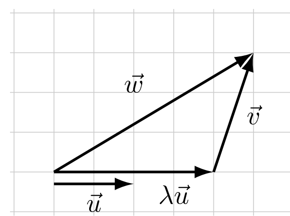
Material complementar para Geometria Analítica

Eduardo Ochs - ⟨eduardoochs@gmail.com⟩
http://angg.twu.net/material-para-GA.html
RCN/CURO/UFF, 21/fev/2020



Introdução

Quando a gente leciona uma disciplina a gente acaba preparando material que complemente os livros nos pontos em que os alunos costumam ter mais dúvidas... e nos últimos anos em que eu lecionei Geometria Analítica a grande maioria das dúvidas — pelo menos dos alunos que se manifestavam — eram sobre como passar entre casos gerais e casos particulares: os alunos não sabiam como transformar os teoremas dos livros ("muito abstratos"!) em casos concretos, não sabiam nem como começar a tentar generalizar algo que eles vissem num caso particular, não sabiam escrever uma hipótese, não sabiam *testar* uma hipótese, não sabiam nem mesmo testar se uma determinada reta desenhada num plano correspondia a uma determinada equação de reta...

Esses alunos não sabiam estudar pelos livros. Aliás, a maioria deles nem sabia *como* estudar — eles achavam que tinham que decorar fórmulas e procedimentos, mas tinham muito pouca noção do que cada trecho das fórmulas e procedimentos queria dizer, e muitos deles até achavam que *não dava tempo* de aprender os detalhes direito, e isso acabava deixando eles paralisados.

Este PDF é um "work in progress". Ele é essencialmente a versão de 2018.1 do material que eu usava com as minhas turmas de GA pra tentar complementar os livros-texto que tínhamos disponíveis online ou na biblioteca, que eram estes aqui:

Delgado, J., Frensel, K. e Santo, N.E., *Geometria Analítica 1*, CEDERJ. Disponível em: `https://canalcederj.cecierj.edu.br/recurso/4690`

Venturi, J.J., *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica* e *Cônicas e Quádricas*. Ed. Unificado. Disponível em: `https://www.geometriaanalitica.com.br/`

Reis, G.L., e Silva, V.V., *Geometria Analítica*. LTC.

Steinbruch, A., e Winterle, P., *Geometria Analítica*. Ed Makron.

Boulos, P., e Camargo, I. de., *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Ed. Prentice Hall Brasil.

Tem várias coisas que eu gostaria de modificar aqui, mas que não tenho tempo agora... as principais são: 1) a abordagem de vetores (que ficou axiomática demais), 2) a parte sobre senos e cossenos (em 2018.1 eu descobri, tarde demais, que os alunos aprendiam *bem* melhor de outro jeito), 3) o PDF deveria ter muitas referências explícitas aos livros pra forçar os alunos a compararem a nossa abordagem com as dos livros, mas por enquanto não tem quase nenhuma, 4) eu perdi o código-fonte em LaTeX dos exercícios e figuras que eu preparei sobre cônicas, e ainda não tive tempo de redigitá-los e inclui-los aqui... mas aqui tem um link pro PDF dele:

`http://angg.twu.net/LATEX/2018-1-GA-conicas.pdf`

Praticamente todo o material que eu produzi para as minhas aulas de Geometria Analítica no PURO/UFF está disponível online, incluindo fotos de praticamente todos os quadros a partir de 2012.2 — mesmo os das aulas mal preparadas

— e em 2013.2 eu aprendi a fazer "versões imprimíveis" dos quadros aumentando o contraste das fotos e produzindo um arquivo PDF com todos os quadros do semestre. Veja os links abaixo:

http://angg.twu.net/2018.1-GA.html
http://angg.twu.net/2018.1-GA/2018.1-GA.pdf
http://angg.twu.net/2018.1-GA/Makefile.html

As mesmas idéias num nível mais alto

A partir do meio de 2018 eu comecei a aplicar algumas das idéias que estão por trás deste material — *que o melhor modo ensinar GA "para crianças" é trabalhar em casos particulares e casos gerais ao mesmo tempo, em paralelo* — em áreas mais avançadas, como Teoria de Categorias, e a apresentá-las em congressos, seminários, workshops e artigos. Links:

http://angg.twu.net/math-b.html#zhas-for-children-2
http://angg.twu.net/logic-for-children-2018.html
http://angg.twu.net/math-b.html#2020-tallinn

Coisas MUITO importantes sobre Geometria Analítica

A matéria é sobre duas linguagens diferentes: a

- "Geometria", que é sobre coisas gráficas como pontos, retas e círculos, e a
- "Analítica", que é sobre "álgebra", sobre coisas matemáticas "formais" como contas, conjuntos e equações;

além disso Geometria Analítica é também sobre a TRADUÇÃO entre essas duas linguagens.

Lembre que boa parte do que você aprendeu sobre álgebra no ensino médio era sobre *resolver equações*.

Encontrar soluções de equações é difícil — são muitos métodos, e dá pra errar bastante no caminho — mas *testar* as soluções é fácil.

Boa parte do que você aprendeu (ou deveria ter aprendido) sobre geometria no ensino médio envolvia construções gráficas; por exemplo, a partir de pontos A, B, C,

Seja A' o ponto médio entre B e C,
Seja B' o ponto médio entre A e C,
Seja C' o ponto médio entre A e B,
Seja r_a a reta que passa por A' e é ortogonal a BC,
Seja r_b a reta que passa por B' e é ortogonal a AC,
Seja r_c a reta que passa por C' e é ortogonal a AB,
Seja D o ponto de interseção das retas r_a, r_b e r_c,
então D é o centro do círculo que passa por A, B e C.

Você **VAI TER QUE** aprender a definir seus objetos — pontos, retas, conjuntos, círculos, etc... isso provavelmente vai ser algo novo pra você e é algo que precisa de MUITO treino. Dá pra passar em Cálculo 1 e em Prog 1 só aprendendo a "ler" as definições que o professor e os livros mostram, mas em Geometria Analítica NÃO DÁ, em GA você vai ter que aprender a ler **E A ESCREVER** definições.

Dicas MUITO IMPORTANTES e pouco óbvias

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada "seja" ou "sejam" que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em "matematiquês" a gente quase não usa termos como "ele", "ela", "isso", "aquilo" e "lá" — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer (como nas pags 10 e **??**)... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo "esse aqui".

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas "querem dizer" e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu "método gráfico" está certo você vai poder conferir se o "método gráfico" e o "método contas" dão aos mesmos resultados. Exemplo: p.18.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Substituição

Uma das coisas que vamos usar neste curso e que não costuma ser apresentada em livros básicos — mas que eu uso na optativa de "Lógica pra Crianças" — é uma operação chamada *substituição simultânea*. Exemplo:

$$((x+y)\cdot z)\left[\begin{smallmatrix} x:=a+y \\ y:=b+z \\ z:=c+x \end{smallmatrix}\right] \quad = \quad ((a+y)+(b+z))\cdot(c+x).$$

Essa operação *pode* ser aplicada em expressões que não fazem sentido nenhum — por exemplo:

$$(\text{Vanessão 20 reais})\left[\text{a} := \left(\begin{smallmatrix} \int \odot \\ \square \end{smallmatrix}\right)\right] \quad = \quad (\text{V}\left(\begin{smallmatrix} \int \odot \\ \square \end{smallmatrix}\right)\text{ness}\widetilde{\left(\begin{smallmatrix} \int \odot \\ \square \end{smallmatrix}\right)}\text{o 20 re}\left(\begin{smallmatrix} \int \odot \\ \square \end{smallmatrix}\right)\text{is})$$

e às vezes vamos usá-la para atribuir sentido para expresões aparentemente abstratas. Por exemplo, na parte sobre sistemas de coordenadas vamos ter definições como

$$(a,b)_\Sigma = (10a+2, 100b+3) \qquad \text{para } a,b \in \mathbb{R}$$

que nos permite fazer

$$\begin{array}{l} ((a,b)_\Sigma = (10a+2, 100b+3))\left[\begin{smallmatrix} a:=4 \\ b:==5 \end{smallmatrix}\right] \\ = ((4,5)_\Sigma = (10\cdot 4+2, 100\cdot 5+3)) \\ = ((4,5)_\Sigma = (42, 503)) \end{array}$$

e fazendo isto pra vários valores de a e b a gente consegue montar uma tabela *(ainda não fiz)* e entender geometricamente como a operação $(a,b)_\Sigma$ funciona.

A substituição também serve pra gente testar equações:

$$\begin{array}{rcl} (x^2-5x+6=0)\left[x:=1\right] & = & (1^2-5\cdot 1+6=0) \\ & = & (1-5+6=0) \\ & = & (2=0) \\ & = & \mathbf{F} \\ (x^2-5x+6=0)\left[x:=2\right] & = & (2^2-5\cdot 2+6=0) \\ & = & (4-10+6=0) \\ & = & (0=0) \\ & = & \mathbf{V} \end{array}$$

e as "set comprehensions" das seções seguintes vão nos permitir escrever o conjunto das soluções de uma equação de um jeito claro, rápido, preciso e fácil de debugar *sem usar português:*

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2-5x+6=0 \,\} = \{2,3\}$$

Aos poucos a gente vai começar a usar substituições mais complicadas usando implicitamente a idéia de "tipos" das próximas páginas. Por exemplo, se $t \in \mathbb{R}$ esta substituição é válida,

$$\begin{array}{l} ((a,b)_\Sigma = (10a+2, 100b+3))\left[\begin{smallmatrix} a:=5t \\ b:=6t \end{smallmatrix}\right] \\ = ((5t,6t)_\Sigma = (10\cdot 5t+2, 100\cdot 6t+3)) \end{array}$$

mas não é válido substituir a ou b por uma expressão cujo resultado seja uma matriz.

Alguns “tipos” de objetos matemáticos familiares

Multiplicação de matrizes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}}_{3\times3}\underbrace{\begin{pmatrix}1000\\100\\10\end{pmatrix}}_{3\times1}=\underbrace{\begin{pmatrix}1230\\4560\\7890\end{pmatrix}}_{3\times1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}}_{3\times2}\underbrace{\begin{pmatrix}g&h&i&j\\k&l&m&n\end{pmatrix}}_{2\times4}=\underbrace{\begin{pmatrix}ag+bk&ah+bl&ai+bm&aj+bn\\cg+dk&ch+dl&ci+dm&cj+dn\\eg+fk&eh+fl&ei+fm&ej+fn\end{pmatrix}}_{3\times4}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}g&h&i&j\\k&l&m&n\end{pmatrix}}_{2\times4}\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}}_{3\times2}=\text{ erro}\qquad(\text{porque } 4\neq3)$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100&0\\10&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120&0\\340&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}100&0\\10&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100&200\\10&20\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}100\\10\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\10\\1\end{pmatrix}=(234)=234$$

Soma de matrizes:

$$\begin{pmatrix}10&20&30\\40&50&60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&23&34\\45&56&67\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10&20&30\\40&50&60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix}=\text{ erro}$$

Multiplicação de número por matriz:

$$10\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&30&40\\50&60&70\end{pmatrix}$$

Operações lógicas:

“E”:	“Ou”:	“Implica”:	“Não”:
$\mathbf{F}\&\mathbf{F}=\mathbf{F}$	$\mathbf{F}\vee\mathbf{F}=\mathbf{F}$	$\mathbf{F}\to\mathbf{F}=\mathbf{V}$	$\neg\mathbf{F}=\mathbf{V}$
$\mathbf{F}\&\mathbf{V}=\mathbf{F}$	$\mathbf{F}\vee\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\mathbf{F}\to\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\neg\mathbf{V}=\mathbf{F}$
$\mathbf{V}\&\mathbf{F}=\mathbf{F}$	$\mathbf{V}\vee\mathbf{F}=\mathbf{V}$	$\mathbf{V}\to\mathbf{F}=\mathbf{F}$	
$\mathbf{V}\&\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\mathbf{V}\vee\mathbf{V}=\mathbf{V}$	$\mathbf{V}\to\mathbf{V}=\mathbf{V}$	

Se $x=6$,

$$\underbrace{\underbrace{2<\underbrace{x}_{6}}_{\mathbf{V}}\,\&\,\underbrace{\underbrace{x}_{6}<5}_{\mathbf{F}}}_{\mathbf{F}}$$

“Set comprehensions”

Notação explícita, com geradores, filtros,
e um “;” separando os geradores e filtros da expressão final:

$$\begin{array}{lcl}
\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\} & = & \{10,20,30,40\} \\
\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\} & = & \{1,2,3,4\} \\
\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\} & = & \{3,4\} \\
\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\} & = & \{30,40\} \\
\{\underbrace{a \in \{10,20\}}_{\text{ger}}, \underbrace{b \in \{3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a+b}_{\text{expr}}\} & = & \{13,14,23,24\} \\
\{\underbrace{a \in \{1,2\}}_{\text{ger}}, \underbrace{b \in \{3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{(a,b)}_{\text{expr}}\} & = & \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}
\end{array}$$

Notações convencionais, com “|” ao invés de “;”:
Primeiro tipo — expressão final, “|”, geradores e filtros:

$$\begin{array}{lcl}
\{\, 10a \mid a \in \{1,2,3,4\} \,\} & = & \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\} \\
\{\, 10a \mid a \in \{1,2,3,4\}, a \geq 3 \,\} & = & \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}}\} \\
\{\, a \mid a \in \{1,2,3,4\} \,\} & = & \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\}
\end{array}$$

O segundo tipo — gerador, “|”, filtros —
pode ser convertido para o primeiro...
o truque é fazer a expressão final ser a variável do gerador:

$$\begin{array}{lcl}
\{\, a \in \{1,2,3,4\} \mid a \geq 3 \,\} & = & \\
\{\, a \mid a \in \{1,2,3,4\}, a \geq 3 \,\} & = & \{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{ger}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}\}
\end{array}$$

O que distingue as duas notacões “$\{\ldots|\ldots\}$” é
se o que vem antes da “|” é ou não um gerador.

