Cálculo 2 - 2024.2

Aula 0: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://anggtwu.net/2024.2-C2.html

Índice

Links

Iezzi1p19 (p.11) VII. Relação de implicação
Iezzi1p20 (p.12) IX. Sentenças abertas, quantificadores
Iezzi1p21 (p.13) O quantificador universal
Iezzi1p93 (p.85) Imagem de um elemento
Iezzi2p9 (p.1-B) 1. Potência de expoente natural

Variáveis e igualdade:
HarperCap1p9 Variables are given meaning by substitution
EllermeijerHeckP6 The meaning of variable is variable in mathematics
MariaLauraAFp13 Cada uma das igualdades tem um caráter diferente

A minha operação [:=] é simples demais:
HarperCap1p9 Variables are given meaning by substitution
`https://plato.stanford.edu/entries/logic-combinatory/#ProbSubs`

Sobre "maturidade matemática":
`https://news.ycombinator.com/item?id=41016650` How to choose a textbook...
Link original no matheducators.stackexchange

Mangas em Maxima:
`(find-es "maxima" "operator-subst")`
`http://anggtwu.net/e/maxima.e.html#operator-subst`

Um exemplo do Iezzi

O volume 2 do Iezzi começa assim:

> Sejam a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:
>
> $$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \ \forall n, \ n > 1 \end{cases}$$
>
> Desta definição decorre que:
>
> $$\begin{array}{l} a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \end{array}$$

Confira:
Iezzi2p9 (p. 1-B) 1. Potência de expoente natural

A maioria das pessoas que sabe muita matemática acha isso óbvio, e se uma outra pessoa pede ajuda pra entender isso elas só dizem "ah, é fácil!" – e traduzem cada expressão daí pra português.

Acontece que isso só é fácil pra quem entende o volume 1 do Iezzi super bem, incluindo essas seções daqui,

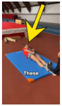
Iezzi1p19 (p.11) VII. Relação de implicação
Iezzi1p20 (p.12) IX. Sentenças abertas, quantificadores
Iezzi1p21 (p.13) O quantificador universal

que estão super incompletas, e que são sobre assuntos que todos os meus amigos lógicos consideram super difíceis.

Sobre aprender A e B

Cálculo 2 é uma matéria que tem um nível quase olímpico de dificuldade. Assista esse vídeo aqui,

"The Most Unusual Training - @victoriakalitta"
http://www.youtube.com/watch?v=i3tGLs5iLi8



porque eu vou falar bastante de "músculos mentais" e vou fazer algumas comparações com ele.

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200 – e em alguns casos você vai ter que treinar os assuntos A e B muitas vezes, alternando entre eles.

Vou começar com o exemplo do aipim. Considere esta fórmula aqui, que eu vou chamar de [Aipim], e que é sobre uma propriedade da raiz quadrada:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$$

Ela nem sempre é verdadeira. Por exemplo, quando $a=3$ e $b=4$, temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{3}{}^2}_{9}+\underbrace{\underbrace{b}_{4}{}^2}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{\underbrace{a}_{3}+\underbrace{b}_{4}}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Em 2024.1 a gente viu várias vezes que a fórmula [Aipim] era falsa, mas mesmo assim um monte de gente usou ela em contas na prova, e essas pessoas chegaram a resultados errados...

Essas pessoas não treinaram as técnicas pra contas fáceis de revisar e nem as técnicas pra revisar contas, então elas fizeram coisas como isso aqui e não conseguiram ver o erro:

$$\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{x^2-16}+5 \\ &=& x+1 \end{array}$$

Compare com isto,

$$\begin{array}{rcl} y &=& \sqrt{x^2-16}+5 \\ &=& \sqrt{x^2-4^2}+5 \\ &=& x-4+5 \\ &=& x+1 \end{array}$$

em que dá pra ver que a justificativa da terceira igualdade é esta,

$$\sqrt{x^2-4^2} \quad = \quad x-4$$

que é um caso particular disto,

$$\sqrt{a^2-b^2} \quad = \quad a-b$$

que é uma espécie de [Aipim] – é uma regra que nem sempre é verdadeira.

Repara que no final do vídeo da Victoria Kalitta ela se empurrou exatamente na direção certa. Quando a gente treina salto com vara sozinho no quintal de casa a gente geralmente acha que se a gente saltar 10000 vezes a gente vai aprender a fazer tudo direito... mas geralmente funciona melhor a gente treinar com um treinador que vai nos ajudar a desmontar o movimento final em dezenas de exercícios preparatórios – e aí a gente vai conseguir ver cada aipim nos nossos movimentos, e a gente vai conseguir não fazer aquele aipim de novo no próximo salto.

Manga

Em português “manga” tem dois sentidos totalmente diferentes – manga a fruta e manga de camisa – e às vezes a gente precisa explicar de qual sentido a gente estava falando...

Notação matemática tem um monte de mangas, e, pra piorar, também tem um monte de sinais que não são escritos, como alguns sinais de multiplicação, o sinal de exponenciação e o sinal de aplicação de função – o $\boxed{\text{ap}}$ ali de baixo –, e tem algumas operações, como a substituição, que cada livro escreve de um jeito, e que eu vou escrever como $(a+b)[a:=42]$. Compare:

$$\begin{array}{rcl} 2(y+z) & \Rightarrow & 2\cdot(y+z) \\ f(y+z) & \Rightarrow & f\ \boxed{\text{ap}}\ (y+z) \\ (a+b)[a:=42] & \Rightarrow & (a+b)\ \boxed{\text{s}}\ [a:=42] \end{array}$$

$$(\underbrace{a+b=b+a}_{\substack{\text{expressão}\\ \text{original;}\\ \text{caso geral;}\\ \text{“antes”}}})\underbrace{[a:=42]}_{\substack{\text{substituição:}\\ a\ \boxed{\text{vira}}\ 42}} \quad = \quad (\underbrace{42+b=b+42}_{\substack{\text{expressão nova;}\\ \text{caso particular;}\\ \text{“depois”}}})$$

O Harper escreveria esse $(a+b)[a:=42]$ como $[42/a](a+b)$. Dê uma olhada na página 6 dele, em que ele dá esse exemplo aqui:

$$[\mathsf{num}[2]/x]\ \mathsf{plus}(x;\mathsf{num}[3]) = \mathsf{plus}(\mathsf{num}[2];\mathsf{num}[3])$$

Link: HarperCap1p9 (p.6)

Eu às vezes vou mostrar como entender e como desambiguar as mangas do curso traduzindo elas pra Maxima – veja a coluna da direita.

