Cálculo 2 - 2025.1

Aulas 5 a 8: exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://anggtwu.net/2025.1-C2.html

Links

2jQ9 Quadros da aula 4 (30/set/2024)
2iQ12 Quadros da aula 6 (27/mar/2024)
2iQ14 Quadros da aula 7 (01/abr/2024)
2iQ16 Quadros da aula 8 (02/abr/2024)
2iQ22 Quadros da aula 9 (03/abr/2024)

A regra da cadeia em vários livros:
MirandaP87 3.5 A regra da cadeia
Leit3p45 (p.181) 3.6 A derivada de uma função composta e...
StewPtCap3p26 (p.179) 3.4 A regra da cadeia
CederjC1V1p115 (p.113) Aula 12: A regra da cadeia
FlemmingP147 (p.139) 4.13 Derivada da função composta

A fórmula do TFC2 nem sempre vale:
2dT231 (2021.2) $F(x) = -x^{-1}$, $F'(x) = x^{-2}$

2fT107 (2022.2) Dicas pra P1
2fT110 (2022.2) P1, questão 3
2fT114 (2022.2) P1, questão 3, gabarito

2gT108 (2023.1) Dicas pra P1
2gT111 (2023.1) P1, questão 4
2gT116 (2023.1) P1, questão 4, gabarito

2hT179 (2023.2) Dicas pra P1
2hT188 (2023.2) P1, questão 4
2hT193 (2023.2) P1, questão 4, gabarito

Introdução

Vários alunos – obs: eram alunos super dedicados, mas que tinham feito um Ensino Médio super precário, e que tavam tentando tirar o atraso correndo – já me contaram que quando eles tentavam tirar certas dúvidas com o Reginaldo ele respondia coisas como:

> “Isso é matéria de ensino médio! Isso aí você já deveria saber. Vai estudar pelo livro.”

Eu vou chamar isso de “Método Reginaldo”.

Eu vou tentar fazer algo totalmente diferente. As pessoas *deveriam* estar chegando em Cálculo sabendo obter casos particulares de fórmulas e teoremas muito bem, mas não estão...

Eu *acho* que o modo mais rápido de tirar as dúvidas dessas pessoas é usando a operação de substituição que nós vamos ver aqui, “[:=]”, que é uma versão simplificada das operações de substituição “de verdade” que são usadas em λ-cálculo e em programas como o Lean, e que lidam bem com variáveis livres e ligadas, com tipos dependentes, que usam índices de de-Bruijn nos lugares certos, etc... mas ainda falta! Eu já tenho bastante material sobre isso, mas ele está espalhado...

Ah, e um dia eu vou fazer uma versão desse PDF com um apêndice enorme com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona bem e esclarece idéias complicadas (já tenho um monte no material do semestre passado!), e com um monte de exemplos em que esse “[:=]” simplificado funciona mal e a gente precisa das versões mais complicadas... mas ainda falta.

Funções

Isso aqui é um exemplo de coisa que segundo o Reginaldo "vocês já deveriam saber", porque é matéria de Ensino Médio:

Digamos que $f(x) = x^2$. Então:

$$\begin{array}{rcl}
f(200) &=& 200^2 \\
f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\
f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \\
f(a+b) &=& (a+b)^2 \\
f(g(x)) &=& g(x)^2 \\
42+f(200) &=& 42+200^2 \\
h(f(200)) &=& h(200^2) \\
h(f(x)) &=& h(x^2) \\
h(f(a+b)) &=& h((a+b)^2)
\end{array}$$

Exercício 1.
a) Calcule o resultado desta substituição:

$$(f(3u+4)) \left[f(y) := y^5 + y^6 \right]$$

Agora seja:

$$[S_1] = \left[f(y) := y^5 + y^6 \right]$$

Calcule o resultado destas substituições:

b) $f(200)\ [S_1]$
c) $f(3u+4)\ [S_1]$
d) $f(42x^3+99)\ [S_1]$
e) $f(a+b)\ [S_1]$
f) $f(g(x))\ [S_1]$
g) $42+f(200)\ [S_1]$
h) $h(f(200))\ [S_1]$
i) $h(f(x))\ [S_1]$
j) $h(f(a+b))\ [S_1]$
k) $f(f(200))\ [S_1]$
l) $h(x)\ [S_1]$
m) $h(y)\ [S_1]$