Observações:

$$\{\, \text{gerador} \mid \text{filtros} \,\} = \{\text{gerador}, \text{filtros}; \underbrace{\text{variável do gerador}}_{\text{expr}}\}$$

$$\{\, \text{expr} \mid \text{geradores e filtros} \,\} = \{\text{geradores e filtros}; \text{expr}\}$$

As notações “$\{\ldots|\ldots\}$” são padrão e são usadas em muitos livros de matemática.

A notação “$\{\ldots;\ldots\}$” é bem rara; eu aprendi ela em artigos sobre linguagens de programação, e resolvi apresentar ela aqui porque acho que ela ajuda a explicar as duas notações “$\{\ldots|\ldots\}$”.

"Set comprehensions": como calcular usando tabelas

Alguns exemplos:

Se $A := \{x \in \{1,2\}; (x, 3-x)\}$
então $A = \{(1,2),(2,1)\}$:

x	$(x,3-x)$
1	(1,2)
2	(2,1)

Se $I := \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y < 6; (x,y)\}$
então $I = \{(1,3),(1,4),(1,5)\}$:

x	y	$x+y<6$	(x,y)
1	3	**V**	(1,3)
1	4	**V**	(1,4)
2	3	**V**	(2,3)
2	4	**F**	|
3	3	**F**	|
3	4	**F**	|

Se $D := \{\ (x, 2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\ \}$
então $D = \{x \in \{0,1,2,3\}; (x,2x)\}$,
$D = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6)\}$:

x	$(x,2x)$
0	(0,0)
1	(1,2)
2	(2,4)
3	(3,6)

Se $P := \{\ (x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid x \geq y\ \}$
então $P = \{(x,y) \in \{1,2,3\}^2, x \geq y; (x,y)\}$,
$P = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$:

(x,y)	x	y	$x \geq y$	(x,y)
(1,1)	1	1	**V**	(1,1)
(1,2)	1	2	**F**	|
(1,3)	1	3	**F**	|
(2,1)	2	1	**V**	(2,1)
(2,2)	2	2	**V**	(2,2)
(2,3)	2	3	**F**	|
(3,1)	3	1	**V**	(3,1)
(3,2)	3	2	**V**	(3,2)
(3,3)	3	3	**V**	(3,3)

Obs: os exemplos acima correspondem aos
exercícios 2A, 2I, 3D e 5P das próximas páginas.

Exercícios de "set comprehensions"

1) Represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{(1,4),(2,4),(1,3)\} \\
B & := & \{(1,3),(1,4),(2,4)\} \\
C & := & \{(1,3),(1,4),(2,4),(2,4)\} \\
D & := & \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \\
E & := & \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}
\end{array}$$

2) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{x \in \{1,2\}; (x, 3-x)\} \\
B & := & \{x \in \{1,2,3\}; (x, 3-x)\} \\
C & := & \{x \in \{0,1,2,3\}; (x, 3-x)\} \\
D & := & \{x \in \{0,0.5,1,\ldots,3\}; (x, 3-x)\} \\
E & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}; (x,y)\} \\
F & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,y)\} \\
G & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (y,x)\} \\
H & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,2)\} \\
I & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y<6; (x,y)\} \\
J & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y>4; (x,y)\} \\
K & := & \{x \in \{1,2,3,4\}, y \in \{1,2,3,4\}; (x,y)\} \\
L & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}; (x,y)\} \\
M & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=3; (x,y)\} \\
N & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, x=2; (x,y)\} \\
O & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, x+y=3; (x,y)\} \\
P & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=x; (x,y)\} \\
Q & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=x+1; (x,y)\} \\
R & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x; (x,y)\} \\
S & := & \{x, y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x+1; (x,y)\}
\end{array}$$

3) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{\,(x,0) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
B & := & \{\,(x,x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
C & := & \{\,(x,x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
D & := & \{\,(x,2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
E & := & \{\,(x,1) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
F & := & \{\,(x,1+x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
G & := & \{\,(x,1+x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
H & := & \{\,(x,1+2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
I & := & \{\,(x,2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
J & := & \{\,(x,2+x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
K & := & \{\,(x,2+x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
L & := & \{\,(x,2+2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
M & := & \{\,(x,2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
N & := & \{\,(x,2-x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
O & := & \{\,(x,2-x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
P & := & \{\,(x,2-2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\}
\end{array}$$

Produto cartesiano de conjuntos

$A \times B := \{a \in A, b \in B; (a,b)\}$
Exemplo: $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$.

Uma notação: $A^2 = A \times A$.
Exemplo: $\{3,4\}^2 = \{3,4\} \times \{3,4\} = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$.

Sejam:
$A = \{1,2,4\}$,
$B = \{2,3\}$,
$C = \{2,3,4\}$.

Exercícios

4) Calcule e represente graficamente:

a) $A \times A$	d) $B \times A$	g) $C \times A$
b) $A \times B$	e) $B \times B$	h) $C \times B$
c) $A \times C$	f) $B \times C$	i) $C \times C$

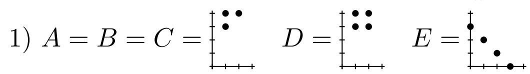
5) Calcule e represente graficamente:

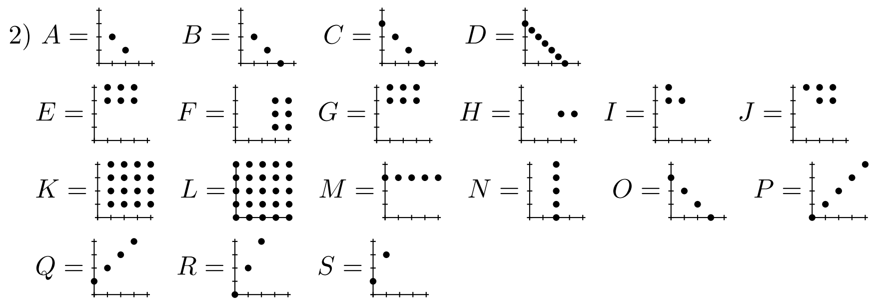
$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}; (x,y)\} \\
B & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}, y=2; (x,y)\} \\
C & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}, x=1; (x,y)\} \\
D & := & \{x,y \in \{0,1,2,3\}, y=x; (x,y)\} \\
E & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x; (x,y)\} \\
F & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=2x; (x,y)\} \\
G & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=x; (x,y)\} \\
H & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=x/2; (x,y)\} \\
I & := & \{(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2, y=x/2+1; (x,y)\} \\
J & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=2x\,\} \\
K & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=x\,\} \\
L & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=x/2\,\} \\
M & := & \{\,(x,y) \in \{0,1,2,3,4\}^2 \mid y=x/2+1\,\} \\
N & := & \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid 0x+0y=0\,\} \\
O & := & \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid 0x+0y=2\,\} \\
P & := & \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid x \geq y\,\}
\end{array}$$

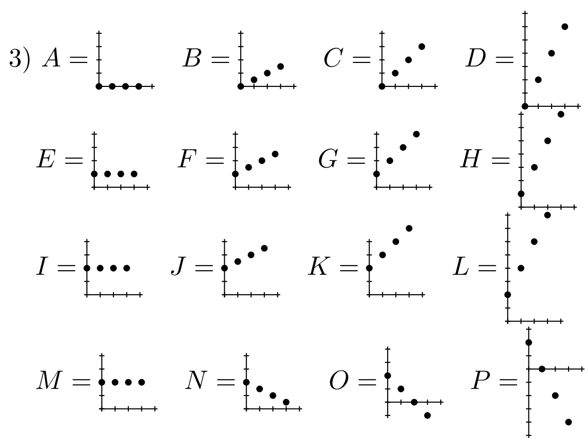
6) Represente graficamente:

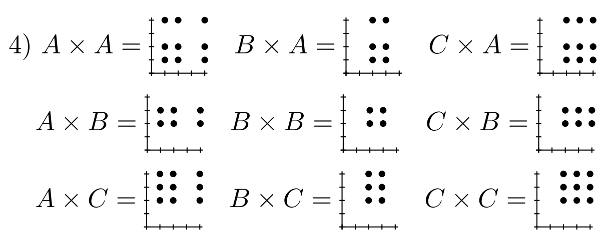
$$\begin{array}{rcl}
J' & := & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=2x\,\} \\
K' & := & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x\,\} \\
L' & := & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x/2\,\} \\
M' & := & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x/2+1\,\} \\
N' & := & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=0\,\} \\
O' & := & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x+0y=2\,\} \\
P' & := & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\,\}
\end{array}$$

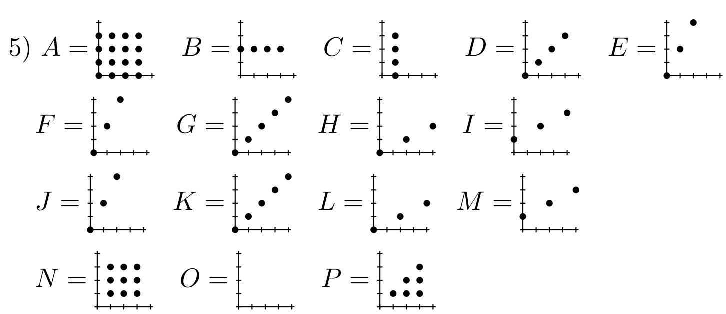
Gabarito dos exercícios de set comprehensions











Retas

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} R_{a,b} & = & \{\,(x,y)\in\{0,1,2,3,4,5\}^2 \mid y=ax+b\,\} \\ r_{a,b} & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b\,\} \\ R_{a,b,c} & = & \{\,(x,y)\in\{0,1,2,3,4,5\}^2 \mid ax+by=c\,\} \\ r_{a,b,c} & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\,\} \end{array}$$

Exercícios:

1) Represente graficamente:
a) $R_{0,0}, R_{1,0}, R_{2,0}$.
b) $R_{0,1}, R_{1,1}, R_{2,1}$.
c) $R_{0,2}, R_{1,2}, R_{2,2}$.
d) $r_{0,0}, r_{1,0}, r_{2,0}$.
e) $r_{0,1}, r_{1,1}, r_{2,1}$.
f) $r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2}$.

Dicas:
Todo conjunto da forma $r_{a,b}$ para $a,b\in\mathbb{R}$ é uma reta.
Se você comparar os resultados dos exercícios acima você vai conseguir entender — ou pelo menos fazer hipóteses sobre — o que "querem dizer" o a e o b em $r_{a,b}$.
Se você souber dois pontos de uma reta r você consegue traçá-la.

Mais exercícios:

2) Represente graficamente:
a) $R_{1,1,1}$, $R_{1,1,2}$, $R_{1,1,3}$.
b) $r_{1,1,1}$, $r_{1,1,2}$, $r_{1,1,3}$.
c) $R_{2,3,6}$, $r_{2,3,6}$.
d) $r_{1/2,0}$, $r_{1/2,1}$, $r_{1/2,2}$.
e) $r_{-1/2,0}$, $r_{-1/2,1}$, $r_{-1/2,2}$.
f) $R_{2,2,2}$, $R_{2,2,4}$, $R_{2,2,6}$.
g) $r_{2,2,2}$, $r_{2,2,4}$, $r_{2,2,6}$.

Mais dicas:
Dois conjuntos são diferentes se existe algum ponto que pertence a um e não pertence a outro — por exemplo, $(2,4)\in r_{2,0}$ e $(2,4)\notin r(3,0)$, portanto $r_{2,0}\neq r_{3,0}$.
Duas retas são iguais se existem dois pontos diferentes que pertencem a ambas.

Mais exercícios:

3) Encontre $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $r_{a,b}=r_{1,3,3}$. Dica: chutar e testar.
4) Encontre $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $r_{a,b}=r_{2,-1,4}$. Dica: chutar e testar.
5) Represente graficamente $R_{0,0,1}$ e $R_{0,0,0}$. Dica: item 7 da p.2.
6) Represente graficamente $r_{0,0,1}$ e $r_{0,0,0}$. Dica: item 7 da p.2.

Pontos e vetores

Se a, b, c são números então
(a, b) é um ponto de $\mathbb{R}^2$,
$\overrightarrow{(a, b)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$,
(a, b, c) é um ponto de $\mathbb{R}^3$,
$\overrightarrow{(a, b, c)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$.

Por enquanto nós só vamos usar $\mathbb{R}^2$ –
a *terceira parte do curso* vai ser sobre $\mathbb{R}^3$.