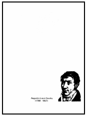
```
(%i1) Aipim : sqrt(a^2+b^2) = a+b;
(%o1)
```
$$\sqrt{b^2+a^2} = b+a$$
```
(%i2) S1 : [ a=3       ];
(%o2)
```
$$[a=3]$$
```
(%i3) S2 : [       b=4 ];
(%o3)
```
$$[b=4]$$
```
(%i4) S3 : [ a=3, b=4 ];
(%o4)
```
$$[a=3, b=4]$$
```
(%i5)            Aipim;
(%o5)
```
$$\sqrt{b^2+a^2} = b+a$$
```
(%i6) subst(S1, Aipim);
(%o6)
```
$$\sqrt{b^2+9} = b+3$$
```
(%i7) subst(S2, Aipim);
(%o7)
```
$$\sqrt{a^2+16} = a+4$$
```
(%i8) subst(S3, Aipim);
(%o8)
```
$$5=7$$
```
(%i9) "_s_"(expr,su) := subst(su, expr)$
(%i10) infix("_s_",99,101)$
(%i11) Aipim;
(%o11)
```
$$\sqrt{b^2+a^2} = b+a$$
```
(%i12) Aipim _s_ S1;
(%o12)
```
$$\sqrt{b^2+9} = b+3$$
```
(%i13) Aipim _s_ S1 _s_ S2;
(%o13)
```
$$5=7$$
```
(%i14)    5=7;
(%o14)
```
$$5=7$$
```
(%i15) is(5=7);
(%o15)
```
$$\mathbf{false}$$
```
(%i16)
```

Porquê?

Isso aqui acontece muito:

Eu: Digamos que $f(x) = 3 - 2x$.
Aluno: Porquê?

...e isso vai ser uma das minhas desculpas pra botar todo mundo pra aprender Maxima. No Ensino Médio a gente estuda por livros como o do Iezzi, que têm umas páginas assim:



e os professores convencem a gente que a gente só pode inventar alguma coisa nova se a gente for um daqueles gênios que os retratos deles aparecem no livro do Iezzi, *e tudo que a gente inventar tem que ter um "porquê" muito bom...* e aí, por exemplo, se na historinha acima eu disse "Digamos que $f(x) = 3 - 2x$" isso é porque eu tou seguindo um método que vai resolver um problema importantíssimo, e o aluno perguntou "Porquê?" porque ele não conseguiu ver nem qual era o problema e nem qual era o método.

No Maxima é super fácil definir funções novas, então a gente pode tratar ele como uma espécie de Lego, em que a gente vai tentar conectar as pecinhas a) porque é fácil, b) porque é legal, e c) porque aos poucos a gente vai aprender a montar coisas bacanas com elas.

No Maxima também é *relativamente* fácil definir operações novas. Veja o exemplo da página anterior, em que eu defini uma operação "`_s_`".

Perguntar pro Maxima é "mais rápido" do que perguntar pro ChatGPT. Isso não é nada óbvio, então deixa eu explicar. Os seus objetivos são a) aprender certas técnicas de Cálculo 2 – que eu tou comparando com aprender a saltar 5 metros no salto com vara – e b) aprender coisas que sejam úteis pra outros cursos, e aí:

> Os músculos mentais que você vai exercitar traduzindo as suas idéias pra código em Maxima vão ser muito mais úteis pros objetivos (a) e (b) do que os músculos mentais que você vai exercitar conversando com o ChatGPT.

Eu nao sou telepata...

A versão completa é:

> Eu não sou telepata e pra mim é 100 vezes mais difícil descobrir as dúvidas das pessoas que não falam comigo do que as das pessoas que falam comigo.

[Falta quote sobre treinar perguntar]
[Falta história sobre vídeos e ChatGPT – e eu não sei nem os links nem os prompts]
[Sugerir a banca maluca]

2jQ1 Quadros da aula 1 de 2024.2

Como passar em C2: método 2

O método 1 é óbvio: tire suas dúvidas durante as aulas, instale o Maxima, e treine um pouco em casa. Não vale a pena falar dele.

O método 2 é assim: faça uma reclamação pra coordenação dizendo que eu sou maluco, que eu dei provas em que eu cobrei coisas que não estavam no Stewart e que portanto não fazem parte do conteúdo do curso, e que você não conseguiu estudar em casa só pelo Stewart, por vídeos e pelo ChatGPT. O PURO agora está cheio de professores burnouteados que "não têm tempo" de ler nada e "não têm tempo" de abrir link nenhum, e tem boas chances da sua reclamação ser recebida por um professor desses – e que seja um dos que acha eu sou um irresponsável incorrigível. Aí ele não vai verificar nada, vai mandar um ofício pro RCN pedindo que eu não dê mais matérias obrigatórias, e vai pedir pra sua prova ser recorrigida por uma banca de três outros professores... mas repara, talvez bastante chance – 50%? – da sua reclamação ser recebida por professores que não são assim, e ela ser ignorada.

O método 3 me parece mais garantido: é você fazer um "Requerimento de Revisão de Prova". Os alunos têm direito de pedir isso sempre que quiserem, e aí a sua prova vai ser recorrigida por uma banca de três professores do RCN – que geralmente são professores burnouteados que "não têm tempo" de ler nada e "não têm tempo" de abrir link nenhum.

A Banca Maluca

Depois que você receber uma prova e fizer a vista de prova dela você pode fazer um "Requerimento de Revisão de Prova", e aí a sua prova vai ser recorrigida pela Banca Maluca – uma banca de três professores de Matemática, que não são sempre os mesmos, mas vou chamá-la de "A Banca Maluca" mesmo assim.

Você pode ver alguns relatórios da Banca Maluca aqui:

[*Link*]

Eu já tentei entender os critérios de correção da Banca Maluca e não consegui – e também não consegui entender o que a BM considera que são os objetivos do curso de Cálculo 2, e nem como a BM lida com aipins e com outras técnicas que as pessoas deveriam ter aprendido no Ensino Médio...

Não sei se vocês sabem, mas logo depois da quarentena, em 2022.1, os meus colegas abriram um mega-processo contra mim por eu ter aprovado alunos demais durante a pandemia, e me mandaram dar provas carrascas e reprovar todo mundo que não soubesse o suficiente de C2 e C3...

...e aí no início de 2022.2 me pediram pra dar uma VS extra de cada uma das minhas turmas de 2022.1 – apesar do semestre seguinte já ter começado – e resolveram que essas VSs extras seriam abertas pra todos os reprovados. Eu preparei provas com gabaritos que eu achei que tavam bem explicados, corrigi elas, uma Banca Maluca recorrigiu elas, e só varios meses depois eu descobri que a Banca Maluca tinha aprovado um monte de gente, inclusive uma pessoa que tinha tirado 0 na minha correção, e uma outra pessoa, que tinha tirado 1.5 na minha correção mas não tinha feito nenhuma outra prova além dessa VS extra...

Critérios de correção

Imagina que o Alex fez uma prova parecida com a P2 de 2023.2. No item 1b dele o resultado certo era $y = \sqrt{C - x^2}$, mas ele obteve $y = \sqrt{C + x^2}$; e no item 1c ele deveria encontrar o C que fazia $3 = \sqrt{C - 4^2}$ ser verdade, que era $C = 25$, mas ao invés disso ele encontrou o C que fazia $3 = \sqrt{C + 4^2}$ ser verdade, e chegou a $C = -7$. E no item 1d a resposta certa era $y = \sqrt{16 - x^2}$, e ele chegou a $y = \sqrt{-7 + x^2}$. Além disso essa questão tinha um item 1e, que pedia pras pessoas testarem se as soluções delas obedeciam uma certa equação diferencial, mas o Alex não teve tempo de fazer esse item.