Dica

Entenda isto aqui:

$$f(g(4/5))\,\left[g(y)\ :=\ \sqrt{y}+y^3\right]=f\left(\sqrt{4/5}+(4/5)^3\right)$$

```
f
|
g
|
/--.
|  |
4  5
```

[

```
g
|
y
```

:=

```
+-----.
|     |
sqrt  ^--.
|     |  |
y     y  3
```

] =

```
f
|
+-----.
|     |
sqrt  ^-----.
|     |     |
/--.  /--.  3
|  |  |  |
4  5  4  5
```

```
=---------------------.
|                     |
s-----.               f
|     |               |
f     []              +-----.
|     |               |     |
g     :=--.           sqrt  ^-----.
|     |   |           |     |     |
/--.  g   +-----.     /--.  /--.  3
|  |  |   |     |     |  |  |  |
4  5  y   sqrt  ^--.  4  5  4  5
          |     |  |
          y     y  3
```

Mais sobre chutar e testar

Uma solução pra equação $x^2+1=50$ é um modo de preencher os dois '?'s daqui que faça as duas igualdades externas serem verdadeiras:

$$(x^2+1=50)\left[x:=?\right]=?=\mathbf{V}$$

As soluções são $x=7$ e $x=-7$. Olha:

$$\begin{array}{r}(x^2+1=50)\left[x:=7\right]=(7^2+1=50)=\mathbf{V}\\(x^2+1=50)\left[x:=-7\right]=((-7)^2+1=50)=\mathbf{V}\end{array}$$

Como é difícil chegar direto na solução eu costumo pedir pras pessoas começarem preenchendo os dois '?'s daqui,

$$(x^2+1=50)\left[x:=?\right]=?$$

começando pelo da esquerda, pra fazer com que a igualdade externa seja verdadeira. Por exemplo:

$$(x^2+1=50)\left[x:=4\right]=(4^2+1=50)$$

Se a pessoa consegue pelo menos preencher o '?' da esquerda daqui

$$(x^2+1=50)\left[x:=?\right]=?$$

com uma expressão qualquer, como aqui,

$$(x^2+1=50)\left[x:=a+b\right]=?$$

...aí eu geralmente consigo convencer ela de que ela pode usar isto pra treinar substituições... por exemplo:

$$\begin{array}{r}(x^2+1=50)\left[x:=a+b\right]=((a+b)^2+1=50)\\(x^2+1=50)\left[x:=2\right]=(2^2+1=50)\\(x^2+1=50)\left[x:=3\right]=(3^2+1=50)\end{array}$$

Depois que ela treinou isso bastante eu posso pedir que ela faça algo parecido usando este molde aqui,

$$(x^2+1=50)\left[x:=?\right]=?=?$$

e substituindo o último '?' por **V** ou **F**. Por exemplo:

$$\begin{array}{r}(x^2+1=50)\left[x:=5\right]=(5^2+1=50)=\mathbf{F}\\(x^2+1=50)\left[x:=6\right]=(6^2+1=50)=\mathbf{F}\\(x^2+1=50)\left[x:=7\right]=(7^2+1=50)=\mathbf{V}\end{array}$$

e aí *geralmente* as pessoas conseguem voltar pro problema original do início da coluna da esquerda e entender ele. Mas às vezes isso não funciona – e aí eu tenho que lembrar a pessoa que ela se comprometeu a ler essas coisas aqui pra entender a metodologia do curso:

Slogans01:10 até 08:51: duas histórias verídicas sobre GA
2iT5, 2iT6 "Meu objetivo é reprovar pessoas como você"

Equações diferenciais

O Stewart define a solução de uma equação diferencial nesta página aqui,
StewPtCap9p8 (p.528) Equações diferenciais gerais
e com estas frases (obs: a "equação 4" é $y' = xy$):

> Uma função f é denominada *solução* de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se
> $$f'(x) = xf(x)$$
> para todos os valores de x em algum intervalo.

