

Cálculo 3 - 2025.1

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://anggtwu.net/2025.1-C3.html>

Links

Questão 1

(Total: 5.5 pts)

O diagrama de numerozinhos da última folha da prova corresponde a uma superfície $z = F(x, y)$ que tem 7 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 8 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 7 faces é que é a correta.

a) (0.5 pts) Mostre como dividir o plano em 7 polígonos que são as projeções destas faces no plano do papel.

b) (0.5 pts) Chame estas faces de face W (“oeste”), E (“leste”), NW (“noroeste”), NE (“nordeste”), SW (“sudoeste”), SE (“Sudeste”) e C (“centro”), e chame as equações dos planos delas de $F_W(x, y)$, $F_E(x, y)$, $F_{NW}(x, y)$, $F_{NE}(x, y)$, $F_{SW}(x, y)$, $F_{SE}(x, y)$ e $F_C(x, y)$. Dê as equações destes planos.

c) (0.5 pts) Sejam:

$$\begin{aligned} P_C &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x, y) \}, \\ P_{NW} &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_{NW}(x, y) \}, \\ r &= P_C \cap P_{NW}. \end{aligned}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

d) (0.5 pts) Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) (0.5 pts) Seja

$$A = \{0, 1, \dots, 10\} \times \{0, 1, \dots, 6\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A . Para cada ponto $(x, y) \in A$ represente graficamente $(x, y) + \frac{1}{3}\vec{\nabla}F(x, y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x, y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x, y) , e quando $\vec{\nabla}F(x, y)$ não existir faça um ‘×’ sobre o numerozinho que está no ponto (x, y) .

f) (1.5 pts) Sejam

$$\begin{aligned} Q(t) &= \begin{cases} (1, 5) + t\overrightarrow{(1, -2)} & \text{quando } t < 3, \\ (5, 2) + (t-3)\overrightarrow{(2, 1)} & \text{quando } 3 \leq t, \end{cases} \\ (x(t), y(t)) &= Q(t), \\ h(t) &= F(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0, 6]$.

g) (1.5 pts) Dê uma “definição por casos” pra função $h(t)$ que você obteve no item anterior. Repare que a $Q(t)$ do item anterior é definida por casos.

Questão 2

(Total: 4.5 pts)

Seja

$$F(x, y) = (x + 2)(x - y)(y + 2).$$

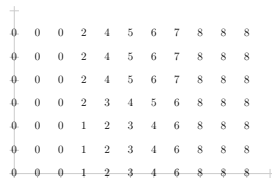
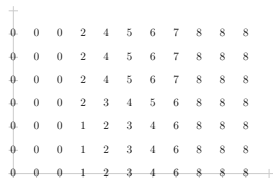
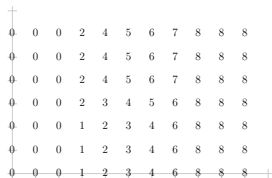
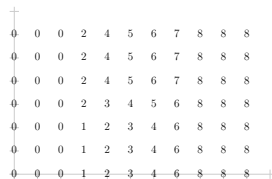
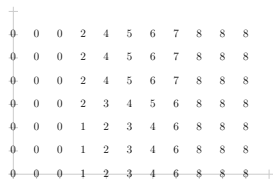
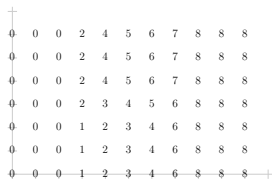
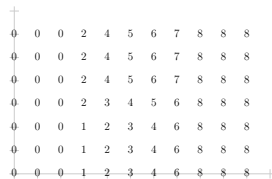
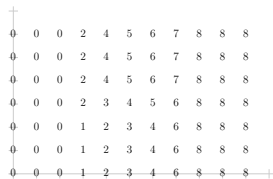
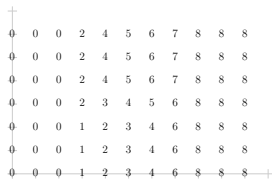
Nesta questão você vai ter que fazer várias cópias do diagrama de numerozinhos da função $F(x, y)$ para os pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

a) (1.0 pts) Desenhe o “campo gradiente” da função F nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla}F(x, y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não fiquem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $F(x, y)$, e sobre cada (x, y) com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ desenhe a seta $(x, y) + \frac{1}{10}\vec{\nabla}F(x, y)$.