O erro dele no item 1b se propagou pros itens 1c e 1d – e se ele tivesse feito o item 1e ele veria que tinha um erro de conta em algum item anterior, teria encontrado o erro de sinal nas contas dele do item 1b, e teria consertado esse erro e todo o resto.

Dá pra considerar que o Alex só cometeu um erro pequeno? Isso depende dos critérios de correção, e os critérios de correção dependem do objetivo do curso.

Numa correção mais benevolente a gente consideraria que o objetivo dessa questão era ver se os alunos sabem aplicar um certo método. E tá claro que o Alex sabe aplicar esse método *quase* perfeitamente, então ele perderia 0.1 no item 1b e nada nos itens seguintes, porque todas as outras contas dele estavam coerentes com o resultado dele pro item 1b – então ele não cometeu nenhum outro erro.

Pra mim – PRA MIM – o objetivo de Cálculo 2 é preparar as pessoas pros cursos seguintes. Em Cálculo 2 a gente *aprendia* (no passado mesmo! Mais sobre isso em breve!) a fazer contas enormes – tipo resolver integrais complicadas – na mão, e a chegar no resultado certo... e em contas tão grandes é quase impossível chegar no resultado certo direto sem errar, então o mais importante *pros cursos seguintes* era que as pessoas aprendiam um monte de técnicas pra fazer as contas ficarem muito fáceis de revisar.

Se o Alex tivesse bastante prática em revisar as contas dele ele teria visto o erro de sinal no item 1b dele e teria consertado o resto das contas dele, né, mas ele não viu esse o erro, então as respostas dele mostram que ele ainda não tá bom o suficiente nem em fazer contas fáceis de revisar e nem em revisar as próprias contas... aí, se o objetivo do curso é fazer as pessoas aprenderem a fazer contas fáceis de revisar, então os erros do Alex são bem graves, e ele tira 0 nos item 1c e 1d.

Agora há pouco eu disse que em Cálculo 2 as pessoas aprendiam a "resolver integrais enormes na mão". Vamos dividir isso em dois subobjetivos diferentes: 1) "resolver integrais" e 2) "enormes na mão".

Hoje em dia a gente tem programas de computação simbólica que resolvem integrais muito bem, então se os alunos aprendem a usar algum desses programas eles num certo sentido aprenderam a "resolver integrais"... e aí é melhor trabalhar o segundo subobjetivo, que é (aprender a fazer contas) "enormes na mão" (e chegar no resultado certo), de um outro modo, treinando técnicas pra fazer contas fáceis de revisar.

Outra coisa: alunos que aprendem a usar programas de computação simbólica conseguem usar esses programas pra revisar os passos difíceis das contas deles quando eles estão estudando em casa, e acabam conseguindo estudar bem melhor.

Voltando aos critérios de correção: às vezes a gente decide se um erro numa prova é pequeno ou não olhando o resto da prova da pessoa e as provas anteriores dela... e aí se der pra ver pelo resto da prova do Alex que ele sabe bem um monte de técnicas pra fazer "contas fáceis de revisar" então dá pra considerar que o erro de sinal dele é um erro pequeno e dar mais pontos pra ele, e se ele fez a prova relâmpago de Maxima e se deu super bem nela então eu posso considerar que ele aprendeu mais técnicas importantes, tanto pra "resolver integrais" como pra "revisar contas complicadas em casa", e posso dar mais pontos pra ele.

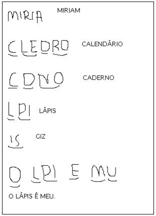
Agora vamos considerar que o Carlos resolveu os itens 1b, 1c e 1d da prova exatamente da mesma forma que o Alex, e que o Carlos também não fez o item 1e – mas as provas do Alex e do Carlos são totalmente diferentes no resto... o Alex mostrou que sabe um monte de técnicas pra fazer "contas fáceis de revisar" mas o resto da prova do Carlos é uma bagunça, e o Carlos vem na vista de prova e insiste que os erros dele são pequenos e que o objetivo do curso é só aprender métodos pra resolver integrais e EDOs... bom, desde o final de 2024.1 a gente tem uma solução maravilhosa pra isso – o Requerimento de Revisão de Prova!

Em 2024.1 quatro alunos de Cálculo 2, A_1, A_2, A_3 e A_4, fizeram Requerimentos de Revisão de Prova pedindo que a P1 de Cálculo 2 deles fosse recorrigida. O departamento montou uma banca com três professores de Matemática, B_1, B_2 e B_3, e o membro B_1 da banca entrou em contato comigo da banca me pediu as provas e o gabarito delas. Eu criei um grupo de Whatsapp comigo e com o B_1, o B_2 e o B_3, e mandei um monte de material – incluindo o PDFzinho "Introdução ao curso", que fala a beça sobre os objetivos do curso e critérios de correção, e os "Exercícios de substituição", que explicam a questão sobre o '[:=]' –

sobre sobre cada questão

Fase pré-silábica

Uma das coisas que eu acho mais desesperadoras no curso de Cálculo 2 é que em C2 a posição de cada símbolo importa MUITO, e sempre tem muitos alunos que não conseguem ver isso... eu adoraria conversar com pedagogues sobre isso, porque elxs têm até os termos pras fases da alfabetização em que as crianças não notam que tem letras faltando ou letras fora de ordem no que elas escrevem, e aí elas escrevem coisas como isso aqui,



e escrevem "VROOEA" ao invés de árvore... obs: eu perdi o scan que tinha o "vrooea" – eu procurei bastante no Google por "fase pré-silábica" e "fase silábica-alfabética" mas não achei...

Eu imagino que pedagogues tenham em montes de técnicas e exercícios pra fazer as crianças passarem pra fase seguinte, *mas eu não tenho* – e aí de vez em quando eu tenho que lidar com alunos que escreveram tudo de um jeito caótico e que ficam berrando comigo na vista de prova que "MAS TÁ CERTO, PORRA!!!", ou "TÁ IGUAL!!! TÁ IGUAL!!!", e tudo indica que eles estão numa fase em que *pra eles* a ordem, a posição, o tamanho e o alinhamento do símbolos *ainda* não importa, e EU não sei fazer eles passarem pra fase seguinte... então o melhor que eu consigo fazer por enquanto é pedir pra eles aprenderem programas como Maxima, LaTeX ou Lean, e dizer pra eles pedirem pras provas deles serem recorrigidas pela Banca Maluca...

"Meu objetivo é..."

Cálculo 2 tem vários assuntos que funcionam assim: se você tentar aprender o assunto B direto ele é muito, muito, muito difícil, e você vai gastar – digamos – 200 horas de estudo pra aprender ele... mas se você aprender o assunto A primeiro você consegue aprender os dois assuntos, A e B, em 20 horas ao invés de 200.

