Cálculo 3 - 2024.1

Aula 25: abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.1-C3.html

Links

3hT150 (2023.2) Versão anterior destes slides

Bort4p1 (p.121) 4 Continuidade, noções de topologia e o teorema de Weierstrass
Bort4p1 (p.121) 4.1 Porque funções contínuas são importantes?
Bort4p9 (p.129) 4.3 O teorema de Weierstrass no caso com n variáveis
Bort4p19 (p.139) Distância euclidiana
Bort4p22 (p.142) definição de bola aberta
Bort4p28 (p.148) definição de conjunto aberto

Introdução

Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...
Comece pela seção 4.1, “Por que funções contínuas são importantes”, depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em n variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

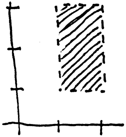
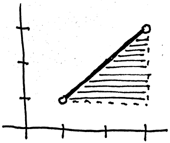
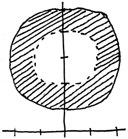
Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
C_1 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3\,\}, \\
C_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3 \ \text{ e } \ 1\le x<4\,\}, \\
C_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2\,\}, \\
C_4 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<d((x,y),(1,2))\le 2\,\}, \\
C_5 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2 \ \text{ e } \ 1<x\,\}, \\
C_6 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x\,\},
\end{array}$$

$C_7 =$  , $C_8 =$  , $C_9 =$  .

Exercício 1.
Represente graficamente os conjuntos $C_1, \ldots, C_6$.

Exercício 2.
Represente os conjuntos C_7, C_8, C_9
em "notação de conjuntos" — isto é,
na forma $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \}$.

Bolas abertas e fechadas
Se P é um ponto de $\mathbb{R}^n$ então a
bola fechada de raio ε em torno de P, $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P)$, e a
bola aberta de raio ε em torno de P, $\mathsf{B}_\varepsilon(P)$,
são definidas assim:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \leq \varepsilon \,\} \\ \mathsf{B}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon \,\} \end{array}$$

Por exemplo, se $P = 6 \in \mathbb{R}^1$ então:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_2(6) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6,Q) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid d(6,x) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x-6 \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \leq x \leq 2+6 \,\} \\ & = & [4,8] \end{array}$$

Exercício 3.
Represente graficamente:

a) $\overline{\mathsf{B}}_1((2,2))$,
b) $\mathsf{B}_1((2,2))$.

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com "bolas de verdade" do que o conjunto $\overline{\mathsf{B}}_2(6)$ do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos C_8 e C_9.

Exercício 4.
Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\mathsf{B}_{0.1}((0,2.5)) \subseteq C_1$
b) $\mathsf{B}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
c) $\overline{\mathsf{B}}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
d) $\mathsf{B}_{0.1}((1,3)) \subseteq C_2$
e) $\mathsf{B}_{0.1}((2.5,2.5)) \subseteq C_2$
f) $\mathsf{B}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
g) $\overline{\mathsf{B}}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
h) $\mathsf{B}_{0.5}((1,0.5)) \subseteq C_4$
i) $\mathsf{B}_{0.1}((0.5,2)) \subseteq C_5$
j) $\mathsf{B}_{0.001}((1.1,1.01)) \subseteq C_8$

O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)
Def: o *interior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(A)$,
é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Note que isto sempre é verdade: $\mathrm{Int}(A) \subset A$.
Dizemos que um conjunto A é *aberto* quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Infinitas operações / seja com o Bob

Pra entender a definição de interior e as próximas você vai precisar fazer um número infinito de operações pra chegar no resultado, e pra isso você vai ter que usar algumas técnicas que nós vimos em Cálculo 2 no semestre passado. Os links abaixo vão pras versões deste semestre do material sobre essas técnicas, que ficou bem melhor do que o do semestre passado.

Veja este PDF, a partir da página 11 dele:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-somas-de-riemann.pdf`

e relembre as definições de inf e sup daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf`

Exercício 5.
Seja $A = [2,4] \subset \mathbb{R}^1$.
Verifique que A não é aberto usando
a definição do slide anterior.
Dica: como $A = [2,4]$, dá pra começar por:

$$\begin{array}{rrcl}
 & A & & \text{não é aberto} \\
\Leftrightarrow & A & \not\subset & \mathrm{Int}(A) \\
\Leftrightarrow & A & \not\subset & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\
\Leftrightarrow & [2,4] & \not\subset & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}
\end{array}$$

Pros passos seguintes você vai precisar usar
muitas das "traduções" dos próximos dois slides.