Podemos pensar que a *operação* $(\_, \_)$ recebe dois números e "monta" um ponto de $\mathbb{R}^2$ com eles; a operação $\overrightarrow{(\_, \_)}$ é similar, mas ela monta um vetor. Também temos operações , $\_{}_1$, $\_{}_2$ que "desmontam" pontos e vetores e retornam a primeira ou a segunda componente deles: $(3, 4)_1 = 3$, $(3, 4)_2 = 4$, $\overrightarrow{(3, 4)}_1 = 3$, $\overrightarrow{(3, 4)}_2 = 4$. Se $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 5)}$ então $\vec{v} = \overrightarrow{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$.

Operações com pontos e vetores (obs: $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$):

1) $(a, b) + \overrightarrow{(c, d)} = (a + c, b + d)$
2) $\overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a + c, b + d)}$
3) $(a, b) - (c, d) = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$
4) $(a, b) - \overrightarrow{(c, d)} = (a - c, b - d)$
5) $\overrightarrow{(a, b)} - \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$
6) $k \cdot \overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$
7) $\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd$ (!!!!)

As outras operações dão erro. Por exemplo:
$\overrightarrow{(a, b)} + (c, d) =$ erro
$(a, b) + (c, d) =$ erro
$(a, b) \cdot k =$ erro

Exercícios

6) Calcule:
a) $(2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})$
b) $((2, 3) + \overrightarrow{(4, 5)}) + \overrightarrow{(10, 20)}$
c) $4 \cdot ((20, 30) - (5, 10))$
d) $\overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}$
e) $\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
f) $(\overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}) \cdot \overrightarrow{(10, 100)}$
g) $\overrightarrow{(2, 3)} \cdot (\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)})$
h) $(\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)}) \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
i) $(\overrightarrow{(10, 100)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}) \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
j) $(\overrightarrow{(10, 100)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}) \cdot \overrightarrow{(5, 10)}$

Obs: dois modos de resolver o 6a:
(o segundo é o modo padrão)

$$\text{a)}\ \underbrace{(2, 3) + (\underbrace{\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)}}_{\substack{[\text{regra 2}] \\ = \overrightarrow{(14,25)}}})}_{\substack{[\text{regra 1}] \\ = (16,28)}}$$

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad & (2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)}) \\ & = (2, 3) + \overrightarrow{(14, 25)} \\ & = (16, 28) \end{aligned}$$

Como representar pontos e vetores graficamente

1) Represente num gráfico os pontos $A = (2,1)$, $B = (4,0)$, $C = (3,3)$ e escreva perto de cada um destes pontos o seu nome — A, B, C. Repare que se o seu gráfico estiver claro o suficiente o leitor vai entender que os seus pontos têm coordenadas inteiras e vai conseguir descobrir as coordenadas de A, B e C.

2) Vetores correspondem a *deslocamentos* vão ser representados como setas indo de um ponto a outro. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(2,1)}$ corresponde a um deslocamento de duas unidades para a direita e uma unidade pra cima; uma seta indo do ponto $D = (0,3)$ para o ponto $D + \vec{v} = (0+2, 3+1)$ é uma representação do vetor $\vec{v}$ "apoiado no ponto D". Um bom modo de representar graficamente o vetor $\vec{v}$ apoiado no ponto D é representando os pontos D e $D + \vec{v}$ — lembre de escrever os nomes D e $D + \vec{v}$ perto destes pontos no gráfico — e fazer uma seta de D para $D + \vec{v}$ e escrever $\vec{v}$ perto dela. Represente graficamente o vetor $\vec{v}$ apoiado no ponto D.

3) Um bom modo de representar graficamente a soma $D + \vec{v}$ é fazer o mesmo que no item anterior, representando graficamente os pontos D, $D + \vec{v}$ e a seta ("$\vec{v}$") indo de um para o outro. Represente as somas $A + \vec{v}$, $B + \vec{v}$, $C + \vec{v}$ e $D + \vec{v}$ num gráfico só, e repare que você vai ter várias setas com o nome "$\vec{v}$" — todas elas *são o mesmo vetor*, mas representado "apoiado em pontos diferentes".

4) A "aula 1" no livro do CEDERJ, que usa uma abordagem diferente da nossa, se chama "Vetores no plano - segmentos orientados". Dê uma olhada nas três primeiras páginas da "aula 1" (até o fim da "Definição 1") pra ter uma noção de como ele faz as coisas — repare que o início do livro não usa coordenadas, elas só aparecem depois! — e depois dê uma olhada nas proposições 1 e 2 do livro e nas definições 2 e 3.

5) Seja $\vec{w} = \overrightarrow{(0,-1)}$. Represente graficamente $A + \vec{w}$, $B + \vec{w}$, $C + \vec{w}$, $D + \vec{w}$.

6) Calcule $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{w} + \vec{v}$ usando as regras definidas na página anterior.

7) Represente graficamente $B + \vec{v}$, $(B + \vec{v}) + \vec{w}$ e $B + (\vec{v} + \vec{w})$ num gráfico só.

8) Leia a "Definição 4" no livro do CEDERJ e compare os desenhos dele com os seus desenhos do item anterior.

9) Represente graficamente $B+\vec{v}$, $(B+\vec{v})+\vec{w}$, $B+(\vec{v}+\vec{w})$, $B+\vec{w}$ e $(B+\vec{w})+\vec{v}$ num gráfico só.

10) Leia a p.23 do livro do CEDERJ.

11) Calcule $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $0\vec{v}$ e $(-1)\vec{v}$ usando as regras da página anterior.

12) Represente graficamente os vetores $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $0\vec{v}$ e $(-1)\vec{v}$ apoiando-os no ponto B.

13) Dê uma olhada nas "Propriedades da adição de vetores" e na "Definição 5" no livro do CEDERJ (páginas 23–25).

Retas (de novo)

Exercícios

1) Represente graficamente as retas abaixo.
Dica: encontre dois pontos de cada reta e marque-os no gráfico.
Dica 2: quando você tiver dificuldade substitua $\mathbb{R}^2$ por $\{0,1,2,3,4,5\}^2$.
Nas parametrizadas indique no gráfico os pontos associados a $t=0$ e $t=1$.

$r_a = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y=0\,\}$
$r_b = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y=4\,\}$
$r_c = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y=2\,\}$
$r_d = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=0\,\}$
$r_e = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=6\,\}$
$r_f = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=3\,\}$
$r_l = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=4\,\}$
$r_m = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=4+x\,\}$
$r_n = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=4-2x\,\}$
$r_g = \{\,(3,-1)+t\overrightarrow{(-1,1)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$
$r_h = \{\,(3,-1)+t\overrightarrow{(-2,1)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$
$r_i = \{\,(3,-1)+t\overrightarrow{(1,-1)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$
$r_j = \{\,(0,3)+t\overrightarrow{(2,0)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$
$r_k = \{\,(2,0)+t\overrightarrow{(0,1)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$
$s_a = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=0\,\}$
$s_b = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=4\,\}$
$s_c = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=2\,\}$
$s_d = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,3)}=0\,\}$
$s_e = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,3)}=6\,\}$
$s_f = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,3)}=3\,\}$
$r'_l = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0x+1y=4\,\}$
$r'_m = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (-1)x+1y=4\,\}$
$r'_n = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+1y=4\,\}$
$s_l = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(0,1)}=4\,\}$
$s_m = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(-1,1)}=4\,\}$
$s_n = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,1)}=4\,\}$

Se você tiver dificuldade com os exercícios envolvendo o produto $\overrightarrow{(a,b)}\cdot\overrightarrow{(c,d)} = ac+bd$ faça os exercícios abaixo e depois volte pro exercício 1 acima.

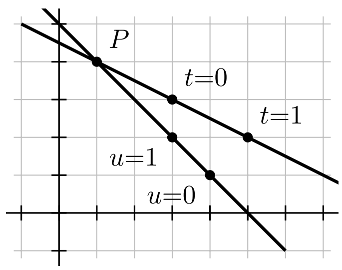
2) Encontre soluções para $\overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(2,3)}=4$ para: a) $x=1$, b) $x=10$, c) $y=5$.

3) Sejam $\vec{u}_1=\overrightarrow{(4,5)}$ e $\vec{u}_2=\overrightarrow{(6,7)}$. Calcule $\vec{u}_1+\vec{u}_2$, $(\vec{u}_1)_1$, $(\vec{u}_1)_2$.

4) Encontre 5 soluções diferentes para $\overrightarrow{(x,y)}\cdot\overrightarrow{(1,2)}=0$. Chame-as de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$. Desenhe no mesmo gráfico os vetores $\overrightarrow{(1,2)}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ apoiando todos no ponto $(0,0)$.

Interseções de retas parametrizadas

Se $r = \{\,(3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$
e $s = \{\,(4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R}\,\}$,
então r e s se intersectam no ponto $P = (1,4)$,
que está associado a $t = -1$ (em r) e a $u = 3$ (em s).
Graficamente,



Algebricamente, podemos convencer alguém do nosso resultado assim:
$(1,4) = (3,3) + (-1)\overrightarrow{(2,-1)} \in r$,
$(1,4) = (4,1) + 3\overrightarrow{(-1,1)} \in s$,
$(1,4) \in r \cap s$.

Repare que poderíamos ter encontrado $(x,y) = P \in r \cap s$ usando um sistema:
$(x,y) = (3+2t, 3-t)$
$(x,y) = (4-u, 1+u)$
Primeiro encontramos t e u tais que $(3+2t, 3-t) = (4-u, 1+u)$,
depois encontramos $(x,y) = (3+2t, 3-t) = (4-u, 1+u)$.

Exercício

1) Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s,
encontre $P \in r \cap s$, e verifique algebricamente que o seu P está certo.
a) $r = \{\,(1,0) + t\overrightarrow{(0,3)} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$, $s = \{\,(0,4) + u\overrightarrow{(2,0)} \mid u \in \mathbb{R}\,\}$
b) $r = \{\,(1,0) + t\overrightarrow{(3,1)} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$, $s = \{\,(0,2) + u\overrightarrow{(2,3)} \mid u \in \mathbb{R}\,\}$
c) $r = \{\,(1+3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\,\}$, $s = \{\,(2u, 2+3u) \mid u \in \mathbb{R}\,\}$
d) $r = \{\,(0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$, $s = \{\,(1,0) + u\overrightarrow{(1,3)} \mid u \in \mathbb{R}\,\}$
Obs: no (d) o olhômetro não basta, você vai precisar resolver um sistema.

Sistemas de coordenadas

Um "sistema de coordenadas" $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ em $\mathbb{R}^2$ é uma tripla formada por um ponto e dois vetores; por exemplo, podemos ter $\Sigma = ((2,3), \overrightarrow{(2,1)}, \overrightarrow{(0,-1)})$ — aí $O = (2,3)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,-1)}$. Até agora nós só usamos pontos com coordenadas x e y, mas agora vamos começar a falar das "coordenada a e b" de um ponto, e elas vão depender da escolha do sistema de coordenadas Σ. A definição importante (que só vale para esta página e a seguinte!) é:

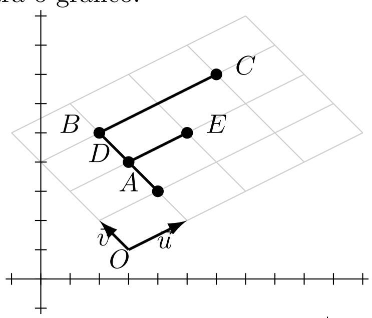
$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$.

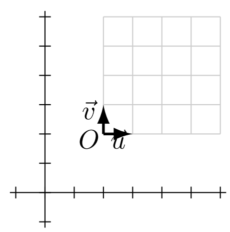
Exercícios

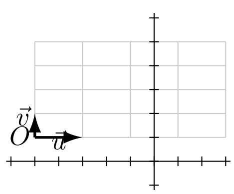
1) $((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v})\left[\begin{smallmatrix} a:=3 \\ b:=4 \end{smallmatrix}\right] = ?$

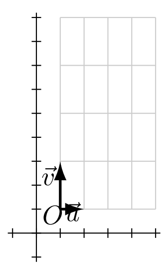
2) $((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v})\left[\begin{smallmatrix} O:=(3,1) \\ \vec{u}:=\overrightarrow{(2,1)} \\ \vec{v}:=\overrightarrow{(-1,1)} \end{smallmatrix}\right] = ?$

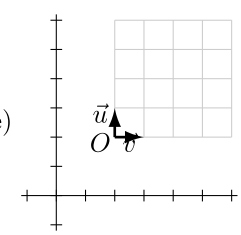
3) Em cada um dos casos a até f abaixo descubra quem são O, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ olhando para o gráfico.

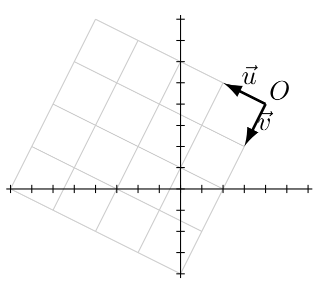
a) 

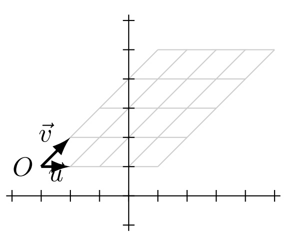
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

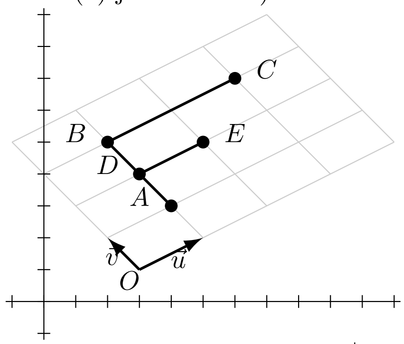
4a) Represente graficamente os pontos $(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$, $(0,1)_\Sigma$, $(1,1)_\Sigma$, $(2,1)_\Sigma$, $(0,2)_\Sigma$, $(1,2)_\Sigma$, $(2,2)_\Sigma$ num gráfico só para o Σ do item (a) acima, e escreva perto de cada ponto o nome dele — por exemplo, "$(1,2)_\Sigma$".