O caso mais extremo disso é nomear objetos. Nas primeiras aulas do curso nós vamos fazer um monte de exercícios de desenhar funções definidas por casos, como essa aqui:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

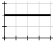
A maioria das pessoas chega em Cálculo 2 achando isso incrivelmente difícil. Elas acham que isso aí não é uma função, são duas, e aí elas fazem um desenho errado, e quando a gente vai discutir pra elas descobrirem os erros eu vejo que elas chamam $f(x)$ de "a função", o gráfico delas de "a função", $3 - x$ de "a função", e $x - 2$ de "a função".

Se elas aprenderem a "nomear objetos" elas vão conseguir fazer algo como isso aqui,

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \begin{cases} 3 - x & \text{se } x < 2, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \\ f_1(x) & = & 3 - x \\ f_2(x) & = & x - 2 \end{array}$$

$f_3(x) =$ 

$f_4(x) =$ 

$f_5(x) =$ 

Então $f(x) = f_5(x)$ para todo x.

...e aí vai ser super rápido ajudar elas a verificarem tudo, e encontrarem o erro.

Aqui – usando os meus número inventados – se uma pessoa gastar 19 horas aprendendo a nomear objetos ela consegue aprender todo o resto em 1 hora, e se ela resolver não aprender a nomear objetos ela vai levar 200 horas pra aprender a desenhar funções definidas por casos.

“Meu objetivo é reprovar pessoas como você”

Aprender a nomear objetos dá um trabalhão, então a maior parte das pessoas resolve que vai deixar pra depois, e aí deixa pra véspera da prova, e se ferra.

Dá pra passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos? Dá, você só vai perder 4 pontos na P2, então dá pra passar raspando sim... mas eu já passei da fase em que eu achava ok só avisar as pessoas um montão de vezes e depois dizer “hahaha, se ferrou, eu avisei!!!”...

...então agora eu vou fazer o seguinte: mesmo que você tenha um motivo muito bom pra não aprender a nomear objetos – tipo: você apostou 50000 reais com um grupo de colegas seus que você consegue passar em Cálculo 2 sem aprender a nomear objetos, então vale a pena correr o risco – *eu não vou ajudar as pessoas que resolveram que não vão aprender a nomear objetos.* Se você resolveu que não vai aprender a nomear objetos AGORA, então toda vez que você vier me pedir ajuda eu só vou repetir isso aqui...

> Um dos meus objetivos nesse curso é reprovar as pessoas que não aprenderam a nomear objetos. Se você ainda não sabe nomear objetos então vire uma pessoa que sabe nomear objetos URGENTE!!!

...só que isso é muito comprido, então às vezes eu vou abreviar pra:

> MEU OBJETIVO É REPROVAR PESSOAS COMO VOCÊ!!!

e vou mandar a pessoa reler estes slides.

TÁ???????

Árvores caem na prova?

Tem vários assuntos que a gente vai ver em Cálculo 2 que vão ser importantes não porque eles vão cair explicitamente na prova, mas porque eles vão te ajudar a estudar pra prova.

Já teve alguma vez em que você tentou estudar algo de Matemática, não entendeu nada, e ficou paralisado? Sim, né? Acontece com todo mundo, principalmente em assuntos mais avançados...

A gente vai aprender a ver expressões como árvores porque isso vai nos ajudar a não ficar paralisado. Árvores não vão nos ajudar em *todos* os casos de "caraca, não tou entendendo nada" – *mas vão nos ajudar em muitos casos.*
(Explicar nomear e apontar)
(Explicar comectivos omitidos: multiplicação, aplicação, listas, matrizes...)

Como perder pontos na vista de prova

Cálculo 2 ("C2") é MUITO diferente de Cálculo 1 ("C1").

As técnicas que você aprendeu em C1 vão te ajudar em C2, mas você VAI TER QUE aprender um monte de técnicas novas. Os critérios de correção de provas em C2 vão ser bem diferentes dos de C1, e as vistas de prova em C2 vão funcionar de um jeito bem diferente das vistas de C1, principalmente por isso aqui:

> Se você vier numa vista de prova de C2 e tentar me explicar o que você *pensou* quando você escreveu a resposta de uma questão eu vou considerar que você não entendeu nada do curso de C2, *não leu nada do material do curso*, e que você *merece um zero.*

Isso é porque C2 é um curso *bem* mais avançado que C1. Em C1 não dá pra ensinar as pessoas a escreverem direito – isso acontece em C2.

Nas provas de C2 eu vou avaliar se vocês treinaram certas coisas bastante. Sob um ponto de vista o que eu vou avaliar é se vocês conseguem escrever as respostas de vocês de modo que cada passo seja fácil de justificar; sob outro ponto de vista o que eu vou avaliar é *se vocês já têm muita prática em reler as respostas de vocês como se vocês fossem uma outra pessoa e em ver o que pode ser melhorado.*

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
(%o1)
```
$$2\,y+x=3$$
```
(%i2) eq2 : 4*x + 5*y = 6;
(%o2)
```
$$5\,y+4\,x=6$$
```
(%i3)           4*eq1;
(%o3)
```
$$4\,(2\,y+x)=12$$
```
(%i4)       expand(4*eq1);
(%o4)
```
$$8\,y+4\,x=12$$
```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
(%o5)
```
$$8\,y+4\,x=12$$
```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
(%o6)
```
$$-(3\,y)=-6$$
```
(%i7) eq5 : eq4 / -3;
(%o7)
```
$$y=2$$
```
(%i8)              eq5;
(%o8)
```
$$y=2$$
```
(%i9)                   eq1;
(%o9)
```
$$2\,y+x=3$$
```
(%i10) eq6 : subst(eq5, eq1);
(%o10)
```
$$x+4=3$$
```
(%i11) eq7 : eq6 - 4;
(%o11)
```
$$x=-1$$
```
(%i12)            [eq7,eq5];
(%o12)
```
$$[x=-1,y=2]$$
```
(%i13)                        eq1;
(%o13)
```
$$2\,y+x=3$$
```
(%i14)                             eq2;
(%o14)
```
$$5\,y+4\,x=6$$
```
(%i15) eq8 : subst([eq7,eq5], eq1);
(%o15)
```
$$3=3$$
```
(%i16) eq9 : subst([eq7,eq5],      eq2);
(%o16)
```
$$6=6$$
```
(%i17) matrix(['eq1, ":", eq1],
              ['eq2, ":", eq2],
              ['eq3, ":", eq3],
              ['eq4, ":", eq4],
              ['eq5, ":", eq5],
              ['eq6, ":", eq6],
              ['eq7, ":", eq7],
              ['eq8, ":", eq8],
              ['eq9, ":", eq9]);
(%o17)
```
$$\begin{pmatrix} \mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3 \\ \mathrm{eq2} & : & 5\,y+4\,x=6 \\ \mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12 \\ \mathrm{eq4} & : & -(3\,y)=-6 \\ \mathrm{eq5} & : & y=2 \\ \mathrm{eq6} & : & x+4=3 \\ \mathrm{eq7} & : & x=-1 \\ \mathrm{eq8} & : & 3=3 \\ \mathrm{eq9} & : & 6=6 \end{pmatrix}$$
```
(%i18)
```

