Cálculo 2 - 2024.2

Aula 33: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Links

2hT27 (2023.2) Exercício 1: faça um gráfico da $G'(x)$
2hT32 (2023.2) Exercício 5: $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt$

StewPtCap2p26 (p.97) O teorema do confronto
StewPtCap5p30 (p.351) TFC1
StewPtCap5p31 (p.352) TFC1, demonstração

Leit2p61 (p.114) 2.8 Teorema do confronto ou do sanduíche
Leit5p62 (p.345) 5.8.1 TFC1

MirandaP29 Teorema do confronto
MirandaP225 TFC1

RossP304 (p.291) Fundamental Theorem of Calculus

Introdução (2021.2)

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;\; = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O TFC1 tem duas versões.
A versão mais simples diz o seguinte:
se a função f é contínua então para todo $t \in (a,b)$ vale:

$$F'(t) \;\; = f(t). \qquad\qquad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função f é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade $(*)$ é verdade. Esse argumento visual é quase uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

Introdução (2)

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx.$$

Então:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx \\
&\overset{???}{=} f(t)
\end{aligned}$$

Introdução (3)
Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;=\; \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

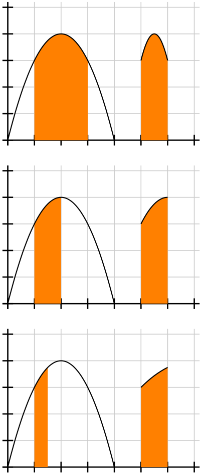
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx \;=\; f(t).$$

Primeiro exemplo:
$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t=1$.

Primeira figura: $\varepsilon=2$.
Segunda figura: $\varepsilon=1$.
Terceira figura: $\varepsilon=1/2$.

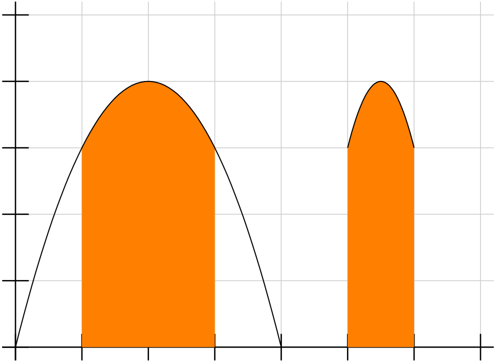
À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base ε e a área em laranja à direita sempre tem base $\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}=1$.



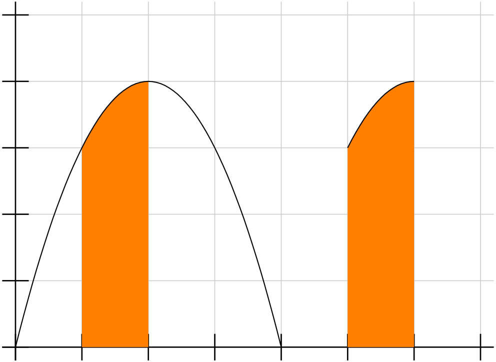
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2\text{:}$$



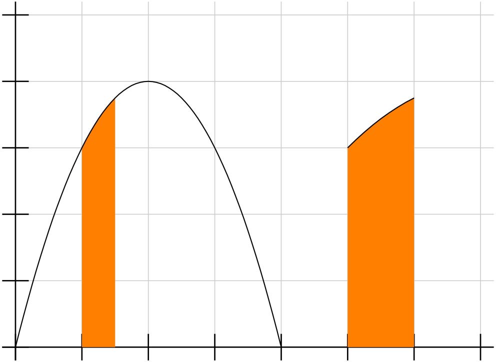
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1:$$



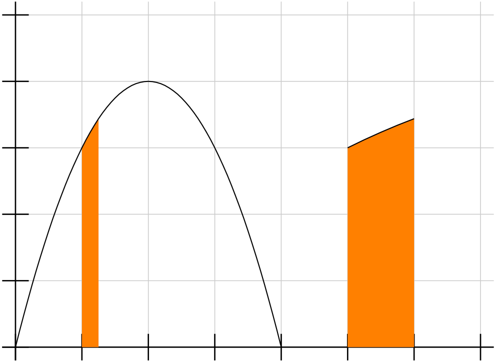
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2\text{:}$$



