

Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 41 e 42: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C2.html>

Links

2dT293 Material sobre EDOVSs de 2021.2

2dT306 Slides sobre inversas de 2021.2

2gT120 Slides sobre inversas de 2023.2

Leit7 Funções inversas, logarítmicas e exponenciais

StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

StewPtCap9p18 (p.538) 9.3 Equações Separáveis

StewPtCap9p23 (p.543) 9.3 Exercícios ← façam os exercícios 1-2 e 11-12

StewPtCap14p10 (p.796) Curvas de nível

ZillCullenInicioP13 (p.6) Soluções implícitas e explícitas

ZillCullenInicioP16 (p.9) parâmetros, solução particular

ZillCullenInicioP51 (p.44) 2.2 Variáveis separáveis

ZillCullenInicioP57 (p.50) Exercícios ← façam os exercícios 1-8

ZillCullenEngCap2p17 (p.44) 2.2 Separable Variables

ZillCullenEngCap2p23 (p.50) Exercises 2.2

BoyceDip2p13 (p.31) 2.2. Equações separáveis

BoyceDip2p18 (p.36) Problemas ← façam os exercícios 1-4

BoyceDipEng2p13 (p.33) 2.2 Separable Differential Equations

DiffyQsP27 1.2 Slope fields

DiffyQsP31 1.2.3 Exercises ← façam os exercícios 2, 3, 6

DiffyQsP33 1.3 Separable equations

DiffyQsP38 1.3.4 Exercises ← façam os exercícios 1, 2

Thomas11cap9 9.1 Slope Fields and Separable Differential Equations

2eT214 Algumas figuras de campos de direções

Provas:

2jT272 2024.2, P2

2iT188 2024.1, P2

2hT278 2023.2, P2

2gT134 2023.1, P2

2fT123 2022.2, P2

2fT130 2022.2, VR

2fT135 2022.2, VS

Quadros:

2kQ95 (2025.1)

2jQ79 (2024.2)

2iQ69 (2024.1)

2hQ53 (2023.2)

2gQ41 (2023.1)

2fQ39 (2022.2)

EDOs por chutar-e-testar

Lembre que lá no início do curso eu mostrei – aqui: **2dT13** – que a gente podia resolver equações como esta

$$x + 2 = 5$$

por chutar-e-testar, e a gente podia escrever os chutes-e-testes usando o $[:=]$... cada “chute” virava uma substituição e cada “teste” virava verificar se o resultado da substituição era uma igualdade verdadeira. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 42] &= (42 + 2 = 5) = (\\ (x + 2 = 5)[x := 3] &= (3 + 2 = 5) =)\end{aligned}$$

Eu costumo usar o ‘=)’ pra indicar “deu certo / chegamos numa igualdade verdadeira” e o ‘=(’ pra indicar “deu errado / chegamos numa igualdade falsa”. Os *smileys* ‘=)’ e ‘=(’ não tem cara de notações “sérias”, e isso é de propósito: é pra lembrar vocês de procurarem nos livros como eles fazem isso – usando português e supondo que o leitor vai ser capaz de fazer muitas contas de cabeça.

Uma outra notação pra isso – e que também não costuma ser usada em livros básicos, e que eu usei no gabarito da P1, – é esta aqui:

$$(x + 2 = 5)[x := 42] = \underbrace{(42 + 2 = 5)}_{\mathbf{F}}$$

Agora seja (*) esta EDO (“equação diferencial ordinária”):

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (*)$$

Podemos verificar que $f(x) = x^4$ não é uma solução pra (*), e que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é uma solução pra (*), calculando os resultado das duas substituições abaixo e vendo que uma dá uma igualdade verdadeira e a outra dá uma igualdade falsa:

$$\begin{aligned}\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[\begin{array}{l} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{array} \right] &= ? \\ \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \left[\begin{array}{l} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right] &= ?\end{aligned}$$

Campos de direções

StewPtCap9p11 (p.531) 9.2 Campos de Direções e Método de Euler

Os gráficos que usam tracinhas em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhas com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhas. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical, e quando $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ desenhe só um pontinho ao invés de um tracinho.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obterá se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.