```
(%i1) eq1 : 1*x + 2*y = 3;
```
(%o1)

$$2\,y+x=3$$

```
(%i2) eq2 : 4*x + 8*y = 6;
```
(%o2)

$$8\,y+4\,x=6$$

```
(%i3)            4*eq1;
```
(%o3)

$$4\,(2\,y+x)=12$$

```
(%i4)       expand(4*eq1);
```
(%o4)

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i5) eq3 : expand(4*eq1);
```
(%o5)

$$8\,y+4\,x=12$$

```
(%i6) eq4 : eq2 - eq3;
```
(%o6)

$$0=-6$$

```
(%i7) matrix(['eq1, ":", eq1],
             ['eq2, ":", eq2],
             ['eq3, ":", eq3],
             ['eq4, ":", eq4]);
```
(%o7)

$$\begin{pmatrix} \mathrm{eq1} & : & 2\,y+x=3 \\ \mathrm{eq2} & : & 8\,y+4\,x=6 \\ \mathrm{eq3} & : & 8\,y+4\,x=12 \\ \mathrm{eq4} & : & 0=-6 \end{pmatrix}$$

```
(%i8)
```

Pedaço de semicírculo: seja como o Bob

Imagina que você está numa turma de Cálculo 2 que tem dois "Alex"es – vou chamar eles de Alex 1 e Alex 2 – e um Bob. Numa das provas dessa turma cai uma questão assim, sobre uma fórmula que calcula a área de um pedaço de um semicírculo:

Calcule:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 respondem essa questão dizendo só isso aqui,

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

e o Bob entrega uma resposta que tem uma página inteira de contas. Aí na vista de prova o Bob está feliz porque ganhou todos os pontos dessa questão e tanto o Alex 1 quanto o Alex 2 estão putíssimos porque ganharam 0, e porque não conseguiram me convencer a aumentar as notas deles.

O argumento do Alex 1 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu vi num livro e eu lembrava a fórmula, e eu até conferi ela no computador depois", o argumento do Alex 2 foi "pô, professor, a resposta tá certa, eu fiz as contas de cabeça e pensei tudo direito, eu só não escrevi"...

Seja como o Bob!

Porque é que os Alexes tiraram 0?
Que critério de correção eu usei aí?
Que critério de correção eu vou usar no curso?
Que nível de detalhe eu espero nas respostas?

Eu vou precisar de várias páginas pra responder tudo isso.

“Releia a Dica 7”

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html
http://anggtwu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...
2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.
3) Em “matematiquês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e ”lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.
4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.
5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.
6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados.
7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Linguagem formal, gramática, sintaxe

Veja se você consegue entender a figura da próxima página...
Eu peguei ela daqui, com pequenas adaptações:
https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

A parte à esquerda dela é a “gramática” de uma certa linguagem formal, e a parte à direita dela mostra como uma certa expressão é “parseada” nessa linguagem formal.

Todas as linguagens de programação têm gramáticas bem definidas. Quando a gente está trabalhando numa linguagem com uma gramática bem definida é fácil definir quais expressões são válidas nela – uma expressão é válida quando ela é “parseável” – e quais expressões têm erros de sintaxe – as que não são “parseáveis”.

Em Prog 1 você aprendeu C, e você viu que o compilador podia rejeitar os seus programas por vários motivos... por exemplo:
1. erros de sintaxe,
2. erros de tipo,
3. símbolos não declarados.

Se você quiser entender direito como compiladores detectam erros dos tipos 2 e 3, dê uma olhada na página 99 do livro do Thain:
https://www3.nd.edu/~dthain/compilerbook/compilerbook.pdf#page=113

$$
\begin{aligned}
\langle \mathsf{Stmt} \rangle &\to \langle \mathsf{Id} \rangle \; \texttt{=} \; \langle \mathsf{Expr} \rangle \; \texttt{;} \\
\langle \mathsf{Stmt} \rangle &\to \texttt{\{} \; \langle \mathsf{StmtList} \rangle \; \texttt{\}} \\
\langle \mathsf{Stmt} \rangle &\to \texttt{if} \; \texttt{(} \; \langle \mathsf{Expr} \rangle \; \texttt{)} \; \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{StmtList} \rangle &\to \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{StmtList} \rangle &\to \langle \mathsf{StmtList} \rangle \langle \mathsf{Stmt} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle &\to \langle \mathsf{Id} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle &\to \langle \mathsf{Num} \rangle \\
\langle \mathsf{Expr} \rangle &\to \langle \mathsf{Expr} \rangle \; \langle \mathsf{Optr} \rangle \; \langle \mathsf{Expr} \rangle \\
\langle \mathsf{Id} \rangle &\to \texttt{x} \\
\langle \mathsf{Id} \rangle &\to \texttt{y} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle &\to \texttt{0} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle &\to \texttt{1} \\
\langle \mathsf{Num} \rangle &\to \texttt{9} \\
\langle \mathsf{Optr} \rangle &\to > \\
\langle \mathsf{Optr} \rangle &\to +
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\texttt{if} \; (\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle \mathsf{Id} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \; \underbrace{>}_{\langle \mathsf{Optr} \rangle} \; \underbrace{\underbrace{\texttt{9}}_{\langle \mathsf{Num} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \;) \; \underbrace{\underbrace{\{ \; \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle \mathsf{Id} \rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{0}}_{\langle \mathsf{Num} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \; ;}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle}}_{\langle \mathsf{StmtList} \rangle} \; \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle \mathsf{Id} \rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \; \underbrace{+}_{\langle \mathsf{Optr} \rangle} \; \underbrace{\texttt{1}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle}}_{\langle \mathsf{Expr} \rangle} \; ;}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle} \; \}}_{\langle \mathsf{StmtList} \rangle}}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle}}_{\langle \mathsf{Stmt} \rangle}
$$

A linguagem formal de Cálculo 2

Péssima notícia 1:
Nenhum livro define precisamente a gramática da "linguagem" de Cálculo 2. Você vai ter que deduzir quais expressões são válidas lendo os livros do curso – principalmente o Leithold e o Miranda – e os meus slides com muita atenção, escrevendo a beça, checando se as suas expressões seguem as mesmas regras que as deles, e discutindo com os seus colegas, comigo, e com o monitor.

Péssima notícia 2:
Cálculo 2 não tem uma linguagem só, tem várias! Por exemplo, em alguns momentos do curso a gente vai permitir a "notação de Leibniz", na qual expressões como $\frac{dy}{dx}dx = dy$ fazem sentido... mas a gente só vai conseguir entender a notação de Leibniz direito se a gente considerar que "Cálculo 2 sem notação de Leibniz" e "Cálculo 2 com notação de Leibniz" são duas linguages diferentes, como, sei lá, C e C++, e se a gente entender como *traduzir* expressões em "Cálculo 2 com notação de Leibniz" para "Cálculo 2 sem notação de Leibniz".