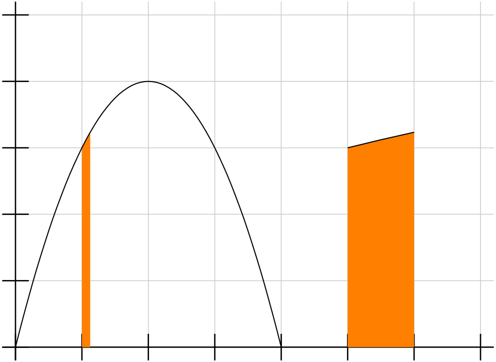
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4\text{:}$$



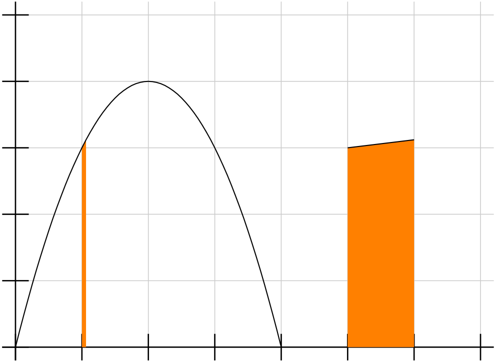
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8\text{:}$$



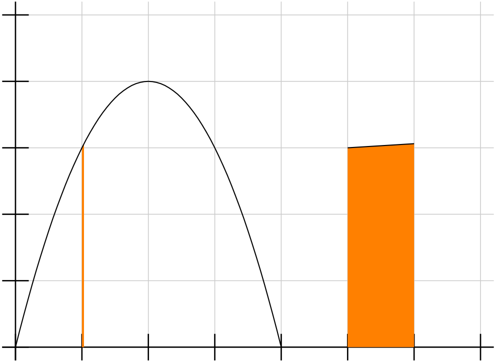
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16\text{:}$$



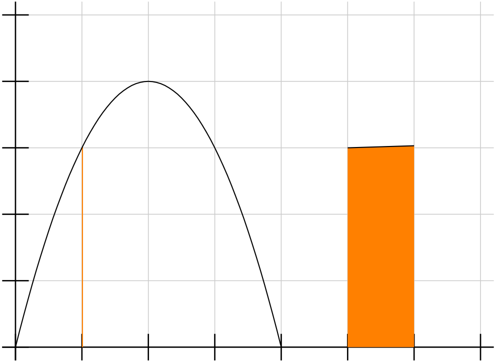
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64\text{:}$$

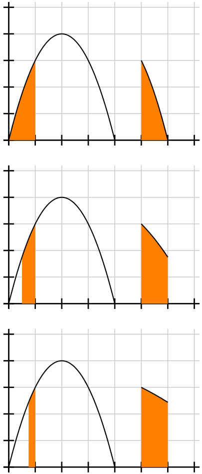


Agora com ε negativo!...

$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

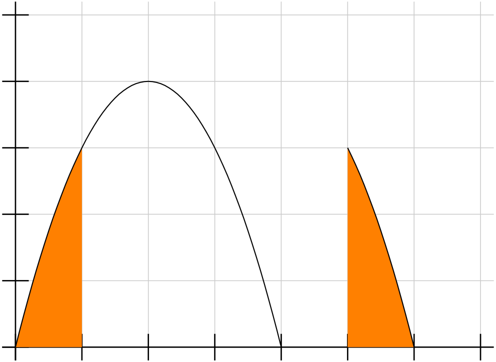
Primeira figura: $\varepsilon = -1$.
Segunda figura: $\varepsilon = -1/2$.
Terceira figura: $\varepsilon = -1/4$.

À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.