Eu vou ser um pouco mais porco que ele, e ao invés de falar "em algum intervalo" eu vou falar "sempre".

Pra mim $f(x) = e^{2x}$ é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$ porque isto aqui é verdade:

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \end{bmatrix} = (e^{2x} = e^{2x}) = \mathbf{V}$$

...e uma solução da equação diferencial $f(x) = 2f'(x)$ é algo que a gente põe no primeiro '?' daqui,

$$(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = \mathbf{V}$$

num modo de completar isso que faz com que todas as igualdades externas sejam verdadeiras.

Por exemplo, vamos testar se $f(x) = 42$ é uma solução da equação diferencial $f(x) = e^{2x}$. Temos:

$$\begin{array}{l}
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ? = ? \\
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = ? = ? \\
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = ? \\
(f'(x) = 2f(x)) \begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix} = (0 = 2 \cdot 42) = \mathbf{F}
\end{array}$$

Exercício 2.
a) Verifique que $f(x) = 0$ é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$.
b) Verifique que $f(x) = 99x$ não é uma solução da equação diferencial $f'(x) = 2f(x)$. Dica: você vai ter que decifrar isto aqui: "$(99 = 2 \cdot 99x) = \mathbf{F}$ porque $99 = 2 \cdot 99x$ não é verdade sempre".

Antes de continuar...

Antes da gente continuar faça todos os itens da coluna da direita – são exercícios que eu preparei alguns semestres atrás.

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
[4] & = & \left(f'(x) = x^4\right) \\
[5] & = & \left(f'(x) = 2f(x)\right) \\
[6] & = & \left(f''(x) + f'(x) = 6f(x)\right) \\
[7] & = & \left(f'(x) = -\frac{1}{f(x)}\right) \\
[8] & = & \left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \\
[\mathrm{RC}] & = & \left(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)\right) \\
[\mathrm{TFC2}] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\right)
\end{array}$$

Note que as expressões [4], [5], [6], [7], [8], são as EDOs deste problema aqui: 2dT13 EDOs por chutar e testar.

Exercício
Calcule o resultado de cada uma das substituições à direita. Lembre que o resultado de uma substituição é sempre uma *expressão* – *não simplifique ela*. Deixa eu fazer uma comparação com C: o resultado de substituir cada ocorrência do caracter `'a'` pelo caracter `'2'` no string `"a+5"` é o string `"2+5"`, não o string `"7"`, e nem o número `7`.

a) $f(g(x))\,\left[x := 42\right]$

b) $f(g(x))\,\left[g(x) := 200 \cdot x\right]$

c) $f(g(x))\,\left[f(y) := y^2 + y^3\right]$

d) $f(g(x))\,\left[f(y) := e^y\right]$

e) $f(g(x))\,\left[g(x) := 4 \cdot x\right]$

f) $f(g(x))\,\begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ g(x) := 4 \cdot x \end{bmatrix}$

g) $f(g(x))\,\left[f(y) := y^{1/2}\right]$

h) $f(g(x))\,\left[f(y) := \sqrt{y}\right]$

i) $f(g(x))\,\left[f(y) := \sqrt{y}\right]$

j) $f(g(x))\,\begin{bmatrix} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{bmatrix}$

k) $f(g(x))'\,\begin{bmatrix} g(x) := e^x \\ g'(x) := e^x \end{bmatrix}$

l) [RC] $\begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{bmatrix}$

m) [RC] $\begin{bmatrix} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2}y^{-1/2} \end{bmatrix}$

n) [RC] $\begin{bmatrix} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{bmatrix}$

o) [6] $\begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{bmatrix}$

p) [6] $\begin{bmatrix} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{bmatrix}$

q) [TFC2] $\begin{bmatrix} f(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{bmatrix}$

r) [8] $\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix}$

Uma integral

Nas aulas 8 e 9 – links:

2iQ16 Quadros da aula 8 (2/abr/2024)
2iQ22 Quadros da aula 9 (3/abr/2024)

nós vimos um argumento visual que mostrava isto aqui,

$$\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = 1.5$$

e depois o argumento mais formal abaixo,
que dava o mesmo resultado:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d}{dx}x^2 &=& 2x \\
\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} &=& x \\
\int x\,dx &=& \frac{x^2}{2} & \text{por [II]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\
\int_{x=a}^{x=b} x\,dx &=& \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=a}^{x=b} & \text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x) := x^2/2 \\ F'(x) := x \end{bmatrix} \\
\int_{x=1}^{x=2} x\,dx &=& \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=1}^{x=2} & \text{por [TFC2]} \begin{bmatrix} F(x):=x^2/2 \\ F'(x):=x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \\
&=& \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} & \text{por [defdif]} \begin{bmatrix} F(x):=x^2/2 \\ F'(x):=x \\ a:=1 \\ b:=2 \end{bmatrix} \\
&=& \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\
&=& 1.5
\end{array}$$

Usamos estes nomes pras fórmulas:

$$\begin{array}{rcl}
\text{[II]} &=& \left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right) \\
\text{[TFC2]} &=& \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)|_{x=a}^{x=b}\right) \\
\text{[defdif]} &=& \left(F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)\right)
\end{array}$$

Exercício

Obs: deixe pra fazer este exercício depois dos exercícios de regra da cadeia!!!

Faça os exercícios 19 a 30 desta página do Stewart –
StewPtCap5p36 (p.357) 5.3 Exercícios

...usando o método por chutar e testar à esquerda, em que a gente chuta e testa várias funções F e depois que a gente encontra uma F boa a gente chuta e testa valores de a e b.

A regra da cadeia

Imagina que eu passo esse exercício aqui,

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x = ?$$

e uma pessoa resolve ele desse jeito:

> Queremos encontrar a derivada de $f(x) = \mathrm{sen}\,42x$. Para tal vamos usar a regra da cadeia. Aplicando o método chegamos ao resultado, que é $f'(x) = \cos 42x$.

Repara: essa pessoa gastou um bocado de tempo e energia escrevendo a parte em português da resposta dela, e isso não ajudou ela em nada, só atrapalhou... ela chegou no resultado errado, e a solução dela ficou num formato super difícil de debugar – não dá pra eu apontar pra um símbolo dela e dizer “confere isso aqui”!...

Compare a solução dela com esta aqui, em três passos:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
{[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x):=? \\ g(x):=? \\ f'(x):=? \\ g'(x):=? \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x = ?\right) \\
{[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x):=\mathrm{sen}\,x \\ g(x):=42x \\ f'(x):=\cos x \\ g'(x):=42 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x = \cos(42x)\cdot 42\right)
\end{array}$$

Se a pessoa não faz a menor idéia de como eu consegui descobrir o que pôr nos cinco ‘?’s da minha solução em três passos dali da esquerda eu posso expandir a minha solução deste jeito...

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right) \\
{[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x):=? \\ g(x):=? \\ f'(x):=? \\ g'(x):=? \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x = ?\right) \\
{[\mathrm{RCL}]} & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x))\right) \\
{[\mathrm{RCL}]}\begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x\right) \\
{[\mathrm{RCL}]}\begin{bmatrix} f(x) := \mathrm{sen}\,x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x\right) \\
{[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x) := \mathrm{sen}\,x \\ g(x) := 42x \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x = f'(42x)g'(x)\right) \\
{[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x):=\mathrm{sen}\,x \\ g(x):=42x \\ f'(x):=? \\ g'(x):=? \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x = ?\right) \\
{[\mathrm{RC}]}\begin{bmatrix} f(x):=\mathrm{sen}\,x \\ g(x):=42x \\ f'(x):=\cos x \\ g'(x):=42 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x = \cos(42x)\cdot 42\right)
\end{array}$$

repare que eu introduzi um monte de passos novos, e comecei resolvendo um problema menor que só tinha dois ‘?’s – este aqui:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{RCL}] & = & \left(\frac{d}{dx} f(g(x))\right) \\
{[\mathrm{RCL}]}\begin{bmatrix} f(x) := ? \\ g(x) := ? \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,42x\right)
\end{array}$$