$2+3=5$	sempre
$2+3\to 5$	**NUNCA**
$\underbrace{2+3}_{5}$	sempre
$\frac{dy}{dx}dx=dy$	às vezes
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	sempre
$\int \operatorname{sen} x$	**NUNCA**
$\int f\,dx=\int f(x)\,dx$	às vezes
$y=y(x)$	às vezes
$(a\cdot 10)[a:=4]=4\cdot 10$	sempre
$(a\cdot 10)[a:=4]=40$	**NUNCA**
Quando $x=3$ temos f(x)=42	sempre
Quando $x=3$ temos f=42	**NUNCA**

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, "sintaxes" – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf
https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas "linguagens formais" e "compilam" "programas" escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\int_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle \, d\langle\mathsf{var}\rangle$$

$$\langle\mathsf{expr}\rangle\Big|_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}$$

$$\forall\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\exists\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

e as notações de "set comprehensions" daqui: Mpg8

Justificativas

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e TODOS ELES supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer "Syntax error" onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:
`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html`

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

Using Substitution

$$
\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,du && \text{Let } u = 7\theta+5,\ du = 7\,d\theta,\ (1/7)\,du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,du && \text{With the } (1/7) \text{ out front, the integral is now in standard form.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{Integrate with respect to } u, \text{ Table 4.2.} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C && \text{Replace } u \text{ by } 7\theta+5.
\end{aligned}
$$

Eu comecei a aprender um desses "programas que entendem demonstrações" em 2021 – o Lean:
`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/`
Ele é considerado muito mais fácil de usar que os "proof assistants" anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que "tava tudo certo, caramba" e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram "é óbvio".

Neste curso nós vamos ver as definições precisas de *alguns tipos* de "passos óbvios" que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por sequências de igualdades, e vão ter este formato:

$$
\begin{array}{rcll}
\langle\text{expr}\rangle & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
& = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
& = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
& = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle
\end{array}
$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra ZILHÕES de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são "óbvios":

$$
\langle\text{expr}\rangle \quad = \quad \langle\text{expr}\rangle \qquad \langle\text{justificativa}\rangle
$$

Obs: eu copiei o texto acima daqui: 2dT8
Falta revisá-lo!

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato.
O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.
O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.
Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.
Aí o Alex vai chorar pontos e diz "*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*"

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele *ficou invisível*.

Seja como o Bob!

O curso vai ter uma parte em que você vai ter que aprender a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – como o Bob tocando Atirei o pau no gato.

Se você for como o Alex, e levar mais de meia hora pra desenhar cada figura dessas, eu vou considerar que você não aprendeu os padrões que essas figuras seguem – e você não aprendeu a coisa mais importante.

Logo depois dessa parte do curso vai vir uma parte em que você vai ter que visualizar mentalmente (limites de) figuras feitas de infinitos retângulos e trapézios, e desenhar essas figuras. Se você for como o Alex você vai levar tempo infinito pra desenhar cada uma dessas figuras; se você for como o Bob você vai levar segundos.

Seja como o Bob!

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: "seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1,3])$".
Todo mundo reconhece que o intervalo $[1,3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1,3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e "cada vez mais parecidos" com o conjunto $[1,3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \{1,3\}, \\ A_2 & = & \{1,2,3\}, \\ A_3 & = & \{1,1.5,2,2.5,3\}, \\ A_4 & = & \{1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3\}, \ldots \end{array}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o "jeito esperto" – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, por um argumento informal e olhométrico, que $f([1,3])$ deve ser o intervalo $[3,4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de "levantar" todo o intervalo $[1,3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois "projetar" pro eixo y esse "intervalo levantado". Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – também meio no olhômetro – que $f([1,3]) = [3,4]$.

O Carlos vê que é óbvio que $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = \{3,3\} = \{3\}$, e portanto a imagem do intervalo $[1,3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1,3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada "Análise Matemática", baixa o "*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*" do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – mas ele leva um ano nisso.

Seja como o Bob!

Sobre Português

Muita gente aprende no Ensino Médio e nas matérias de primeiro período que “entender uma fórmula” quer dizer 1) traduzí-la pra português e 2) generalizá-la. Então é BEM comum uma pessoa ficar em dúvida se pode fazer um passo como este aqui numa conta,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99$$

e aí a pessoa me perguntar isso aqui:

> Professor, a raiz quadrada de um número ao quadrado mais outro número ao quadrado é o número mais o outro número?

É bem mais fácil discutir essa dúvida se a pessoa me fizer essa pergunta em notação matemática, ou me mostrando a igualdade acima e perguntando “isso aqui é verdade?”, ou me mostrando isso aqui,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} \stackrel{?}{=} 42 + 99$$

que é bem mais bacana porque o ‘$\stackrel{?}{=}$’ deixa super claro que isso é uma igualdade que a pessoa não sabe se é verdade...

Se a pessoa me pergunta se isso aqui é verdade,

$$\sqrt{42^2 + 99^2} = 42 + 99 \qquad (*)$$

eu posso mostrar pra ela essa outra igualdade aqui – note que eu estou dando nomes como $(*)$ e $(**)$ pras igualdades –

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y \qquad (**)$$

e aí eu pergunto “você quer saber se a $(**)$ é algo que vale sempre, né?”, e aí a pessoa responde “É! É isso!”, e aí eu consigo responder: se a $(**)$ valer sempre ela também vai valer no caso em que $x = 3$ e $y = 4$. Quando $x = 3$ e $y = 4$ a $(**)$ vira isso aqui:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 \qquad (***)$$

e aí temos:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{3}{}^2}_{9} + \underbrace{\underbrace{y}_{4}{}^2}_{16}}_{25}}}_{5} = \underbrace{3+4}_{7}}_{\mathbf{F}}$$

Ou seja, a igualdade $(***)$ é falsa, e portanto a $(**)$ não vale sempre.

Sobre Português (e generalizar)

Repara que eu não descobri se a igualdade (∗) era verdade ou não... eu convenci a pessoa a discutir a igualdade (∗∗) ao invés disso, porque eu "adivinhei" que na verdade o que a pessoa queria saber era se a (∗∗) era verdade ou não. Além disso eu desmontei a pergunta original da pessoa – aliás, a pergunta sobre a (∗∗) – em várias perguntas menores.

Até alguns semestres atrás eu achava que todo chegava na universidade sabendo "generalizar" e "particularizar" (ou: "especializar") bastante bem... eu achava que as pessoas aprendiam isso assim que aprendiam a fazer "contas com letras" no Ensino Médio.

Vocês provavelmente vão ouvir histórias sobre como os meus cursos de Cálculo em 2022.1 – logo depois do fim da quarentena – foram os piores cursos *do universo*. Uma boa parte da razão pra isso foi que eu fiquei tentando encontrar modos de ensinar as pessoas a generalizarem e particularizarem, e fui descobrindo que essas coisas são muito mais difíceis de aprender e de ensinar do que eu pensava.