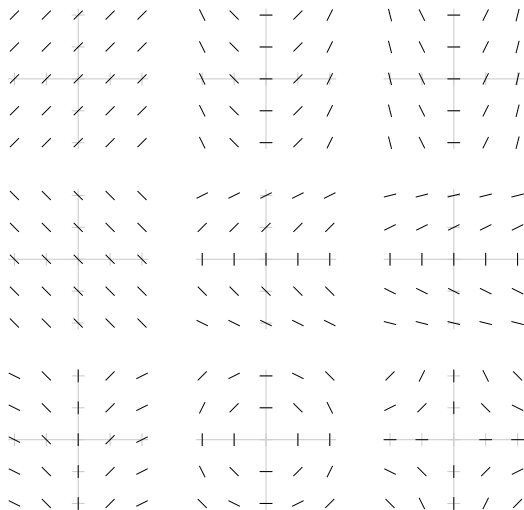
Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = 1/x$

d) $y = \sqrt{1-x^2}$



$$\begin{aligned}
[M] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = g(x) dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 \qquad G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ \qquad = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
[F_3] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
[F_2] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x) + C_3) \end{array} \right) \\
[S_1] &= \left[\begin{array}{l} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{array} \right] \\
[M][S_1] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ 2y dy = -2x dx \\ \int 2y dy = \int -2x dx \\ \parallel \\ y^2 + C_1 \qquad -x^2 + C_2 \\ y^2 = -x^2 + C_2 - C_1 \\ \qquad = -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
[F_3][S_1] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ \sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3} \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
[F_2][S_1] &= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \\ y = \sqrt{-x^2 + C_3} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{aligned} y &= 3 + \sqrt{x+4}, & \text{isto é,} \\ f(x) &= 3 + \sqrt{x+4}, \end{aligned}$$

e sejam:

$$\begin{aligned} g(y) &= (y-3)^2 + 4, \\ h(y) &= (y-4)^2 + 3. \end{aligned}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y) = g(y)$ ou se $f^{-1}(y) = h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)) = x) \left[\begin{array}{l} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2 + 4 \end{array} \right] &= ? \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \left[\begin{array}{l} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2 + 3 \end{array} \right] &= ? \end{aligned}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 + \sqrt{x+4} \\y &= 3 + \sqrt{x+4} \\y - 3 &= \sqrt{x+4} \\(y - 3)^2 &= x + 4 \\(y - 3)^2 - 4 &= x \\(y - 3)^2 - 4 &= f^{-1}(y)\end{aligned}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.

Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2 + 3\sqrt{5x + 6} \\f_2(x) &= 2 + 3\sqrt[4]{5x + 6} \\f_3(x) &= 2 + 3(4x + 5)^6 \\f_4(x) &= 2 + 3\ln(4x + 5) \\f_5(x) &= 2 + 3e^{4x+5} \\f_6(x) &= \sqrt{2 + 3e^{4x+5}} \\f_7(x) &= \ln x \\f_8(x) &= \ln -x \\f_9(x) &= |x| \\f_{10}(x) &= \ln |x|\end{aligned}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Inversas: introdução

Dê uma olhada nestes links:

[ZillCullenInicioP13](#) (p.6) Soluções implícitas e explícitas

[ZillCullenInicioP16](#) (p.9) parâmetros, solução particular

[ZillCullenInicioP51](#) (p.44) 2.2: Variáveis separáveis

O método pra resolver EDOs com variáveis separáveis nos dá primeiro “soluções implícitas”, como $x^2 + y^2 = C$ or $x^2 + y^2 = 42$, e aí depois disso a gente tem que transformar essas soluções implícitas em “soluções explícitas”, em que y é uma função de x ... por exemplo:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{C - x^2} &\Rightarrow f_1(x) = \sqrt{C - x^2} \\ x = -\sqrt{C - x^2} &\Rightarrow f_2(x) = -\sqrt{C - x^2} \\ x = \sqrt{42 - x^2} &\Rightarrow f_3(x) = \sqrt{42 - x^2} \\ x = -\sqrt{42 - x^2} &\Rightarrow f_4(x) = -\sqrt{42 - x^2} \end{aligned}$$

Praticamente todo mundo se enrola na hora de passar das “soluções implícitas” pras “soluções explícitas”, principalmente nos casos em que a gente tem “várias inversas”...