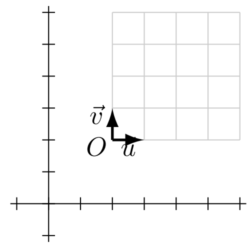
4b, 4c, 4d, 4e, 4f, 4g) Faça o mesmo para o Σ do item (b), do item (c), etc.

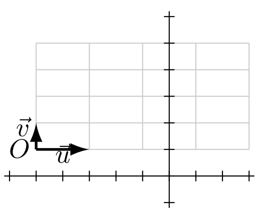
Sistemas de coordenadas (2)

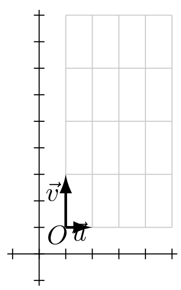
Cada uma das figuras abaixo usa um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ diferente; lembre que $(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$. Sejam:
$B = (1,3)_\Sigma$, $C = (3,3)_\Sigma$,
$D = (1,2)_\Sigma$, $E = (2,2)_\Sigma$,
$A = (1,1)_\Sigma$.

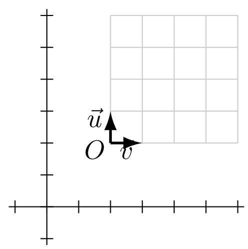
Exercício. Em cada um dos casos abaixo desenhe a figura formada pelos pontos A, B, C, D e E e pelos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.
(O item (a) já está feito.)

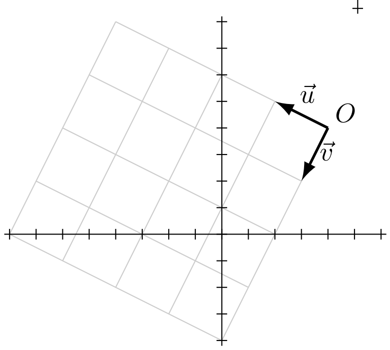
a) 

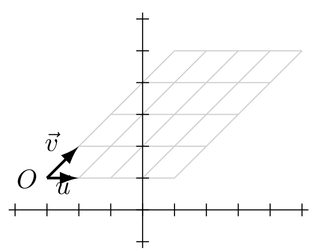
b) 

c) 

d) 

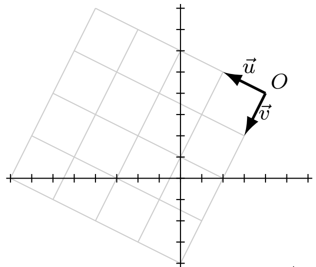
e) 

f) 

g) 

Sistemas de equações e sistemas de coordenadas

No item (f) da página anterior temos:



$O = (4,4)$
$\vec{u} = \overrightarrow{(-2,1)}$
$\vec{v} = \overrightarrow{(-1,-2)}$

$(a,b)_\Sigma = (4,4) + a\overrightarrow{(-2,1)} + b\overrightarrow{(-1,-2)}$
$(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b) \qquad (*)$

$(a,b)_\Sigma$	$=$	(x,y)
$(0,0)_\Sigma$	$=$	$(4,4)$
$(1,0)_\Sigma$	$=$	$(2,5)$
$(0,1)_\Sigma$	$=$	$(3,2)$
$A = (1,1)_\Sigma$	$=$	$?_a$
$B = (1,3)_\Sigma$	$=$	$?_b$
$C = (3,3)_\Sigma$	$=$	$?_c$
$D = (1,2)_\Sigma$	$=$	$?_d$
$E = (2,2)_\Sigma$	$=$	$?_e$
$?_f$	$=$	$(0,6)$
$?_g$	$=$	$(-1,4)$
$?_h$	$=$	$(5,1)$
$?_i$	$=$	$(1,2)$
$?_j$	$=$	$(1,1)$
$?_k$	$=$	$(2,1)$

Os itens (a) até (h) acima ("$?_a$" a "$?_h$") são fáceis de resolver "no olhômetro" usando o gráfico, e é fácil conferir os resultados algebricamente usando a fórmula $(*)$.

No item (i) dá pra ver pelo gráfico que os valores de a e b em $(a,b)_\Sigma = (1,2)$ vão ser fracionários e difíceis de chutar – mas podemos obtê-los *algebricamente*, resolvendo um *sistema de equações*.

Solução do "$?_i$":

$$\begin{aligned}
(a,b)_\Sigma &= (1,2) \\
(4-2a-b, 4+a-2b) &= (1,2) \\
4-2a-b &= 1 \\
4+a-2b &= 2 \\
-2a-b &= -3 \\
a-2b &= -2 \\
-2a+3 &= b \\
a &= -2+2b \\
-2(-2+2b)+3 &= b \\
4-4b+3 &= b \\
7 &= 5b \\
b &= \tfrac{7}{5} \\
a &= -2+2\tfrac{7}{5} \\
&= \tfrac{-10}{5} + \tfrac{14}{5} \\
&= \tfrac{4}{5} \\
(\tfrac{4}{5}, \tfrac{7}{5})_\Sigma &= (1,2)
\end{aligned}$$

Uma generalização:

$$\begin{aligned}
(a,b)_\Sigma &= (x,y) \\
(4-2a-b, 4+a-2b) &= (x,y) \\
4-2a-b &= x \\
4+a-2b &= y \\
4-2a-x &= b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= y+2b-4 \\
&= y+2(4-2a-x)-4 \\
&= y+8-4a-2x-4 \\
&= y-2x+4-4a \\
5a &= y-2x+4 \\
a &= (y-2x+4)/5 \\
&= \tfrac{1}{5}y - \tfrac{2}{5}x + \tfrac{4}{5} \\
&= \tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{5}y \\
b &= 4 - 2(\tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{5}y) - x \\
&= \tfrac{20}{5} - \tfrac{8}{5} + \tfrac{4}{5}x - \tfrac{2}{5}y - \tfrac{5}{5}x \\
&= \tfrac{12}{5} - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{2}{5}y
\end{aligned}$$

$(\tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{5}y, \tfrac{12}{5} - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{2}{5}y)_\Sigma = (x,y)$

Vamos chamar a fórmula acima de $(**)$.

Exercícios

1) Resolva "$?_j$" pelo sistema.
2) Resolva "$?_k$" pelo sistema.
3) Verifique que as suas soluções de "$?_a$" até "$?_k$" obedecem $(*)$ e $(**)$.
4) Resolva "$?_j$" e "$?_k$" por $(**)$.

Sistemas de equações e sistemas de coordenadas (2)

Um outro modo de organizar os problemas da página anterior é o seguinte.
Temos as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ abaixo,

$$\begin{array}{lrcl}
[x] & x & = & 4-2a-b \\
[y] & y & = & 4+a-2b \\
[a] & a & = & \frac{4}{5}-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y \\
[b] & b & = & \frac{12}{5}-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y
\end{array}$$

e queremos preencher a tabela abaixo de tal forma que em cada linha
as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ sejam obedecidas:

a	b	x	y
0	0	4	4
1	0	2	5
0	1	3	2
1	1	·	·
1	3	·	·
3	3	·	·
1	2	·	·
2	2	·	·
·	·	0	6
·	·	-1	4
·	·	5	1
·	·	1	2
·	·	1	1
·	·	2	1

Note que:
1) quando as lacunas são em x e y é mais rápido usar as equações $[x]$ e $[y]$,
2) quando as lacunas são em a e b é mais rápido usar as equações $[a]$ e $[b]$,
3) as equações $[a]$ e $[b]$ são *consequências* das $[x]$ e $[y]$,
4) $[x]$ e $[y]$ são consequências de $(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b) = (x,y)$,
5) $\binom{x}{y} = \binom{4-2a-b}{4+a-2b} = \binom{4}{4} + \binom{-2a-b}{a-2b} = \binom{4}{4} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \binom{a}{b}$
6) $\binom{x}{y} = \binom{O_1+au_1+bv_1}{O_2+au_2+bv_2} = \binom{O_1}{O_2} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \binom{a}{b}$

Exercícios

1) No item (g) duas páginas atrás temos $O=(-3,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1)}$, $(a,b)_\Sigma = (-3+a+b, 1+b)$. Obtenha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ para este caso.
2) Faça o mesmo para o item (a), onde $O=(3,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

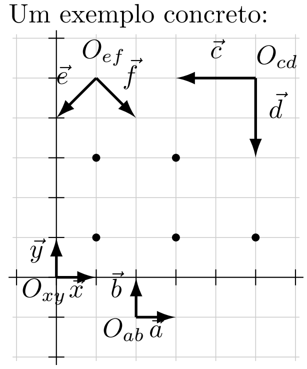
Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo

Há muitas notações possíveis para lidar com situações em que temos vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo – vamos ver *uma* delas.

Vamos ter:
- as coordenadas x, y e os eixos x e y,
- as coordenadas a, b e os eixos a e b,
- as coordenadas c, d e os eixos d e d,
- as coordenadas e, f e os eixos e e f,

e além disso vamos ter as origens O_{xy}, O_{ab}, O_{cd}, O_{ef} de cada um dos sistemas de coordenadas e os vetores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$.

Um exemplo concreto:



$$
\begin{array}{lll}
O_{xy} = (0,0) & \vec{x} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{y} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{ab} = (2,-1) & \vec{a} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{b} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{cd} = (5,5) & \vec{c} = \overrightarrow{(-2,0)} & \vec{d} = \overrightarrow{(0,-2)} \\
O_{ef} = (1,5) & \vec{e} = \overrightarrow{(-1,-1)} & \vec{f} = \overrightarrow{(1,-1)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
(x,y)_{xy} & = & O_{xy} + x\vec{x} + y\vec{y} & = & (x,y) \\
(a,b)_{ab} & = & O_{ab} + a\vec{a} + b\vec{b} & = & (a+2, b-1) \\
(c,d)_{cd} & = & O_{cd} + c\vec{c} + d\vec{d} \\
(e,f)_{ef} & = & O_{ef} + e\vec{e} + f\vec{f}
\end{array}
$$

Um modo de entender esta notação é:

$$
\begin{array}{l}
\Big((c,d)_{cd} \;=\; O_{cd} + c\vec{c} + d\vec{d}\Big) \begin{bmatrix} O_{cd}:=(5,5) \\ \vec{c}:=\overrightarrow{(-2,0)} \\ \vec{d}=\overrightarrow{(0,-2)} \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} c:=3 \\ d:=4 \end{smallmatrix}\right] \\
= \Big((c,d)_{cd} \;=\; (5,5) + c\overrightarrow{(-2,0)} + d\overrightarrow{(0,-2)}\Big) \left[\begin{smallmatrix} c:=3 \\ d:=4 \end{smallmatrix}\right] \\
= \Big((3,4)_{cd} \;=\; (5,5) + 3\overrightarrow{(-2,0)} + 4\overrightarrow{(0,-2)}\Big)
\end{array}
$$

Nós vimos (na p.14) que as notações "P_1" e "P_2" dão a "primeira componente" e a "segunda componente" de um ponto P. Se usarmos as notações P_x, P_x, P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f para as "coordenadas" x, y, a, b, c, d, e, f de um ponto P temos:

$P = (P_x, P_y)_{xy} = (P_a, P_b)_{ab} = (P_c, P_d)_{cd} = (P_e, P_f)_{ef}$

e se considerarmos que x, y, a, b, c, d, e, f são variáveis que "variam juntas" (como nas págs 20 e 21), a condição que elas obedecem é:

$(x,y) = (x,y)_{xy} = (a,b)_{ab} = (c,d)_{cd} = (e,f)_{ef}$

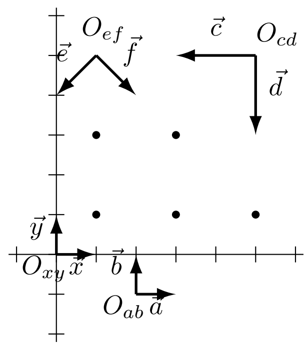
Exercícios

1) Digamos que $P = (3,1)$. Descubra P_x, P_x, P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f.

2) Digamos que $(x,y) = (5,1)$. Descubra a, b, c, d, e, f.

Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo (2)

Podemos usar o diagrama da página anterior — reproduzido abaixo — para desenhar "grids" como os das páginas 18 e 19. Esse diagrama define sistemas de coordenadas $(O_{xy}, \vec{x}, \vec{y})$, $(O_{ab}, \vec{a}, \vec{b})$, $(O_{cd}, \vec{c}, \vec{d})$, $(O_{ef}, \vec{e}, \vec{f})$,



$$\begin{array}{lll}
O_{xy} = (0,0) & \vec{x} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{y} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{ab} = (2,-1) & \vec{a} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{b} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{cd} = (5,5) & \vec{c} = \overrightarrow{(-2,0)} & \vec{d} = \overrightarrow{(0,-2)} \\
O_{ef} = (1,5) & \vec{e} = \overrightarrow{(-1,-1)} & \vec{f} = \overrightarrow{(1,-1)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lclcl}
(x,y)_{xy} & = & O_{xy} + x\vec{x} + y\vec{y} & = & (x,y) \\
(a,b)_{ab} & = & O_{ab} + a\vec{a} + b\vec{b} & = & (a+2, b-1) \\
(c,d)_{cd} & = & O_{cd} + c\vec{c} + d\vec{d} & & \\
(e,f)_{ef} & = & O_{ef} + e\vec{e} + f\vec{f} & &
\end{array}$$

Exercícios

1) Trace:
uma reta contendo os pontos $(0,0)_{ef}$, $(1,0)_{ef}$, $(2,0)_{ef}$ e chame-a de "$f = 0$",
uma reta contendo os pontos $(0,1)_{ef}$, $(1,1)_{ef}$, $(2,1)_{ef}$ e chame-a de "$f = 0$",
uma reta contendo os pontos $(0,2)_{ef}$, $(1,2)_{ef}$, $(2,2)_{ef}$ e chame-a de "$f = 0$",
uma reta contendo os pontos $(0,0)_{ef}$, $(0,1)_{ef}$, $(0,2)_{ef}$ e chame-a de "$e = 0$",
uma reta contendo os pontos $(1,0)_{ef}$, $(1,1)_{ef}$, $(1,2)_{ef}$ e chame-a de "$e = 1$",
uma reta contendo os pontos $(2,0)_{ef}$, $(2,1)_{ef}$, $(2,2)_{ef}$ e chame-a de "$e = 2$".

2) Faça a mesma coisa para as retas "$c = 0$", "$c = 1$", "$c = 2$", "$d = 0$", "$d = 1$" e "$d = 2$", mas agora só visualizando essas retas mentalmente, sem desenhá-las.

3) Idem para "$a = 0$", "$a = 1$", "$a = 2$", "$b = 0$", "$b = 1$" e "$b = 2$".

4) Verifique que o ponto $(1,2)_{ef}$ está na interseção das retas $e = 1$ e $f = 2$.

5) Verifique que o ponto $(2,3)_{cd}$ está na interseção das retas $c = 2$ e $d = 3$.

Obs: os exercícios acima vão ser bem importantes para a parte 2 do curso, que é sobre cônicas em $\mathbb{R}^2$... por exemplo, pra desenhar uma "hipérbole torta" em $\mathbb{R}^2$ a gente vai desenhar O_{uv}, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, depois as retas $u = 0$ e $v = 0$ e depois os pontos $(1/2,2)_{uv}$, $(1,1)_{uv}$, $(2,1/2)_{uv}$, $(-1/2,-2)_{uv}$, $(-1,-1)_{uv}$, $(-2,-1/2)_{uv}$.

6) Complete, usando o diagrama acima e olhômetro:

ponto	$(\_,\_)_{xy}$	$(\_,\_)_{ab}$	$(\_,\_)_{cd}$	$(\_,\_)_{ef}$
P	$(1,1)_{xy}$	$(-1,2)_{ab}$	$(2,2)_{cd}$	
Q	$(3,1)_{xy}$	$(1,2)_{ab}$	$(1,2)_{cd}$	$(1,3)_{ef}$
R	$(5,1)_{xy}$			
S	$(1,3)_{xy}$			
T	$(3,3)_{xy}$			

Visualizando $F(x,y)$

Um bom modo de começar a entender visualmente o comportamento de uma função $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é fazendo diagramas como os abaixo, em que a gente escreve sobre cada ponto (x,y) o valor de $F(x,y)$ naquele ponto... por exemplo, se $F(x,y) = x^2 + y^2$ então $F(3,2) = 9 + 4 = 13$, e a gente escreve "13" no ponto $(3,2)$. Exemplos:

$$\begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = x \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = 2y \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \end{array} \qquad \begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = x+y \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = xy \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} -9 & -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 9 & 6 & 3 & 0 & -3 & -6 & -9 \end{array} \qquad \begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = x^2+y^2 \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 13 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 13 \\ 10 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 10 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ 13 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 13 \end{array}$$

Repare que dá pra usar o diagrama de $F(x,y) = x + y$ pra ver onde $x + y = 0$, onde $x + y = 3$, etc.

Exercícios

1) Faça diagramas como os acima para as funções:
a) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$
b) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)}$
c) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)}$
d) $F(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (x, y \in \{-5, -4, \ldots, 5\}^2)$
e) $F(x,y) = x^2 - y$
f) $F(x,y) = y^2 - x$
g) $F(x,y) = xy$

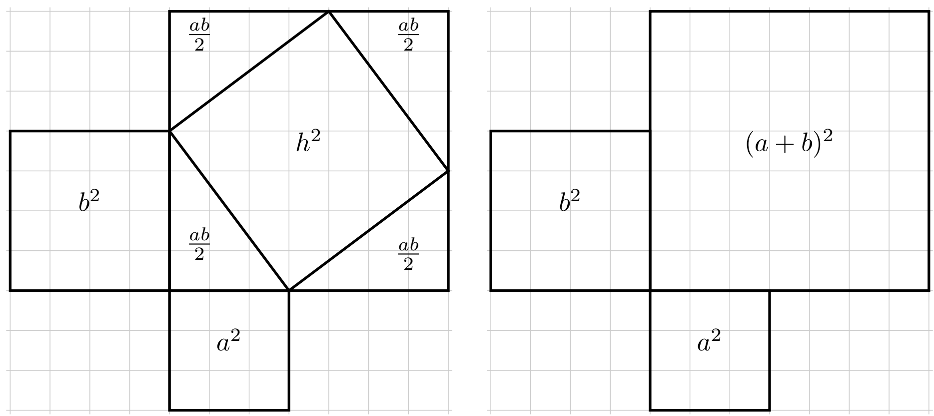
2) Use os diagramas do exercício anterior para esboçar os conjuntos abaixo (que vão ser retas ou curvas):

a0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 0 \,\}$
a2) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 2 \,\}$
a4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 4 \,\}$
a-2) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = -2 \,\}$
b0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 0 \,\}$
b3) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 3 \,\}$
b6) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 6 \,\}$
b-3) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = -3 \,\}$
c0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 0 \,\}$
c2) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 2 \,\}$
c4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 4 \,\}$
c-2) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = -2 \,\}$

d25) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25 \,\}$
d4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \,\}$
d1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$
d0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0 \,\}$
d-1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = -1 \,\}$
e0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0 \,\}$
e1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 1 \,\}$
f0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 0 \,\}$
f1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 1 \,\}$
g0) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \,\}$
g1) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \,\}$
g4) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 4 \,\}$

O teorema de Pitágoras

Para calcular a hipotenusa h de um triângulo retângulo com catetos a e b podemos fazer estas figuras:



Temos:
$h^2 + 4\frac{ab}{2} = (a+b)^2$
$h^2 + 4\frac{ab}{2} = h^2 + 2ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$h^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$
$h^2 = a^2 + b^2$
$h = \sqrt{a^2 + b^2}$

A figura acima tem $a = 3$ e $b = 4$ e portanto (ééé!!!) tem $h = 5$.

Exercícios

1) Faça uma figura parecida com a acima mas com $a = 1$ e $b = 2$, e use-a pra se convencer de que num triângulo retângulo com catetos de comprimentos 1 e 2 a hipotenusa tem comprimento $\sqrt{5}$.

Repare que o teorema de Pitágoras nos dá um modo de calcular *distâncias* em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, digamos que $A = (2,1)$ e $B = (4,5)$ e que queremos calcular $d(A,B)$; basta definir $C = (4,1)$ e calcular a hipotenusa do triângulo ΔABC... seus catetos têm comprimentos $d(A,C) = d((2,1),(4,1)) = 2$ e $d(B,C) = d((4,5),(4,1)) = 4$ — distâncias entre pontos na mesma horizontal ou na mesma vertical são muito fáceis de calcular! — e $d(A,C) = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$.

Nos próximos exercícios suponha que $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$.
2) Verifique que $d(P,Q) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.
3) Verifique que $d(P,Q) = \sqrt{(Q-P)\cdot(Q-P)}$.
4) Verifique que se $P = (0,0)$ então $d(P,Q) = \sqrt{c^2+d^2}$.
5) Verifique que se $Q = (0,0)$ então $d(P,Q) = \sqrt{a^2+b^2}$.
6) Verifique que se $b = d$ então $d(P,Q) = \sqrt{(c-a)^2} = |c-a|$.
7) Mostre que nem sempre $\sqrt{(c-a)^2} = c - a$.

Comprimentos ("normas") de vetores e ortogonalidade

Vamos definir quatro operações novas:
$||\vec{v}||$ é a *norma* (ou o *comprimento*) do vetor $\vec{v}$.
$\overrightarrow{PQ}$ é o *vetor que vai do ponto P para o ponto Q*.
$d(P, Q)$ é a *distância do ponto P ao ponto Q*.
$\vec{v} \perp \vec{w}$ é "*o vetor $\vec{v}$ é ortogonal ao vetor $\vec{w}$*".

Formalmente:
$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$,
$\overrightarrow{PQ} = Q - P$,
$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$,
$\vec{v} \perp \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w} = 0)$.

Note que $\vec{v} \perp \vec{w}$ responde **V** ou **F**. Por exemplo,
$\overrightarrow{(1,2)} \perp \overrightarrow{(3,4)} = (\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{(3,4)} = 0) = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 0) = \mathbf{F}$, e
$\overrightarrow{(1,2)} \perp \overrightarrow{(20,-10)} = (20 - 20 = 0) = \mathbf{V}$.

Exercícios

Calcule:
1) $||\overrightarrow{(1,2)}||$
2) $||\overrightarrow{(3,4)}||$
3) $||\overrightarrow{(4,-3)}||$
4) $||10 \cdot \overrightarrow{(3,4)}||$
5) $||-10 \cdot \overrightarrow{(3,4)}||$
6) $||-10 \cdot \overrightarrow{(3,4)}||$
7) $\overrightarrow{(2,0)(3,4)}$
8) $\overrightarrow{(2,0)((3,4) + \overrightarrow{(1,1)})}$
9) $d((3,4),(2,0))$
10) $d((2,0),(3,4))$
11) $d((2,0),(3,4) + \overrightarrow{(1,1)})$
12) $d((a,b),(a,b) + \overrightarrow{(c,d)})$
13) $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(b,-a)}$
14) $\overrightarrow{(a,b)} \cdot (k \cdot \overrightarrow{(b,-a)})$
15) $\overrightarrow{(a,b)} \perp \overrightarrow{(b,-a)}$
16) $\overrightarrow{(a,b)} \perp (k \cdot \overrightarrow{(b,-a)})$
17) $\overrightarrow{(1,2)} \perp \overrightarrow{(3,4)}$

Uma demonstração errada
Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
(PE) & = & (||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||) \ , \\
(DE) & = & \left(\begin{array}{rcl}
||k\overrightarrow{(a,b)}|| & = & ||\overrightarrow{(ka,kb)}|| \\
 & = & \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\
 & = & \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} \\
 & = & \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} \\
 & = & k\sqrt{a^2 + b^2} \\
 & = & k||\overrightarrow{(a,b)}||
\end{array} \right) .
\end{array}
$$

Exercícios
1) Verifique se (PE) é verdade nos seguintes casos:
a) $(PE)\left[\begin{smallmatrix} k:=2 \\ \vec{v}=\overrightarrow{(3,0)} \end{smallmatrix}\right]$
b) $(PE)\left[\begin{smallmatrix} k:=2 \\ \vec{v}=\overrightarrow{(3,4)} \end{smallmatrix}\right]$
c) $(PE)\left[\begin{smallmatrix} k:=0 \\ \vec{v}=\overrightarrow{(3,4)} \end{smallmatrix}\right]$
d) $(PE)\left[\begin{smallmatrix} k:=-10 \\ \vec{v}=\overrightarrow{(3,4)} \end{smallmatrix}\right]$

Uma demonstração está correta quando todos os seus passos estão corretos e quando além disso é fácil entender porque cada passo dela é verdade. A demonstração (DE) é *aparentemente* uma demonstração correta, mas o exercício abaixo mostra um modo de encontrar o passo errado dela.

2) Calcule o valor de cada expressão entre '='s em $(DE)\left[\begin{smallmatrix} k:=-10 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{smallmatrix}\right]$ e descubra qual é o passo errado.

O melhor modo de *aprender* a fazer demonstrações é *começar* com demonstrações que são só séries de igualdades, e nas quais cada igualdade é consequência de *alguma* regra que o leitor já conhece... isso depende do seu leitor! Se você estiver escrevendo para um "leitor burro" cada passo seu tem que ser uma aplicação de uma regra só, e onde você usar uma regra mais complicada você tem que deixar claro que regra é essa.

O melhor modo de *começar* a aprender a fazer demonstrações é escrevendo *para um leitor burro* demonstrações que são só séries de igualdades — as dos exercícios da próxima página.