Algumas traduções

$$
\begin{array}{rcl}
A \subset B & = & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & = & (A \subset B) \land (B \subset A) \\
\neg(P \land Q) & = & \neg P \lor \neg Q \\
\neg(P \lor Q) & = & \neg P \land \neg Q \\
\neg(\forall a \in A. P(a)) & = & \exists a \in A. \neg P(a) \\
\neg(\exists a \in A. P(a)) & = & \forall a \in A. \neg P(a) \\
x \in \{\, a \in A \mid P(a) \,\} & = & x \in A \land P(x) \\
\neg(P \to Q) & = & P \land \neg Q \\
[20, 42) & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x < 42 \,\} \\
20 \leq x < 42 & = & 20 \leq x \land x < 42
\end{array}
$$

Lembre que ‘$\land$’ é “e”, ‘$\lor$’ é “ou”, ‘$\neg$’ é “não”, ‘$\to$’ é “implica”.

Alguns exemplos de traduções

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{[a,b] \subset [20,42)} \\
= & \forall x \in [a,b].x \in [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].20 \leq x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.x \in [a,b] \to 20 \leq x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\neg([a,b] \subset [20,42))} \\
= & \neg(\forall x \in \mathbb{R}.a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \leq b \to 20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \leq b) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \leq x \land x \leq b) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(\neg(a \leq x) \lor \neg(x \leq b)) \land (20 \leq x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(x < a \lor b < x) \land (20 \leq x < 42)
\end{array}
$$

Exercício 6.

Represente graficamente:

a) $\mathrm{Int}(C_8)$,
b) $\mathrm{Int}(C_4)$,
c) $\mathrm{Int}(C_5)$,
d) $\mathrm{Int}(\mathsf{B}_1((2,2)))$.

O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)
Def: o *fecho* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A}$,
é definido como:

$$\overline{A} \ \ = \ \ \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

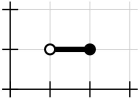
Compare com a definição do interior:

$$\mathrm{Int}(A) \ \ = \ \ \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Isto aqui sempre é verdade: $A \subset \overline{A}$.
Quando $\overline{A} \subset A$ dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Exercício 7.

Digamos que:

$D_1 \quad =$ 

Represente graficamente:

a) $\overline{C_8}$

b) $\overline{D_1}$

c) $\mathrm{Int}(D_1)$

Um aviso sobre a P2 (de 2021.2)

Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

Imagem inversa

Algumas das igualdades abaixo são definições, as outras são exemplos.

$$\begin{array}{rcl}
H(x,y) & = & xy \\
H_I & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H_{[a,b]} & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [a,b]\,\} \\
H_{[0,1]} & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
H^{-1}(a) & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)=a\,\} \\
H^{-1}(I) & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in I\,\} \\
H^{-1}([0,1]) & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)\in [0,1]\,\} \\
 & = & H_{[0,1]}
\end{array}$$

Exercício 8.
Represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
C_1 & = & H^{-1}(0) \\
C_2 & = & H^{-1}(1) \\
C_3 & = & H^{-1}([0,1]) \\
C_4 & = & H^{-1}((0,1)) \\
C_5 & = & \mathrm{Int}(C_3) \\
C_6 & = & \overline{C_4} \\
C_7 & = & H^{-1}(4) \\
C_8 & = & H^{-1}([0,4]) \\
C_9 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x \text{ e } 1\le y\,\} \\
C_{10} & = & C_8\cap C_9
\end{array}$$

Conjuntos limitados e compactos
Um conjunto $C\in\mathbb{R}^2$ é *limitado* quando ele obedece isto:

$$\exists r\in\mathbb{R}.\, C\subset B_r((0,0))$$

.

Um conjunto $C\in\mathbb{R}^2$ é *compacto* quando ele é fechado e limitado.

Exercício 9.
Preencha a tabela abaixo com '**V**'s e '**F**'s.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_{10}
é aberto									
é fechado									
é limitado									
é compacto									

Máximos numa elipse

Dê uma olhada nas figuras das páginas 355 e 356 do Bortolossi, no capítulo 10 dele:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=5
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=6
Ele usa:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) &=& x^2+y^2 \\ g(x,y) &=& \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \\ D_2 &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)\leq 1\,\} \\ D_3 &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=1\,\} \end{array}$$

D_2 é uma elipse "cheia" incluindo o interior dela, e
D_3 é só a fronteira de D_2.
Note que $(-2,0),(2,0),(0,3),(0,-3)\in D_3$.

Exercício 10.
a) Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$.

b) Na página 354 o Bortolossi desenha curvas de nível dentro de um quadrado. Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$ dentro da "elipse cheia" D_2.

c) Tente descobrir *no olhômetro* quais são os máximos e mínimos de $f(x,y)$ em D_2. Dica: o Bortolossi leva várias páginas fazendo isso — leia o texto dele!

Dica: o objetivo do item (c) é você aprender a resolver só com curvas de nível as idéias que o Bortolossi apresenta usando figuras em 3D. Se você não conseguir fazer a tradução das figuras 3D pra curvas de nível direto você pode começar desenhando "cortes" sobre as figuras 3D, como na questão do mini-teste 1 de 2020.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-tudo.pdf#page=83

...e repare que quando o Bortolossi chega no capítulo 12 ele passa a usar quase só curvas de nível e gradientes — ele praticamente abandona as figuras 3D:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-12.pdf