Eu vou usar uma terminologia que é meio errada, e vou dizer que $g_1(y) = \sqrt{y}$ e $g_2(y) = -\sqrt{y}$ são duas inversas diferentes para $f(x) = x^2$. Um bom lugar pra aprender a terminologia correta – que precisa que a gente especifique os domínios! – é o capítulo 7 do Leithold: [Leit7](#).

Inversas: um exemplo complicado

Digamos que queremos inverter esta função:

$$f(x) = (x+3)^4 + 5$$

O método é este aqui, mas repare que ele tem uma bifurcação...

$$\begin{aligned} y &= (x+3)^4 + 5 \\ y-5 &= (x+3)^4 \\ \sqrt[4]{y-5} &= \sqrt[4]{(x+3)^4} \\ \sqrt[4]{y-5} &= x+3 & \sqrt[4]{y-5} &= -(x+3) \\ -3 + \sqrt[4]{y-5} &= x & \sqrt[4]{y-5} &= -x-3 \\ & & \sqrt[4]{y-5} &= -x-3 \\ 3 + \sqrt[4]{y-5} &= -x \\ -(3 + \sqrt[4]{y-5}) &= x \end{aligned}$$

Se a gente segue o caminho da esquerda a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -3 + \sqrt[4]{y-5},$$

e se a gente segue o caminho da direita a gente obtém

$$f^{-1}(y) = -(3 + \sqrt[4]{y-5}).$$

Sabemos que $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$, e portanto:

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{\alpha^4} = -\alpha \\ x+3 \geq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x+3)^4} = x+3 \\ x+3 \leq 0 &\Rightarrow \sqrt[4]{(x+3)^4} = -(x+3) \end{aligned}$$

Ou seja, nas contas à esquerda se $x+3 \geq 0$ nós temos que seguir o caminho da esquerda, e se $x+3 \leq 0$ nós temos que seguir o caminho da direita.

O melhor modo da gente entender essas duas inversas é esse aqui. Considere estes três conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4 + 5\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4 + 5, x+3 \geq 0\} \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+3)^4 + 5, x+3 \leq 0\} \end{aligned}$$

Os conjuntos A_2 e A_3 são gráficos de funções inversíveis e A_1 é o gráfico de uma função não-inversível. Os domínios dessas funções são relativamente fáceis de calcular – eles são $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \leq 0\}$ respectivamente – mas as imagens são um pouco mais complicadas...

...mas lembre que em C2 a gente costuma fazer as contas em duas etapas: na primeira etapa a gente finge que as hipóteses vão ser todas obedecidas e a gente nem escreve quais são essas hipóteses, e só na segunda etapa a gente escreve explicitamente quais são essas hipóteses e a gente vê se tudo realmente dá certo quando elas são obedecidas. *Em neste curso a gente raramente vai ter tempo pra segunda etapa.*

Quattro inversas

```
(%i1) [xmin,ymin, xmax,ymax] : [-2,-2, 2,2]$
(%i2) colors : [gray, blue, forest_green, orange, red, dark_violet]$
(%i3) f(x) := (x^2-1)^2;
```

$$f(x) := (x^2 - 1)^2$$

```
(%i4) sols : solve(y=f(x), x);
```

$$x = -\sqrt{\sqrt{y}+1}, x = \sqrt{\sqrt{y}+1}, x = -\sqrt{1-\sqrt{y}}, x = \sqrt{1-\sqrt{y}}$$

```
(%i5) define(g1(y), rhs(sols[1]));
```

$$g1(y) := -\sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i6) define(g2(y), rhs(sols[3]));
```

$$g2(y) := -\sqrt{1-\sqrt{y}}$$