A pessoa do slide anterior achava que só podia fazer uma pergunta se ela 1) generalizasse a pergunta dela, e 2) traduzisse a pergunta dela pra Português. Acho que ela achava que tinha que tratar essas duas coisas como se fossem fáceis e óbvias – *mas não são*, e eu recomendo que a gente trate particularização/especialização como algo difícil em que é muito comum as pessoas terem dúvidas muito importantes que vale a pena discutir, "encontrar a generalização certa" como algo BEM difícil e BEM importante que a gente vai treinar explicitamente em vários exercícios difíceis e importantes do curso, e a gente vai ver que "traduzir pra português" é uma ferramenta bem menos útil do que parece. Quase todas as expressões matemáticas que a gente vai ver têm uma pronúncia padrão, mas vai ser bem comum a "tradução pra português" não nos ajudar nada, ou até nos atrapalhar, porque a gente vai ter que entender algumas palavras e expressões "como matemáticos" e não no sentido usual delas...

(Veja o próximo slide!)

Banana

Considere as quatro perguntas abaixo:

1. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'a' por 'w'?
2. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'o' por 'u'?
3. Qual é o resultado de substituir na palavra "banana" todas as letras 'A' por 'W'?
4. Qual é o resultado de substituir na palavra "blitiri" todas as letras '2' por '3'?

O resultado da 1 é bem fácil: "bwnwnw", mas a maioria das pessoas fica em dúvida nos outros itens... muitas pessoas respondem coisas como "não dá pra fazer o 2 porque "banana" não tem 'o' ", "não sei se o 3 tem que dar "bWnWnW" ou "bwnwnw" ", ou "não dá pra fazer o 4 porque "blitiri" não é uma palavra e '2' e '3' " não são letras"...

Neste curso, e em todos os cursos de matemática que vão vir depois dele, você vai ter que aprender a interpretar certas definições "como matemático": você vai ter que descobrir a interpretação mais simples possível que faça sentido, e essa idéia de "mais simples possível" vai ser bem parecida com *fazer o programa mais simples possível que obedeça uma certa especificação...*

Por exemplo:

o programa que responde "banana" no item 2 é bem mais simples do que o programa que primeiro testa se a palavra original tem alguma letra 'o', e dá erro se não tem;

o programa que responde "banana" no item 3 – porque ele considera que 'a' e 'A' são letras completamente diferentes, e "banana" não tem 'A' – é muito mais simples do que os programas que consideram que 'a' e 'A' são "letras parecidas";

o programa que responde "blitiri" no item 4 é muito mais simples do que os programas que testam se a palavra original é uma palavra válida e se as duas letras dadas são caracteres considerados como "letras".

Links:
Sobre áreas negativas e retângulos degenerados:
2cT185, 2cT185
2fT63, 2fT64

2gT20 Contexto / Sabemos que $2 = 3$. Então...
2gT38 O macaco substituidor: banana

Unexpected end of input

Uma coisa que me desesperava bastante era quando um aluno me mostrava algo como isso aqui,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\,\cdot$$

e me perguntava "isso aqui tá certo?", ou: "é isso?"...
Aqui a pergunta mais precisa seria "esse início tá certo?", ou "como é que eu continuo?"... eu aqui eu poderia responder ou "não!" ou isto,

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot\beta(x) + \alpha(x)\cdot\beta'(x)$$

só que a resposta que funciona melhor *didaticamente* é a seguinte:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\,\cdot \qquad (*)$$

não é nem mesmo uma expressão válida, e um compilador que for analisar essa expressão vai abortar no meio do parsing e dizer "Unexpected end of input", que é um tipo específico de erro de sintaxe...

O melhor modo de discutir a dúvida da pessoa que perguntou o "isso aqui tá certo?" é ir consertando com ela a expressão dela passo a passo, e – **JURO** – o melhor modo de fazer isso é primeiro transformar a expressão dela em uma expressão que compile, como essa aqui:

$$\frac{d}{dx}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = \alpha'(x)\cdot 42 \qquad (**)$$

que é uma igualdade – no sentido de que tem uma representação em árvore com o '=' no topo – é aí a gente pode começar a discutir coisas como:

- a igualdade $(**)$ é verdadeira para todas as funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$?
- a igualdade $(**)$ é um caso particular da regra do produto?

“Faz um vídeo explicando o PDF”

Em 2021 em fiz um vídeo – que ficou bem bom – pra responder os alunos que estavam dizendo “professor, faz um vídeo explicando o PDF”, e em 2023 eu legendei esse vídeo. Dá pra acessar as legendas e o vídeo nos links abaixo,

http://anggtwu.net/2021-1-C2-somas-1-dicas.html

e o trecho mais importante das legendas é esse aqui:

Então, cada PDF tem vários exercícios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um vídeo explicando o PDF” eu vou fazer um vídeo de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto porque eu não sei direito onde estão as dúvidas de vocês... mas vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer vídeos bem mais detalhado sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercícios... gente, vocês não estão discutindo para descobrir como resolver os problemas? O próximo passo, já que vocês estão empacados, é vocês passarem a discutir pra encontrar a boas perguntas pra fazer... aqui tem um outro trecho que eu não copiei, e deixa eu só ler isso aqui em voz alta também... gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas, e passa a ser comum ter trechos uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. Isso vai acontecer O TEMPO TODO... praticamente toda aula, toda página, todo vídeo vai acontecer isso, até o a última matéria de matemática na vida de vocês, então a questão é: como é que vocês podem fazer para não ficarem perdidos com isso, para não ficarem paralisados... voltando pro que eu escrevi aqui, o meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem se virar com isso, e a técnica para isso e vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigos – faltou um “s” aqui... – que também não sabiam a resposta, que vão descobrir junto com vocês, e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos. Me mandem as dúvidas de vocês!

Um post da Ana Leticia de Fiori

Em 19/fev/2023 a Ana Letícia de Fiori
postou isso aqui no Facebook:

AL: Um fenômeno curioso que tenho observado entre estudantes que declaram ter “travas de escrita”, ficarem “empacados” ao desenvolver trabalhos de conclusão de disciplinas ou de curso. Frequentemente, a alegação é de que o “perfeccionismo” faz com que travem.
Eu tenho provocado, perguntado sobre quais são os gatilhos, quais os momentos em que eles sentem que o bloqueio vem. Uma resposta é o confronto com o material coletado, sejam os dados sejam as referências levantadas. Materiais com os quais eles não conseguem lidar, no sentido radical da palavra lida. Não sabem trabalhar com as referências e com os dados. Porque não estão acostumados a ler.
Um dos efeitos disso são trabalhos bastante declaratórios, que clamam ter feito “revisões bibliográficas”, “levantamentos”, “análises de discurso”, etc. que, na verdade, jamais ocorreram. Ao finalmente escrever, despreza-se o que consta na literatura e se escreve de cabeça, com alguma citação aqui ou acolá utilizada como argumento de autoridade. Claro que o texto sai confuso, raso, impreciso.
Passa longe de um problema de perfeccionismo. Mas é assim que se mascara a falta de perícia no ofício acadêmico.
E, recentemente, numa reunião entre pares, ouvi dizerem que para evitar os eternos problemas de plágio e os novos problemas dos softwares de IA, vão só realizar atividades orais e de escrita em sala de aula. Isso me apavora, porque o tempo de maturação de um trabalho acadêmico não é o tempo da sala de aula. E vai ser mais uma instância a sumir da experiência desses estudantes.