Propriedades das operações básicas com pontos e vetores

Algumas propriedades de operações básicas como '+', '−' e '·' têm nomes famosos: comutatividade, associatividade e distributividade. Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
(CA) & = & (A+B=B+A) \\
(CM) & = & (A\cdot B=B\cdot A) \\
(CS) & = & (A-B=B-A) \\
(AA) & = & ((A+B)+C=A+(B+C)) \\
(AM) & = & ((A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)) \\
(AS) & = & ((A-B)-C=A-(B-C)) \\
(DMA) & = & (A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C) \\
(DMS) & = & (A\cdot(B-C)=A\cdot B-A\cdot C) \\
(DAM) & = & ((A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C) \\
(DSM) & = & ((A-B)\cdot C=A\cdot C-B\cdot C) \\
(AM') & = & ((A\cdot B)\cdot C=(A\cdot C)\cdot B)
\end{array}$$

Nem todas elas são verdadeiras para números — por exemplo, $(CS)\left[\begin{smallmatrix}A:=2\\B:=3\end{smallmatrix}\right]$ é falsa — e algumas delas são verdadeiras para números mas não para matrizes — a p.7 tem dois exemplos de que (CM) é falsa para matrizes. Nossos primeiros exercícios de demonstrações vão ser exercícios de "V/F/Justifique" adaptando as "propriedades" acima para as operações com pontos e vetores.

Exemplos

$(DMA)\left[\begin{smallmatrix}A:=k\\B:=\overrightarrow{(a,b)}\\C:=\overrightarrow{(c,d)}\end{smallmatrix}\right]$ é verdadeira porque:

$$\begin{array}{rcll}
k\cdot(\overrightarrow{(a,b)}+\overrightarrow{(c,d)}) & = & k\cdot\overrightarrow{(a+c,b+d)} & \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
& = & \overrightarrow{(k(a+c),k(b+d))} & \text{(pela regra 6 da p.14)} \\
& = & \overrightarrow{(ka+kc,kb+kd)} & \\
& = & \overrightarrow{(ka,kb)}+\overrightarrow{(kc,kd)} & \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
& = & k\overrightarrow{(a,b)}+k\overrightarrow{(c,d)} & \text{(pela regra 6 da p.14)}
\end{array}$$

$(CS)\left[\begin{smallmatrix}A:=(a,b)\\B:=\overrightarrow{(c,d)}\end{smallmatrix}\right]$ é falsa porque $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}=(a+c,b+d)$ mas $\overrightarrow{(c,d)}+(a,b)=\text{erro}$.

Exercícios

(V/F/justifique; use as dicas da próxima página)

1) $(CA)\left[\begin{smallmatrix}A:=\overrightarrow{(a,b)}\\B:=\overrightarrow{(c,d)}\end{smallmatrix}\right]$

2) $(AA)\left[\begin{smallmatrix}A:=(a,b)\\B:=\overrightarrow{(c,d)}\\C:=\overrightarrow{(e,f)}\end{smallmatrix}\right]$

3) $(AA)\left[\begin{smallmatrix}A:=\overrightarrow{(a,b)}\\B:=\overrightarrow{(c,d)}\\C:=\overrightarrow{(e,f)}\end{smallmatrix}\right]$

4) $(AM)\left[\begin{smallmatrix}A:=\overrightarrow{(a,b)}\\B:=\overrightarrow{(c,d)}\\C:=\overrightarrow{(e,f)}\end{smallmatrix}\right]$

5) $(AM')\left[\begin{smallmatrix}A:=\overrightarrow{(a,b)}\\B:=\overrightarrow{(c,d)}\\C:=\overrightarrow{(e,f)}\end{smallmatrix}\right]$

6) $(AM)\left[\begin{smallmatrix}A:=k\\B:=\overrightarrow{(a,b)}\\C:=\overrightarrow{(c,d)}\end{smallmatrix}\right]$

7) $(DMA)\left[\begin{smallmatrix}A:=k\\B:=\overrightarrow{(a,b)}\\C:=\overrightarrow{(c,d)}\end{smallmatrix}\right]$

8) $(DMA)\left[\begin{smallmatrix}A:=\overrightarrow{(a,b)}\\B:=\overrightarrow{(c,d)}\\C:=\overrightarrow{(e,f)}\end{smallmatrix}\right]$

9) $(DAM)\left[\begin{smallmatrix}A:=a\\B:=b\\C:=\overrightarrow{(c,d)}\end{smallmatrix}\right]$

Dicas para problemas de "V/F/Justifique"

1) Releia o item 7 da p.5. Você vai ter que aprender a reler as suas próprias demonstrações fazendo o papel de "leitor burro".

2) O modo mais fácil de demonstrar que uma proposição é *falsa* é dando um contra-exemplo pra ela — pra mostrar que uma proposição não é verdadeira *sempre* basta mostrar *um caso* em que ela é falsa! Por exemplo:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}\right)\left[\begin{smallmatrix} a:=9 \\ b:=16 \end{smallmatrix}\right]$$

3) Em problemas que dão uma proposição e dizem "V/F/Justifique" você vai ter que primeiro decidir se a proposição é verdadeira ou falsa e depois demonstrar se ela é verdadeira (por uma série de igualdades) ou se ela é falsa (por contra-exemplo). *Note que a técnica pra demonstrar que uma proposição é verdadeira é totalmente diferente da técnica pra mostrar que ela é falsa!*

4) Releia cada demonstração de que uma proposição é verdadeira e faça anotações nela — por exemplo, escreva um '?' em cada '=' que não é *muito* claro para um leitor burro ('=' $\to$ '$\overset{?}{=}$') e escreva um 'NÃO!' em cada '=' que parece estar usando uma regra errada. Por exemplo:

$$||\vec{v}||(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \overset{\text{NÃO!}}{=} ||\vec{v}||\sqrt{a+b}$$

5) Algumas pessoas tentam "demonstrar" proposições só "traduzindo-as pro português" e aí acreditando que a versão em português da proposição é "óbvia". *Não seja como estas pessoas!* Neste ponto do curso "demonstrações" feitas em português estão ERRADAS!

6) Aprenda a fazer demonstrações "em matematiquês" usando a notação adequada e fazendo com que cada passo da sua demonstração seja uma aplicação de alguma regra conhecida e se possível de alguma regra com nome, *ou senão eu vou reprovar você com o maior sorriso de orelha a orelha que você já viu.* DEPOIS nós vamos ver como reescrever em português algumas partes das demonstrações desta parte do curso — mas repare: "*algumas partes*" e "*depois*"!

7) O "matematiquês" permite algumas palavras em português, como "seja", "se", "então" e "supondo".

8) A notação de substituição simultânea da p.6 não é usada em nenhum livro básico que eu conheça... se você for comparar a notação daqui com a dos livros de GA recomendados pro curso você vai ver que eles usam expressões em português pra indicar substituição — por exemplo, "substituindo k por -10, a por 3 e b por 4 na demonstração (DE) temos ...".

Propriedades das operações básicas com pontos e vetores (2)
As propriedades da p.28 podem ser postas numa forma mais curta.
Por exemplo:

$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ é sempre verdade para $k \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}$ vetores em $\mathbb{R}^2$.
Demonstração. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$. Então:

$$
\begin{array}{rcll}
k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) & = & k \cdot (\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)}) & \\
& = & k \cdot \overrightarrow{(a+c, b+d)} & \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
& = & \overrightarrow{(k(a+c), k(b+d))} & \text{(pela regra 6 da p.14)} \\
& = & \overrightarrow{(ka+kc, kb+kd)} & \\
& = & \overrightarrow{(ka, kb)} + \overrightarrow{(kc, kd)} & \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
& = & k\overrightarrow{(a,b)} + k\overrightarrow{(c,d)} & \text{(pela regra 6 da p.14)} \\
& = & k\vec{u} + k\vec{v} &
\end{array}
$$

Normalmente a gente usa uma convenção que diz que as letras a, b, c, k, x, y representam números reais, P, Q, R representam pontos em $\mathbb{R}^2$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ representam vetores em $\mathbb{R}^2$, mas essa convenção muda de acordo com o contexto — daqui a pouco quando introduzirmos círculos o R vai passar a denotar o raio de um determinado círculo e vai passar a ser um número, e quando passarmos para $\mathbb{R}^3$ as letras P, Q, R vão passar a denotar pontos de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vão passar a ser vetores em $\mathbb{R}^3$.

Exercícios
V/F/Justifique:
1) $P + \vec{v} = \vec{v} + P$
2) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3) $P + (\vec{v} + \vec{w}) = (P + \vec{v}) + \vec{w}$
4) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
5) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}$
6) $(a + b) \cdot \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
7) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Observação MUITO importante: se você estiver escrevendo para um leitor que tem acesso às demonstrações que você fez na p.28 você vai poder encurtar as suas demonstrações desta página bastante — você pode usar como justificativa de um passo algo como “pela demonstração do exercício 9 da p.28, com *[...e aí aqui você indica a substituição necessária]*”. Ah, e quando você estiver escrevendo pra leitores menos burros você *às vezes* vai poder omitir qual é a substituição — mas só com bastante treino a gente aprende o que a gente pode omitir sem perder a clareza.

Propriedades de normas e distâncias

Exercícios

1) V/F/justifique. Cada um dos itens abaixo pode ser feito "abrindo os vetores", isto é, começando com algo como "digamos que $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(c,d)}$", mas também pode ser feito usando propriedades "em forma mais curta" como as da p.30. Dica: o (1e) tem uma solução *bem* curta se você souber invocar a propriedade certa.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$

b) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

c) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$.

c') $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)$.

d) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

d') $||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

e) $||\,||\vec{u}||\,\vec{v}\,|| = ||\,||\vec{v}||\,\vec{u}\,||$

2) V/F/justifique. Aprenda a lidar com proposição com hipóteses (os "se"s) e use um pouco de criatividade.

a) Se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

b) Se $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ então $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$.

c) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.

d) Existe uma reta que contém os pontos $A = (1,3)$, $B = (-1,2)$ e $C = (5,4)$.

d') Existe uma reta que contém os pontos $A = (1,3)$, $B = (-1,2)$ e $C = (5,5)$.

e) O triângulo com vértices $A = (1,0)$, $B = (0,2)$ e $C = (-2,1)$ é retângulo.

e') O triângulo com vértices $A = (1,0)$, $B = (0,2)$ e $C = (-4,0)$ é retângulo.

f) Todo vetor em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(4,2)}$.

Obs: quase todos os exercícios desta página faziam parte da primeira lista de exercícios de GA de um curso daqui do PURO de alguns anos atrás.

Uma demonstração (comentada)

Em 18/abril eu mostrei no quadro como eu faria a demonstração do exercício 4 da p.28... a minha demonstração seria assim:

Queremos ver se esta proposição é sempre verdadeira:

$$(AM)\begin{bmatrix} A:=\overrightarrow{(a,b)} \\ B:=\overrightarrow{(c,d)} \\ C:=\overrightarrow{(e,f)} \end{bmatrix}$$

Repare que esta proposição é:

$$((A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C))\begin{bmatrix} A:=\overrightarrow{(a,b)} \\ B:=\overrightarrow{(c,d)} \\ C:=\overrightarrow{(e,f)} \end{bmatrix}$$

que é:

$$(\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}) \cdot \overrightarrow{(e,f)} = \overrightarrow{(a,b)} \cdot (\overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(e,f)}) \qquad (\bigstar)$$

Calculando o lado esquerdo de $(\bigstar)$, temos:

$$\begin{array}{rcl} (\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}) \cdot \overrightarrow{(e,f)} & = & (ac+bd) \cdot \overrightarrow{(e,f)} \\ & = & \overrightarrow{((ac+bd)e, (ac+bd)f)}, \end{array}$$

que dá um vetor, e o lado direito de $(\bigstar)$ dá:

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{(a,b)} \cdot (\overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(e,f)}) & = & \overrightarrow{(a,b)} \cdot (\underbrace{ce+df}_{\text{número!}}) \\ & = & \text{erro}, \end{array}$$

portanto a igualdade $(\bigstar)$ é falsa — o lado esquerdo dela dá um vetor, e o lado direito dá erro.

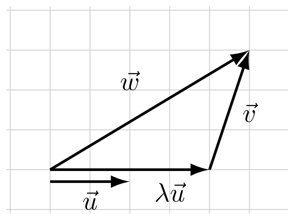
Esse exercício é um "V/F/Justifique" sobre algo que num primeiro momento nem parece uma proposição. Eu começo a demonstração dando a entender, com o "Queremos ver se esta proposição..." que a expressão $(AM)[\ldots]$ é uma proposição "disfarçada". Os passos "Repare que esta proposição é" e "que é:" reescrevem a expressão $(AM)[\ldots]$ até ela virar algo que é claramente uma proposição sobre vetores, e que eu nomeio como "$(\bigstar)$". Até esse momento eu não dei nenhum indício pro leitor se a $(AM)[\ldots]$, que é equivalente a $(\bigstar)$, é verdadeira ou falsa; aí eu mostro como calcular o lado esquerda da $(\bigstar)$, depois como calcular o lado direito dela, e mostro que o resultado do lado esquerdo é *sempre* diferente do do lado direito — o que neste caso é mais fácil do que encontrar um contra-exemplo.