```
(%i7) define(g3(y), rhs(sols[4]));
```

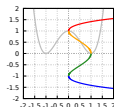
$$g3(y) := \sqrt{1-\sqrt{y}}$$

```
(%i8) define(g4(y), rhs(sols[2]));
```

$$g4(y) := \sqrt{\sqrt{y}+1}$$

```
(%i9) myqdrawp(xyrange(),
  ex1(f(x), x, -4, 4, lc(colors[1])),
  ex1(g1(y), y, 0, 4, lc(colors[2])),
  ex1(g2(y), y, 0, 1, lc(colors[3])),
  ex1(g3(y), y, 0, 1, lc(colors[4])),
  ex1(g4(y), y, 0, 4, lc(colors[5])));
```

```
(%o9)
```



```
(%i10) f(g1(y));
(%o10)
```

$$y$$

```
(%i11) f(g2(y));
(%o11)
```

$$y$$

```
(%i12) f(g3(y));
(%o12)
```

$$y$$

```
(%i13) f(g4(y));
(%o13)
```

$$y$$

```
(%i14) g1(f(x));
(%o14)
```

$$-\sqrt{|x^2-1|+1}$$

```
(%i15) g2(f(x));
(%o15)
```

$$-\sqrt{1-|x^2-1|}$$

```
(%i16) g3(f(x));
(%o16)
```

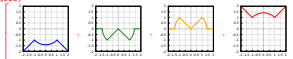
$$\sqrt{1-|x^2-1|}$$

```
(%i17) g4(f(x));
(%o17)
```

$$\sqrt{|x^2-1|+1}$$

```
(%i18) [myqdrawp(xyrange(), myex1(g1(f(x)), lc(colors[2])),
  myqdrawp(xyrange(), myex1(g2(f(x)), lc(colors[3])),
  myqdrawp(xyrange(), myex1(g3(f(x)), lc(colors[4])),
  myqdrawp(xyrange(), myex1(g4(f(x)), lc(colors[5])));
```

```
(%o18)
```



```
(%i19)
```

assume

```
(%i1) f(x) := (x^2-1)^2;
(%o1)

$$f(x) := (x^2 - 1)^2$$


(%i2) e1 : y = (x^2-1)^2;
(%o2)

$$y = (x^2 - 1)^2$$


(%i3) e2 : sqrt(e1);
(%o3)

$$\sqrt{y} = |x^2 - 1|$$


(%i4) assume(x^2-1 >= 0);
(%o4)

$$[x^2 \geq 1]$$


(%i5) e2 : sqrt(e1);
(%o5)

$$\sqrt{y} = x^2 - 1$$


(%i6) e3 : e2 + 1;
(%o6)

$$\sqrt{y} + 1 = x^2$$


(%i7) e4 : sqrt(e3);
(%o7)

$$\sqrt{\sqrt{y} + 1} = |x|$$


(%i8) assume(x <= 0);
(%o8)

$$[x \leq 0]$$


(%i9) e4 : sqrt(e3);
(%o9)

$$\sqrt{\sqrt{y} + 1} = -x$$


(%i10) e5 : - e4;
(%o10)

$$-\sqrt{\sqrt{y} + 1} = x$$


(%i11) e6 : rhs(e5) = lhs(e5);
(%o11)

$$x = -\sqrt{\sqrt{y} + 1}$$


(%i12) define(g1(y), rhs(e6));
(%o12)

$$g1(y) := -\sqrt{\sqrt{y} + 1}$$


(%i13) g1(u);
(%o13)

$$-\sqrt{\sqrt{u} + 1}$$


(%i14) simp : false;
(%o14)
false

(%i15) g1(f(x));
(%o15)

$$-1 \left( 1 + \left( (x^2 - 1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$


(%i16) simp : true;
(%o16)
true

(%i17) g1(f(x));
(%o17)
x

(%i18)
```