E: Nossa, eu tou exatamente tentando escrever sobre um outro tipo de ”perfeccionismo” que alguns dos meus estudantes têm e que eu ainda não tenho um modo muito bom de lidar com isso... São estudantes que assim que vêem que algo que eles escreveram está errado eles ou apagam ou jogam foram. Eu até tenho um monte de material - e slogans - sobre como o modo mais rápido de aprender assuntos difíceis de matemática é você escrever ”hipótese” ou ”rascunho” antes das partes que você não tem certeza e NÃO APAGAR NADA, NUNCA -
...mas não adianta, eles entram em pânico quando vêem que algo que eles escreveram não está perfeito - e aí eles não conseguem estudar...

AL: Mas aí é que está, a que parâmetros de perfeição eles se referem?
Esse comportamento de escrever e apagar tem a ver em parte com a fantasia de que o texto se compõe de uma vez só. Tendem a pular as etapas de estruturação de um roteiro, de rascunhos e revisões.
Quase como se o texto fosse psicografado. Eu costumo brincar com meus alunos que ninguém é Chico Xavier da antropologia, eles riem, mas teimam.
De novo, falta a dimensão do trabalho com o texto.
Perfeição, na fantasia dos alunos, é escrever sem esforço.

Retas reversas

O Alex, o Bob e o Carlos fizeram GA juntos. Um dos últimos assuntos do curso era uma fórmula pra calcular a distância entre "retas reversas" – é uma fórmula bem complicada, que tem um determinante e um produto cruzado – e cada um deles estudou esse assunto de um modo diferente.

O Alex e o Carlos "sabem" que o objetivo de cada matéria de Matemática é fazer as pessoas aprenderem certos teoremas. Os dois decoraram a fórmula da distância entre retas reversas e tentaram aplicar ela na prova. O Alex conseguiu, mas a questão da prova tinha vários itens e em todos eles ela usava letras diferentes das da fórmula que ele tinha decorado, e aí ele levou MUITO tempo pra resolver um item, e não conseguiu fazer os outros... e o Carlos tinha decorado a fórmula errado, e aí num determinado ponto da questão ele precisava dividir um número negativo por um vetor, e ele não sabia como fazer isso.

Tanto o Alex quanto o Carlos esqueceram a fórmula logo depois da prova.

O Bob estudou essa parte da matéria de um outro jeito. Ao invés de pensar "toda vez que eu precisar calcular a distância entre duas retas é só usar a fórmula" ele considerou que tem muitos casos simples em que ele sabe calcular a distância entre as retas no olhômetro – por exemplo, o caso em que uma das retas é paralela ao eixo x e a outra é paralela ao eixo y. Ele foi aprendendo como lidar com vários casos um pouco menos simples que esse, e aprendeu como visualizar o que aquela fórmula complicadíssima "quer dizer" – ela calcula a altura de um certo paralelepípedo.

O Bob tratou essa fórmula como algo que generaliza vários casos "simples" em que ele consegue calcular a distância entre duas retas por outros métodos, e ele usou esses casos simples pra testar se a fórmula realmente dá o resultado que ele esperava.

Tanto o Alex quanto o Bob quanto o Carlos "estudaram pelo livro", mas existem vários modos de "estudar pelo livro" e o Bob usou modos que nem o Alex nem o Carlos conheciam.

Neste curso você vai aprender – e treinar – vários modos de "estudar pelo livro" que provavelmente vão ser totalmente novos pra você.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer "ok, jóia, tá certo!".

O "colega que seja menos seu amigo" vai fazer menos tentativas, e os personagens "o monitor" e "o professor" da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um "colega que seja menos seu amigo" te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Dica: releia isto aqui:
Slogans27:07 até 32:45

Fórmulas e hipóteses

Dê uma olhada no Teorema 4 da seção 3.1 do Miranda: MirandaP80. Ele diz isso aqui:

> Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f + g$ é diferenciável em a e:
>
> $$(f + g)'(a) = f(a) + g(a).$$

Nós vamos considerar que esse *teorema* pode ser decomposto em duas partes: *fórmula* e *hipóteses*. A *fórmula* dele é esta aqui,

$$(f + g)'(a) = f(a) + g(a)$$

e em muitas situações nós vamos querer usar só as fórmulas de certos teoremas e deixar pra verificar as hipóteses delas no final.

Obs: falta acrescentar muita coisa aqui... explicar o que são contas formais, mostrar que o Mathologer só faz contas formais no vídeo dele sobre o "Calculus Made Easy", mencionar que em Cálculo 3 nós vamos usar o "Calculus Made Easy" e que todas as contas dele são formais, falar sobre a introdução do Martin Gardner pro CME e como ele explica que o conceito de "função" foi mudando...

Obs 2: tem um slide sobre contas formais aqui: 2gT36 (p.4) O macaco e as contas formais

Sobre aulas expositivas

Muitos alunos acreditam que se eles assistirem uma aula expositiva eles vão ser capazes de resolver na prova questões sobre o que eles aprenderam – só que isso só passa a ser *mais ou menos* verdade depois que a pessoa aprende *muito bem* como estudar.

Muita coisa em matemática funciona como músculos. Os músculos mentais que você usa pra entender uma aula expositiva são bem diferentes dos músculos mentais que você usa pra resolver exercícios, e os músculos mentais que você exercita quando você relê uma explicação que você escreveu e procura jeitos de reescrevê-la de um modo mais claro são diferentes desses...

Leia isto aqui:
Visaud39:09 até 46:06

Formal vs. coloquial

Lembre que um dos meus objetivos principais *neste curso* é fazer as pessoas aprenderem a escrever suas idéias matemáticas de um jeito que seja claro e fácil de revisar, que elas gostem de reler depois (dica 7b) e que os colegas gostem de ler (dicas 7c e 7d)...

Algumas pessoas acham que textos matemáticos têm que ser escritos numa linguagem “formal” que seja a mais distante possível do português coloquial; outras pessoas preferem escrever de um modo bem próximo do coloquial. Por exemplo, o Jacir Venturi (VenturiGA), escreve num Português pomposo que eu acho horrível, e o Felipe Acker (AckerGA1) escreve de um modo bem próximo do coloquial que eu gosto bastante. E até hoje eu só tive acesso a bem pouco material do Reginaldo, mas eu tenho a impressão de que ele não gosta de usar linguagem coloquial em matemática... eu falo um pouquinho sobre isso neste trecho de um vídeo sobre didática: Visaud59:49.

Na parte do curso sobre somas de Riemann você vai aprender a lidar com definições bem complicadas, e aos poucos – um pouquinho neste curso, e bastante nos seguintes – você vai aprender a fazer as suas próprias definições. E quando você souber fazer as suas próprias definições você vai ver que dá pra ser totalmente preciso usando tanto português coloquial quanto português pomposo...

...ah, e na parte final do curso, que é sobre equações diferenciais, você vai (ter que) aprender a usar corretamente um monte de “partículas”, como “seja”, “então”, “temos”, “isto é”, “queremos”, “sabemos que”, “lembre que”, “digamos que” e “vamos testar se”.