Renomear

Note que:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right)\begin{bmatrix}f:=h\\g:=k\end{bmatrix}}_{\left(\frac{d}{dx}h(k(x))\right)}\begin{bmatrix}h:=g\\g:=k\end{bmatrix}}_{\left(\frac{d}{dx}g(f(x))\right)}[x:=t]}_{\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)}$$

e portanto isto aqui

$$\text{[RC]}\begin{bmatrix}f{:=}h\\f'{:=}h'\\g{:=}k\\g'{:=}k'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h{:=}f\\h'{:=}f'\\k{:=}g\\k'{:=}g'\end{bmatrix}[x:=t]$$

deve dar uma versão da regra da cadeia que usa letras diferentes das originais... você consegue descobrir o resultado da substituição acima de cabeça? Se não conseguir faça todos os passos à mão.

O Maxima tem uma operação de substituição, `subst`, em que as substituições são feitas em ordem, e uma outra, `psubst`, em que as substituições são feitas em paralelo. Veja:

https://maxima.sourceforge.io/docs/manual/maxima_33.html#psubst

Se o nosso '[:=]' for a substituição em paralelo então a gente pode fazer isto aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x))\right)\begin{bmatrix}f{:=}g\\f'{:=}g'\\g{:=}f\\g'{:=}f'\\x{:=}t\end{bmatrix}=\left(\frac{d}{dt}g(f(t))\right)$$

só que uma vez – em 2022.1 – eu tentei definir formalmente a substituição em paralelo em sala e deu super errado, ninguém entendeu nada... e aí eu vi que era melhor evitar os casos em que a substituição simples e a substituição em paralelo se comportam de formas diferentes.

Regra da cadeia: exercícios

Exercícios do Miranda

Lembre que:

$$[\mathrm{RC}] = \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Resolva os exercícios 1–6 e 8–12 daqui:

MirandaP89

usando os métodos que você quiser, e depois reescreva o resultado final de cada um neste formato com uma justificativa detalhada à direita, que nós vimos no slide 9:

$$\frac{d}{dt}(3t+4)^5 \quad = \quad 5(3t+4)^4 \cdot 3 \qquad \text{por } [\mathrm{RC}]\begin{bmatrix} f(x):=x^5 \\ g(x):=3x+4 \\ f'(x):=5x^4 \\ g'(x):=3 \end{bmatrix}\left[x := t\right]$$

Muito importante

Cálculo 2 é cheio de fórmulas que parecem incompreensíveis à primeira vista, porque são abstratas demais...

Uma das utilidades mais importantes da operação '[:=]' pra gente vai ser *transformar fórmulas nas quais a gente não entende nada em casos particulares dessas fórmulas, que têm vários pedaços que a gente consegue entender.*

Isso aqui é uma fórmula – ou melhor, um "método" – que vai ser um dos assuntos da P2:

$$
[\mathrm{M}] \;=\; \left(\begin{array}{ccc}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
 & = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\shortparallel & & \\
y & &
\end{array}\right)
$$

Exercício muito importante:
Calcule o resultado da substituição abaixo.
Você provavelmente vai conseguir entender as quatro igualdades de baixo do resultado, mas as cinco igualdades de cima ainda não vão fazer sentido nenhum pra você.

$$
[\mathrm{M}] \left[\begin{array}{rcl}
g(x) & := & -2x \\
h(y) & := & 2y \\
G(x) & := & -x^2 \\
H(y) & := & y^2 \\
H^{-1}(u) & := & \sqrt{u}
\end{array}\right] = \;?
$$