(x,y) + \frac{1}{3}\vec{\nabla}F(x,y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x,y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x,y), e quando $\vec{\nabla}F(x,y)$ não existir faça um '×' sobre o numerozinho que está no ponto (x,y).

f) **(1.0 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) &=& (0,3) + t\overrightarrow{(1,1)}, \\ (x(t),y(t)) &=& Q(t), \\ h(t) &=& F(x(t),y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0,7]$.

Questão 2
(Total: 2.5 pts)
Sejam

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^2+xy-2y^2, \\ A &= \{-2,-1,0,1,2\}, \\ B &= A\times A. \end{aligned}$$

a) **(0.2 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos da função $F(x,y)$. Desenhe um numerozinho para cada $(x,y)\in B$.

b) **(0.8 pts)** Desenhe o "campo gradiente" da função F nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla}F(x,y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não ficarem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $F(x,y)$, e sobre cada (x,y) com $x,y\in\{-2,-1,0,1,2\}$ desenhe a seta $(x,y)+\frac{1}{10}\vec{\nabla}F(x,y)$.

c) **(1.5 pts)** Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $F(x,y)$ para $z=0$, $z=-2$, $z=-5$, $z=1$ e $z=2$.

Dicas:
1) O vetor gradiente num ponto (x,y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x,y).
2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos pros itens (a) e (b) que disserem "versão final", e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.

Questão 3
(Total: 2.5 pts)
Sejam

$$\begin{aligned} F(x,y) &= xy(3-x-y), \\ P_1 &= (0,3), \\ P_2 &= (1,1), \\ P_3 &= (3,0). \end{aligned}$$

a) **(0.5 pts)** Mostre que P_1, P_2 e P_3 são pontos críticos da função F.

b) **(2.0 pts)** Quais deles são máximos locais? Quais são mínimos locais? Quais são pontos de sela?

Questão 4
(Total: 1.0 pts)
Sejam

$$\begin{aligned} z &= z(x,y), \\ x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned}$$

a) **(0.5 pts)** Calcule z_{tt}.
b) **(0.5 pts)** Calcule z_{ttt}.

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

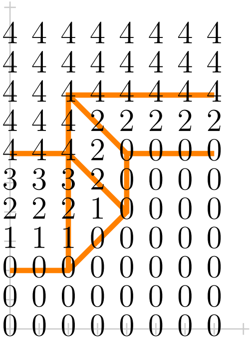
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

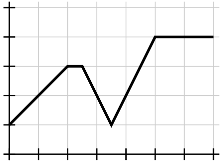
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	2	2	2	2	2
4	4	4	2	0	0	0	0
3	3	3	2	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1: gabarito parcial





Questão 2: gabarito

```
(%i1) f(x)   := (x+2)*(x-1);
```
(%o1)
$$f(x) := (x+2)\,(x-1)$$

```
(%i2) expand(f(x));
```
(%o2)
$$x^2+x-2$$

```
(%i3) F(x,y)  := x^2 + x*y - 2*y^2;
```
(%o3)
$$F(x,y) := x^2+x\,y+(-2)\,y^2$$

```
(%i4) F(x,1);
```
(%o4)
$$x^2+x-2$$

```
(%i5) mkmatrix([x,-2,2], [y,2,-2,-1], [x,y]);
```
(%o5)
$$\begin{pmatrix} [-2,2] & [-1,2] & [0,2] & [1,2] & [2,2] \\ [-2,1] & [-1,1] & [0,1] & [1,1] & [2,1] \\ [-2,0] & [-1,0] & [0,0] & [1,0] & [2,0] \\ [-2,-1] & [-1,-1] & [0,-1] & [1,-1] & [2,-1] \\ [-2,-2] & [-1,-2] & [0,-2] & [1,-2] & [2,-2] \end{pmatrix}$$

```
(%i6) mkmatrix([x,-2,2], [y,2,-2,-1], F(x,y));
```
(%o6)
$$\begin{pmatrix} -8 & -9 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) z   : F(x,y);
```
(%o7)
$$-\left(2\,y^2\right)+x\,y+x^2$$

```
(%i8) z_x : diff(z,x);
```
(%o8)
$$y+2\,x$$

```
(%i9) z_y : diff(z,y);
```
(%o9)
$$x-4\,y$$

```
(%i10) define(Fx(x,y), diff(F(x,y), x));
```
(%o10)
$$\mathrm{Fx}(x,y) := y+2\,x$$

```
(%i11) define(Fy(x,y), diff(F(x,y), y));
```
(%o11)
$$\mathrm{Fy}(x,y) := x-4\,y$$

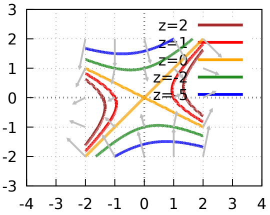
```
(%i12) mkmatrix([x,-2,2], [y,2,-2,-1], [Fx(x,y),Fy(x,y)]);
```
(%o12)
$$\begin{pmatrix} [-2,-10] & [0,-9] & [2,-8] & [4,-7] & [6,-6] \\ [-3,-6] & [-1,-5] & [1,-4] & [3,-3] & [5,-2] \\ [-4,-2] & [-2,-1] & [0,0] & [2,1] & [4,2] \\ [-5,2] & [-3,3] & [-1,4] & [1,5] & [3,6] \\ [-6,6] & [-4,7] & [-2,8] & [0,9] & [2,10] \end{pmatrix}$$