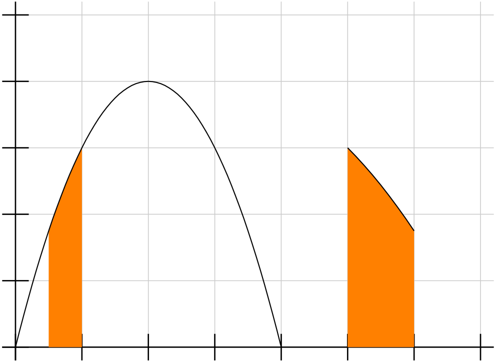
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1\text{:}$$



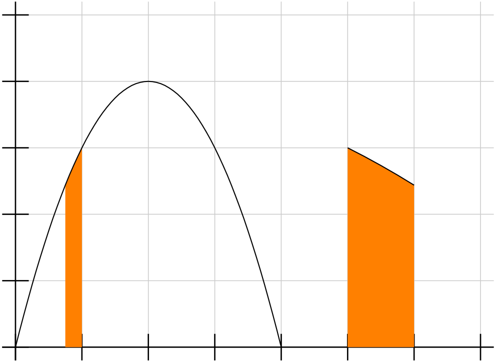
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2:$$



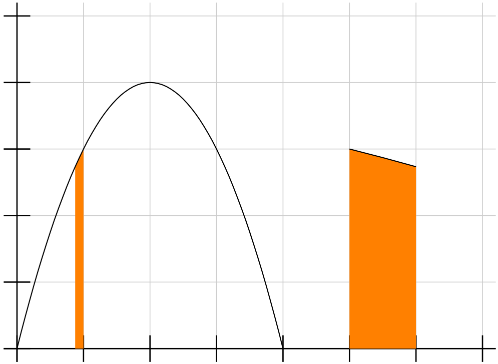
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4:$$



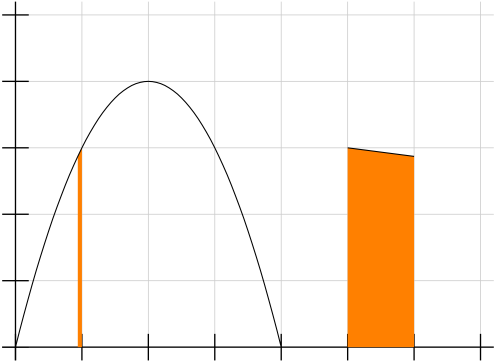
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8:$$



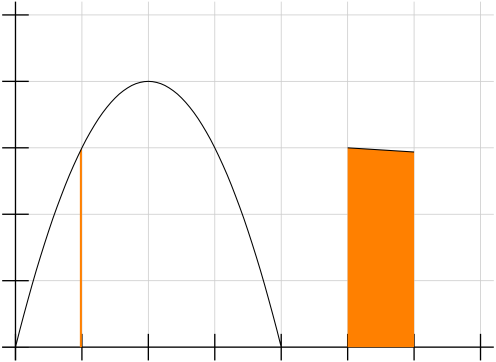
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16:$$



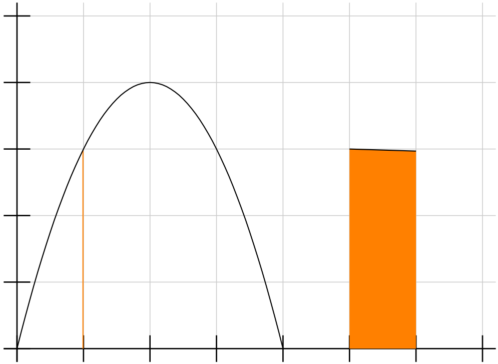
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64\text{:}$$

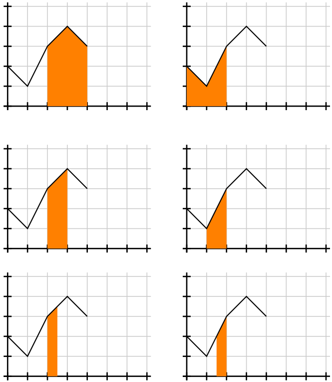


Exercício 5.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!



c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

Exercício 6.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as
áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?