Repare que a demonstração fica bem mais curta e clara com o truque de dar um nome para a proposição $(\bigstar)$ — eu avisei lá na dica 3 da p.5 que era útil aprender a nomear objetos. =)

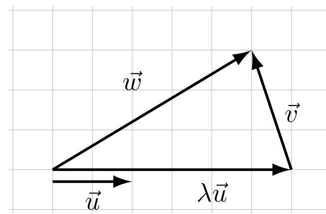
Projeção ortogonal

Digamos que $\lambda\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$. Então $\vec{v}=\vec{w}-\lambda\vec{u}$.
Vamos fazer duas figuras disto para o caso em que $\vec{u}=\overrightarrow{(2,0)}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{(5,3)}$.

Se $\lambda=2$,



Se $\lambda=3$,



Repare que nenhum dos triângulos acima é retângulo.
Como podemos encontrar o λ que faça $\mathrm{ang}(\lambda\vec{u},\vec{v})=90°$?

Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ estão dados e que $\vec{u}\neq\overrightarrow{0}$.
Se as nossas condições são $\lambda\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ e $\vec{u}\perp\vec{v}$ então temos $\vec{v}=\vec{w}-\lambda\vec{u}$, $\lambda\vec{u}\perp\vec{v}$, e só vai existir um valor $\lambda\in\mathbb{R}$ que obedece estas condições. Veja:

$$\begin{array}{rcl}
\vec{v} & = & \vec{w}-\lambda\vec{u}, \\
\vec{u} & \perp & \vec{w}-\lambda\vec{u}, \\
\vec{u}\cdot(\vec{w}-\lambda\vec{u}) & = & 0, \\
\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{u}\cdot\lambda\vec{u} & = & 0, \\
\vec{u}\cdot\vec{w}-\lambda(\vec{u}\cdot\vec{u}) & = & 0, \\
\vec{u}\cdot\vec{w} & = & \lambda(\vec{u}\cdot\vec{u}), \\
\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} & = & \lambda
\end{array}$$

Uma nova operação: a projeção ortogonal, Pr

Notação: $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
Pronúncia: $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ é "projeção *sobre* $\vec{u}$ de $\vec{w}$".
Bem informalmente, é como se os raios do sol fossem ortogonais a $\vec{u}$, e o sol projeta uma "sombra" do vetor $\vec{w}$ sobre o prolongamento do vetor $\vec{u}$.
Definição 1 (fácil de calcular): $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$.
Definição 2 (fácil de visualizar): $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ é o múltiplo $\lambda\vec{u}$ do vetor $\vec{u}$ que faz com que $\vec{u}\perp\vec{v}$ quando $\vec{v}$ é o vetor que obedece $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\vec{v}$.

Exercícios

1) Em cada um dos casos abaixo calcule λ, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ e $\vec{v}$ e represente graficamente $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\vec{v}$.
a) $\vec{u}=\overrightarrow{(3,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(-1,2)}$ c) $\vec{u}=\overrightarrow{(3,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,3)}$
b) $\vec{u}=\overrightarrow{(2,2)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$

2) Calcule e represente graficamente:
a) $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(3,1)}}\overrightarrow{(0,2)}$ c) $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(3,1)}}\overrightarrow{(3,2)}$
b) $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(3,1)}}\overrightarrow{(3,0)}$

Projeções no olhômetro

Quando a gente tem um pouco de prática com o "significado geométrico" da operação Pr a gente consegue 1) visualizar $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$, 2) calcular exatamente o resultado de $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ "no olhômetro" em casos simples. Os exercícios abaixo são pra você melhorar a sua capacidade de calcular projeções ortogonais no olhômetro; lembre que toda vez que você tiver dúvidas você pode recorrer às contas.

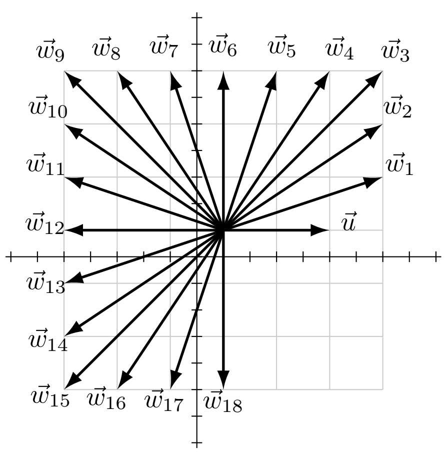
Exercícios

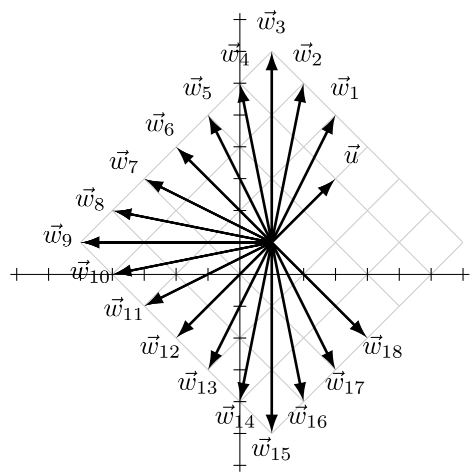
1) Sejam $\vec{w} = \overrightarrow{(3,4)}$, $\vec{u} = \overrightarrow{(0,1)}$, $A = (2,0)$, $B = A + \vec{w}$. Represente graficamente A, B, $\vec{u}$, $\vec{w}$, e para cada $\lambda \in \{1,2,3,4,5\}$ desenhe no seu gráfico o triângulo $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ correspondente e calcule $\vec{v}$ e $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Qual o λ que faz com que $\vec{u}\perp\vec{v}$?

2) Faça a mesma coisa que no (1), mas mudando o $\vec{u}$ para $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$.

3) Digamos que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_2\vec{u}$, etc. Determine λ_1, λ_2, etc na figura abaixo à esquerda.

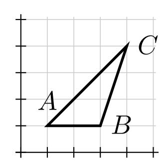
4) Digamos que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_1\vec{u}$, etc. Determine λ_1, λ_2, etc na figura abaixo à direita.





5) Sejam $A = (1,1)$, $B = (3,1)$, $C = (4,4)$.
Calcule e represente graficamente:

AB) $P = A + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$
AC) $Q = A + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$
BA) $R = B + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{BA}}\overrightarrow{BC}$
BC) $S = B + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$
CA) $T = C + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB}$
CB) $U = C + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{CB}}\overrightarrow{CA}$



6) Leia a p.55 do livro do CEDERJ. Compare a abordagem dele com a nossa.

7) Leia as págs 35 a 38 do Reis/Silva. Compare a abordagem dele com a nossa.

Repare que tanto o livro do CEDERJ quanto o do Reis/Silva começam a mencionar senos, cossenos e tangentes bem antes de definirem o produto $\vec{u}\cdot\vec{v}$!

Propriedades da projeção

Exercícios

1) V/F/Justifique:

a) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w}) = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
b) ( ) $\mathrm{Pr}_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w}$
c) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{w}}\vec{u}$
d) ( ) $\mathrm{Pr}_{(k\vec{u})}\vec{w} = k\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
e) ( ) $\mathrm{Pr}_{(k\vec{u})}\vec{w} = |k|\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
f) ( ) $\mathrm{Pr}_{(k\vec{u})}\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
g) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
h) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = |k|\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
i) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
j) ( ) $||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||$
k) ( ) $||k\vec{v}|| = |k|\,||\vec{v}||$
l) ( ) $||k\vec{v}|| = ||\vec{v}||$
m) ( ) Se $ab = ac$ então $b = c$
n) ( ) Se $a\vec{u} = b\vec{u}$ então $a = b$
o) ( ) Se $a\vec{u} = a\vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{v}$
p) ( ) Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$

2) Demonstre que se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não-nulos e $\vec{v}\perp\vec{w}$ então:

a) $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(k\vec{w}) = \overrightarrow{0}$
b) $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(k\vec{v}) = k\vec{v}$
c) $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(a\vec{v}+b\vec{w}) + \mathrm{Pr}_{\vec{w}}(a\vec{v}+b\vec{w}) = a\vec{v}+b\vec{w}$

3) Demonstre:

a) Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ então $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}-\vec{v}||$
b) Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ então $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$
c) Se $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}-\vec{v}||$ então $\vec{u}\perp\vec{v}$
d) Se $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$ então $\vec{u}\perp\vec{v}$

4) Demonstre:

a) Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ então $||\vec{u}||^2 \le ||\vec{u}+\vec{v}||^2$
b) Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ então $||\vec{u}|| \le ||\vec{u}+\vec{v}||$
c) Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ então $||\vec{u}||^2 < ||\vec{u}+\vec{v}||^2$
d) Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $\vec{v} \neq \overrightarrow{0}$ então $||\vec{u}|| < ||\vec{u}+\vec{v}||$

5) Digamos que $r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ seja uma reta, que B seja um ponto de $\mathbb{R}^2$ e que $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$. Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Demonstre que:

a) $d(A+t\vec{u}, B)$ é mínimo quando $d(A+t\vec{u}, B)^2$ é mínimo
b) $d(A+t\vec{u}, B)^2 = ||\overrightarrow{AB} - t\vec{u}||^2$
c) $||\overrightarrow{AB} - t\vec{u}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||t\vec{u}||^2$
d) $||\overrightarrow{AB} - t\vec{u}||^2 = ||\vec{v}||^2 + t^2||\vec{u}||^2$

Senos e cossenos

Vamos começar com uma revisão rápida de graus e radianos...

Lembre que $180° = \pi$ e que radianos são "adimensionais" — a gente escreve "π radianos" só como "π".

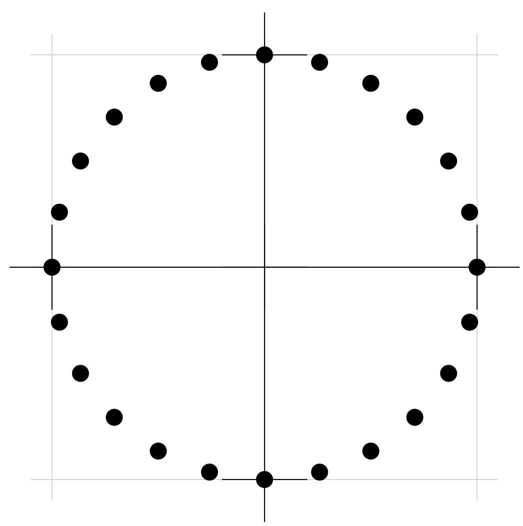
O símbolo "$°$" pode ser interpretado como uma multiplicação por uma determinada constante: $180° = \pi$, $90° = \pi/2$, $45° = \pi/4$, $1° = \pi/180$, $234° = 234\frac{\pi}{180}$, $x° = x\frac{\pi}{180}$.

Vou usar a expressão "nossos ângulos preferidos" pra me referir aos ângulos que têm senos e cossenos fáceis de lembrar e de calcular. Formalmente,

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\, k \cdot 90° + a \mid k \in \{0, 1, 2, 3\}, a \in \{0°, 30°, 45°, 60°\} \,\} \\ & = & \{0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, \ldots\} \end{array}$$

Algumas pessoas viram a tabela à esquerda abaixo no ensino médio...

θ	$(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$
$0°$	$(\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$
$30°$	$(\sqrt{3}/2, \sqrt{1}/2)$
$45°$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
$60°$	$(\sqrt{1}/2, \sqrt{3}/2)$
$90°$	$(\sqrt{0}/2, \sqrt{4}/2)$
$120°$	$(-\sqrt{1}/2, \sqrt{3}/2)$
$135°$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
$150°$	$(-\sqrt{3}/2, \sqrt{1}/2)$
$180°$	$(-\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$
$210°$	$(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{1}/2)$
$225°$	$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
$240°$	$(-\sqrt{1}/2, -\sqrt{3}/2)$
$270°$	$(\sqrt{0}/2, -\sqrt{4}/2)$
$300°$	$(\sqrt{1}/2, -\sqrt{3}/2)$
$315°$	$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
$330°$	$(\sqrt{3}/2, -\sqrt{1}/2)$
$360°$	$(\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$



Exercícios

Dicas: $\sqrt{0}/2 = 0$, $\sqrt{1}/2 = 0.5$, $\sqrt{4}/2 = 1$, e use as aproximações $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ e $\sqrt{3}/2 \approx 0.85$. Nas contas com os "nossos ângulos preferidos" comece sempre com os múltiplos de $90°$ — em que as contas são facílimas —, depois inclua os múltiplos de $45°$, e só depois inclua os múltiplos de $30°$.

1) Identifique cada ponto da forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, onde $\theta \in A$, com pontos da figura à direita acima.

2) Verifique que o triângulo $\Delta(0,0)(\sqrt{2}/2, 0)(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ é retângulo, isósceles e tem hipotenusa 1.

3) Verifique que o triângulo $\Delta(0,0)(1,0)(0.5, \sqrt{3}/2)$ é equilátero.

4) Verifique que o triângulo $\Delta(0,0)(0.5,0)(0.5, \sqrt{3}/2)$ é retângulo, com hipotenusa 1, e um dos seus catetos tem comprimento $1/2$.