```
(%i13) z : F(x,y);
```
(%o13)
$$-\left(2\,y^2\right)+x\,y+x^2$$

```
(%i14) [xmin,ymin,xmax,ymax] : [-2,-2,2,2];
```
(%o14)
$$[-2,-2,2,2]$$

```
(%i15) mylevel(eq,[opts]) :=
          apply('imp1, append([eq, x,xmin,xmax, y,ymin,ymax], opts))$
(%i16) myvec(xy, dxdy) := vector(xy, dxdy, hl(0.1), lw(2), lc(gray))$
(%i17) myvecs : create_list(myvec([x,y], [Fx(x,y),Fy(x,y)]/10),
                      x, seq(-2,2), y, seqby(2,-2,-1))$
```

```
(%i18) myQdraw("2024-1-C3-P1-level",     "height=5cm",
               xr(-4,4), yr(-3,3),
               more(proportional_axes=xy),
               mylevel(z=2,  lk("z=2"),  lc(brown)),
               mylevel(z=1,  lk("z=1"),  lc(red)),
               mylevel(z=0,  lk("z=0"),  lc(orange)),
               mylevel(z=-2, lk("z=-2"), lc(forest_green)),
               mylevel(z=-5, lk("z=-5"), lc(blue)),
               myvecs
               /* myvec([2,0], [1,2]) */
              );
```
(%o18)



Questão 3: gabarito

```
(%i1) z : x * y * (x+y-3);
(%o1)
```

$$x\,y\,(y+x-3)$$

```
(%i2) gradz : [diff(z,x), diff(z,y)];
(%o2)
```

$$[y\,(y+x-3)+x\,y, x\,(y+x-3)+x\,y]$$

```
(%i3) gradz : factor(gradz);
(%o3)
```

$$[y\,(y+2\,x-3)\,, x\,(2\,y+x-3)]$$

```
(%i4) crpts : solve(gradz, [x,y]);
(%o4)
```

$$[[x=0,y=0]\,,[x=0,y=3]\,,[x=3,y=0]\,,[x=1,y=1]]$$

```
(%i5) hessz : hessian(z, [x,y]);
      P1    : [x=0,y=3];
(%o5)
```

$$\begin{pmatrix} 2\,y & 2\,y+2\,x-3 \\ 2\,y+2\,x-3 & 2\,x \end{pmatrix}$$

```
(%i6) (%o6)left[ x=0 , y=3right]
(%i7) P2    : [x=1,y=1];
(%o7)
```

$$[x=1,y=1]$$

```
(%i8) P3    : [x=3,y=0];
(%o8)
```

$$[x=3,y=0]$$

```
(%i9) GH    : [gradz, hessz];
(%o9)
```

$$\left[[y\,(y+2\,x-3)\,,x\,(2\,y+x-3)]\,,\begin{pmatrix} 2\,y & 2\,y+2\,x-3 \\ 2\,y+2\,x-3 & 2\,x \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i10) GH    : expand(GH);
(%o10)
```

$$\left[[y^2+2\,x\,y-3\,y, 2\,x\,y+x^2-3\,x]\,,\begin{pmatrix} 2\,y & 2\,y+2\,x-3 \\ 2\,y+2\,x-3 & 2\,x \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i11) GH1    : at(GH, P1);
(%o11)
```

$$\left[[0,0]\,,\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

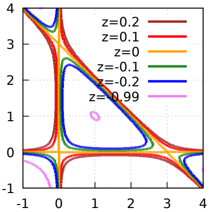
```
(%i12) GH2    : at(GH, P2);
(%o12)
```

$$\left[[0,0]\,,\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i13) GH3    : at(GH, P3);
(%o13)
```

$$\left[[0,0]\,,\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right]$$

```
(%i14) [xmin,ymin,xmax,ymax] : [-1,-1,4,4]$
(%i15) mylevel(eq,[opts]) :=
         apply('impl, append([eq, x,xmin,xmax, y,ymin,ymax], opts))$
(%i16) myQdraw("2024-1-C3-P1-Q3",     "height=5cm",
           xr(-1,4), yr(-1,4),
           more(proportional_axes=xy),
           mylevel(z=0.2,  lk("z=0.2"),  lc(brown)),
           mylevel(z=0.1,  lk("z=0.1"),  lc(red)),
           mylevel(z=0,  lk("z=0"),  lc(orange)),
           mylevel(z=-0.1, lk("z=-0.1"), lc(forest_green)),
           mylevel(z=-0.2, lk("z=-0.2"), lc(blue)),
           mylevel(z=-0.99, lk("z=-0.99"), lc(violet))
          );
(%o16)
```



Questão 4: diagrama