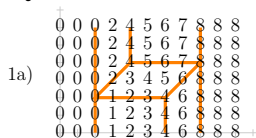
b) (3.5 pts) Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $F(x, y)$ para $z = 0$, $z = 6$, $z = 12$, $z = -6$ e $z = -12$.

Dicas:

- 1) O vetor gradiente num ponto (x, y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x, y) .
- 2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos pros itens (a) e (b) que disserem “versão final”, e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.



Questão 1: mini-gabarito

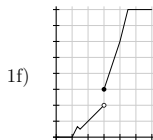


1b)

$$\begin{aligned} F_{NW}(x, y) &= 2x - 4 \\ F_{NE}(x, y) &= x \\ F_{SW}(x, y) &= x - 2 \\ F_{SE}(x, y) &= 2x - 8 \\ F_W(x, y) &= 0 \\ F_E(x, y) &= 8 \\ F_C(x, y) &= y + x - 4 \end{aligned}$$

1d)

$$r = \{ (2, 2, 0) + t \overrightarrow{(1, 1, -2)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$



1g)

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{quando } t < 1 \\ 2t - 2 & \text{quando } 1 \leq t < 4/3 \\ 2 - t & \text{quando } 4/3 \leq t < 3/2 \\ t - 1 & \text{quando } 3/2 \leq t < 3 \\ 3t - 6 & \text{quando } 3 \leq t < 4 \\ 4t - 10 & \text{quando } 4 \leq t < 9/2 \\ 8 & \text{quando } 9/2 \leq t \end{cases}$$

```
(%i4) item_c;
```

```
(%o4)
```

$$\begin{pmatrix} -2 & [0, 0, -4] \\ -1 & [1, 1, -2] \\ 0 & [2, 2, 0] \\ 1 & [3, 3, 2] \\ 2 & [4, 4, 4] \\ 3 & [5, 5, 6] \\ 4 & [6, 6, 8] \end{pmatrix}$$

```
(%i6) item_e;
```

```
(%o6)
```

$$\begin{pmatrix} [0, 0] & [0, 0] & X & [2, 0] & X & [1, 0] & [1, 0] & [1, 0] & X & [0, 0] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0, 0] & X & [2, 0] & X & [1, 0] & [1, 0] & [1, 0] & X & [0, 0] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0, 0] & X & [2, 0] & X & X & X & X & X & [0, 0] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0, 0] & X & X & [1, 1] & [1, 1] & [1, 1] & X & X & [0, 0] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0, 0] & X & X & X & X & X & [2, 0] & X & [0, 0] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0, 0] & X & [1, 0] & [1, 0] & [1, 0] & X & [2, 0] & X & [0, 0] & [0, 0] \\ [0, 0] & [0, 0] & X & [1, 0] & [1, 0] & [1, 0] & X & [2, 0] & X & [0, 0] & [0, 0] \end{pmatrix}$$

Questão 2: mini-gabarito

```
(%i1) map(numerozinhos, [F,gradF]);
```

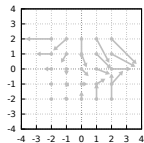
```
(%o1)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -12 & -16 & -12 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [-16,0] & [-8,-7] & [0,-12] & [8,-15] & [16,-16] \\ [-9,0] & [-3,-5] & [3,-8] & [9,-9] & [15,-8] \\ [-4,0] & [0,-3] & [4,-4] & [8,-3] & [12,0] \\ [-1,0] & [1,-1] & [3,0] & [5,3] & [7,8] \\ [0,0] & [0,1] & [0,4] & [0,9] & [0,16] \end{pmatrix}$$

```
(%i2) setrange(2)$
```

```
(%i3) myqdrawp(xyrange(), item_b_grads);
```

```
(%o3)
```



```
(%i4) myqdrawp(xyrange(), item_b_grads, item_b_curvas);
```

```
(%o4)
```