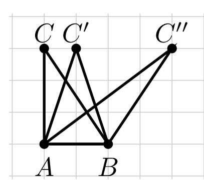
Áreas e determinantes em R^2

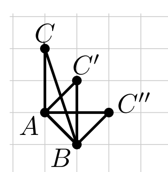
Notações: se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores em $\mathbb{R}^2$ então $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$ é a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$; se A, B, C são pontos de $\mathbb{R}^2$ então $\mathsf{Área}(\Delta ABC)$ é a área do *triângulo* ΔABC. Triângulos são "metades de paralelogramos".

O slogan "a área de um triângulo é base vezes altura sobre 2" pode ser interpretado de várias formas. Podemos pensar que a base do triângulo ΔABC é a distância $d(A,B)$ (um número), ou que a base é o segmento $\overline{AB}$; e podemos usar o slogan pra mudar um ponto do triângulo original mantendo a mesma base e a mesma altura, obtendo um triângulo $\Delta ABC'$ com $\mathsf{Área}(\Delta ABC) = \mathsf{Área}(\Delta ABC')$. Quando a base $\overline{AB}$ é um segmento horizontal "manter a mesma altura" quer dizer deslizar o ponto C ao longo de uma reta horizontal; quando $\overline{AB}$ é um segmento qualquer "manter a mesma altura" quer dizer deslizar C ao longo de uma reta r parelela a AB e que passa por C — ou seja,

$$C' \in r = \{\, C + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\,\}.$$

No diagrama à esquerda abaixo temos $\mathsf{Área}(\Delta ABC) = \mathsf{Área}(\Delta ABC') = \mathsf{Área}(\Delta ABC'')$; no diagrama à direita abaixo também.





Idéias. Temos $\mathsf{Área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\mathsf{Área}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Quando $\vec{u}\perp\vec{v}$ a área pode ser calculada de forma bem fácil: $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||$. Quando $\operatorname{ang}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \neq 90°$ podemos calcular $\mathsf{Área}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ encontrando um ponto C' "por deslizamento", isto é, tal que $C' = C + t\overrightarrow{AB}$, que obedeça $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC'}$. A tradução disto pra vetores é $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = \mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+t\vec{u})$. Podemos deslocar os pontos A e B ao invés de C: se $A' = A + \alpha\overrightarrow{BC}$ e $B' = B + \beta\overrightarrow{AC}$ então $\mathsf{Área}(\Delta ABC) = \mathsf{Área}(\Delta A'BC) = \mathsf{Área}(\Delta AB'C)$; $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = \mathsf{Área}(\vec{u}+t\vec{v},\vec{v})$.

Determinantes. A notação usual para determinantes de matrizes 2×2 é $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = \left|\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right| = ad - bc$, mas também vamos usar $\det(\overrightarrow{(a,b)},\overrightarrow{(c,d)}) = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$. Determinantes calculam a área "com sinal"; truque: $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = |\det(\vec{u},\vec{v})|$.

Áreas e determinantes em R^2 (2)

Exercícios

1) Para cada um dos casos abaixo represente graficamente o paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcule $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$. Use deslizamentos se precisar mas não use determinantes.

2) Para cada um dos casos abaixo represente graficamente o paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcule $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$. Use determinantes mas não use deslizamentos.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,3)}$
b) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,-3)}$
c) $\vec{u} = \overrightarrow{(-2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,3)}$
d) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,4)}$
e) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,3)}$
f) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$
g) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,2)}$
h) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(-2,4)}$
i) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(1,3)}$
j) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(0,1)}$
k) $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$ $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,2)}$

Pontos mais próximos e pontos simétricos

Exercícios

1) Sejam $A = (2,3)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$, $r = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $B = (4,0)$. Sejam B' o ponto de r mais próximo de B e $B'' = B' + \overrightarrow{BB'}$. Represente graficamente A, $\vec{u}$, r, B, B', B''.

2) Sejam A, $\vec{u}$ e r como no exercício anterior. Seja $C = (5,1)$. Sejam C' o ponto de r mais próximo de C e $C'' = C' + \overrightarrow{CC'}$. Represente graficamente C, C', C'' no gráfico do exercício anterior.

3) Vamos usar a mesma convenção dos exercícios anteriores para as letras D, E, … — D' é o ponto de r mais próximo a D, $D'' = D' + \overrightarrow{DD'}$, etc. Sejam $D = (4,2)$ e $E = (3,3)$. Represente graficamente D, D', D'', E, E', E'' no mesmo gráfico dos exercícios 1 e 2.

4) Sejam $A = (4,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(0,1)}$, $r = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $B = (1,0)$, $C = (2,2)$, $D = (4,3)$, $E = (5,4)$. Represente graficamente num gráfico só (separado do dos exercícios anteriores!) A, $\vec{u}$, r, B, B', B'', C, D', C'', D, D', D'', E, E', E''.

5) Idem, mas agora $A = (0,4)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $B = (1,4)$, $C = (2,4)$, $D = (2,1)$, $E = (1,1)$.

6) Idem, mas agora $A = (0,4)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2,-1)}$, $B = (1,1)$, $C = (3,0)$, $D = (4,2)$, $E = (3,5)$, $F = (3,4)$, $G = (3,3)$, $H = (3,2)$. Obs: aqui nem todos os pontos são fáceis de *calcular*, mas você sabe desenhar aproximações para ele no olhômetro.

Repare que quando $r = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \}$ a gente sempre pode calcular o "ponto de r mais próximo de B", B', fazendo $B' = A + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}$ — e isto nos dá uma primeira fórmula para calcular $d(B,r)$:

$$\begin{aligned} d(B,r) &= d(B,B') \\ &= d(B, A + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}) \\ &= ||B - (A + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB})|| \\ &= ||\overrightarrow{AB} - \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}|| \\ &= ||\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}|| \end{aligned}$$

7) Calcule $d(B,r)$, $d(C,r)$, $d(D,r)$, $d(E,r)$ no gráfico dos exercícios 1, 2 e 3 acima, de dois modos: primeiro aproveite que você conhece B', C', etc e use $d(B,r) = d(B,B')$, $d(C,r) = d(C,C')$, etc; depois use a fórmula $d(B,r) = ||\overrightarrow{AB} - \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}||$.

8) Faça o mesmo para $d(B,r)$, …, $d(E,r)$ no gráfico do exercício 4.

9) Faça o mesmo para $d(B,r)$, …, $d(E,r)$ no gráfico do exercício 5.

10) Faça o mesmo para o exercício 6.

Exercícios sobre coeficientes

11) Encontre $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(2,-1)}}\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(ax+by, cx+dy)}$.

12) Encontre $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(3,4)}}\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(ax+by, cx+dy)}$.

Círculos (via pontos óbvios)

Seja $S = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \,\}$.

O conjunto S é um círculo (juro! Depois vamos ver porquê), e se conseguirmos um número suficiente de pontos de S vamos conseguir desenhar o círculo, determinar o seu centro e o seu raio, etc.

Uma gambiarra: é fácil encontrar os "quatro pontos óbvios" que são soluções de $(x-4)^2+(y-3)^2 = 9$ — a gente primeiro faz $(x-4)^2 = 0$ e encontra os dois valores de y que são soluções de $0+(y-3)^2 = 9$, depois a gente faz $(y-3)^2 = 0$ e encontra os dois valores de x que são soluções de $(x-4)^2 + 0 = 9$.

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{4} - 4}_{0})^2}_{0} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{6} - 3}_{3})^2}_{9} = 9 \qquad \underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{4} - 4}_{0})^2}_{0} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{0} - 3}_{-3})^2}_{9} = 9$$

$$\Rightarrow \quad (x,y) = (4,6) \qquad\qquad \Rightarrow \quad (x,y) = (4,0)$$

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{7} - 4}_{3})^2}_{9} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{3} - 3}_{0})^2}_{0} = 9 \qquad \underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{1} - 4}_{-3})^2}_{9} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{3} - 3}_{0})^2}_{0} = 9$$

$$\Rightarrow \quad (x,y) = (7,3) \qquad\qquad \Rightarrow \quad (x,y) = (1,3)$$

Os pontos óbvios vão ser o ponto mais alto do círculo, o mais baixo, o mais à esquerda e o mais à direita.

Exercícios

1) Cada um dos conjuntos abaixo é um círculo.
$C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4 \,\}$
$C' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1 \,\}$
$C'' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-5)^2 = 1 \,\}$
$C''' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \,\}$
$C'''' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \,\}$
Para cada um deles
a) encontre os 4 pontos óbvios do círculo,
b) represente graficamente o círculo,
c) dê o centro e o raio do círculo.

2) Tente fazer o mesmo para estes círculos degenerados.
$C = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-5)^2 = 0 \,\}$
$C' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-5)^2 = -1 \,\}$

Círculos e cônicas

Quase todos os problemas das listas da Ana Isabel sobre círculos usam equações desta forma:
(A) $\quad ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$
onde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.
Os que nós vimos têm equações desta forma:
(B) $\quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = c$
onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Uma *equação de cônica* é uma equação desta forma:
(C) $\quad ax^2 + bx + c + dxy + ey + fy^2 = 0$
onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Exercícios
Converta as seguintes equações da forma (B) para a forma (A).
1) $(x - 3)^2 + (y = 4)^2 = 25$
2) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
Converta as seguintes equações da forma (A) para a forma (B).
3) $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$
4) $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$
5) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$
6) $x^2 + y^2 + 6y - 8 = 0$
7) $x^2 - y^2 = 0$

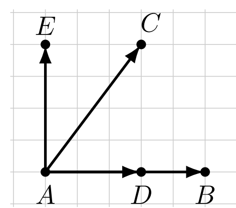
Dica: "completar quadrados"...
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x + a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$
$(x + a)^2 + b - a^2 = x^2 + 2ax + b$

Interseção de círculo e reta (algebricamente)
Método: comece com equações
(D) $\quad ax^2 + bx + dx^2 + ey + f = 0,$
(E) $\quad y = gx + h$
e substitua cada y em (D) por $gx + h$. Converta a equação que você obteve para a forma
(F) $\quad ix^2 + jx + k = 0,$
resolva-a por Bháskara e chame as soluções de x_1 e x_2.
Use (E) para definir $y_1 = gx_1 + h$ e $y_2 = gx_2 + h$.
Os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as interseçõe do círculo com a reta.

Exercícios. Sejam C o círculo de centro $(5, 5)$ e raio 5,
$r = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3 \,\}$, $r' = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 - 3x \,\}$.
8) Calcule $C \cap r$.
9) Calcule $C \cap r'$.

Uma decomposição (e várias utilidades para ângulos)

Sejam A e B dois pontos diferentes de $\mathbb{R}^2$.
Seja C um ponto de $\mathbb{R}^2$.
Seja r a reta que passa por A e B.
Seja s uma reta ortogonal a r que passa por A.
Seja D o ponto de r mais próximo de C.
Seja E o ponto de s mais próximo de C.



Essa construção decompõe o vetor $\overrightarrow{AC}$ em uma componente, $\overrightarrow{AD}$, paralela a $\overrightarrow{AB}$, e outra componente, $\overrightarrow{AE}$, ortogonal a $\overrightarrow{AB}$.
Formalmente: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, com $\overrightarrow{AD} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$.
($\overrightarrow{AD} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB}$ quer dizer $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.)

A função "ang" sempre responde um ângulo entre $0°$ e $180°$ (lembre da '$\sqrt{\cdot}$'!); daí sempre temos $0 \le \mathrm{sen}(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v})) \le 1$, mas $\cos\theta < 0$ para θ obtuso.

Seja $\theta = \mathrm{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{ang}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$. Lembre que "cosseno é cateto adjacente sobre hipotenusa" e "seno é cateto oposto sobre hipotenusa". Repare que $ADCE$ é um retângulo e que:
1) $|\cos\theta| = d(A, D)/d(A, C)$,
2) $\mathrm{sen}\,\theta = d(D, C)/d(A, C) = d(A, E)/d(A, C)$,
3) $d(A, D) = |\cos(\theta)|\, d(A, C)$,
4) $d(A, E) = \mathrm{sen}(\theta)\, d(A, C)$,
5) $\overrightarrow{AD} = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$,
6) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
7) $\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC} = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AE} = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$
7') $||\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AD}|| = |\cos\theta|\, ||\overrightarrow{AC}||$
8) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mathsf{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AE}|| = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot (\mathrm{sen}\,\theta\, ||\overrightarrow{AC}||)$
8') $\mathsf{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{sen}\,\theta\, ||\overrightarrow{AB}||\, ||\overrightarrow{AC}||$
9) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v}))\, ||\vec{u}||\, ||\vec{v}||$ ("fórmula do cosseno")
Note que as afirmações 1–9 acima não usam θ, só $\mathrm{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$.

Exercícios

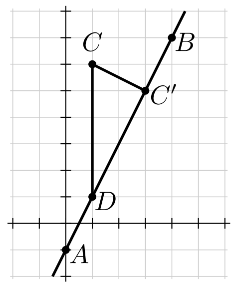
1) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(5, 0)}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(3, 4)}$.
2) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(4, 4)}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(0, 2)}$.
3) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(4, 4)}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(-2, 0)}$.

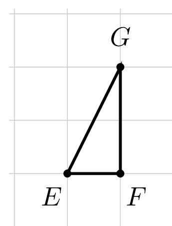
Distância entre ponto e reta: segundo modo

Sejam A e B dois pontos diferentes de $\mathbb{R}^2$ e seja r a reta que contém A e B. Seja P um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$. Na p.39 nós vimos um primeiro modo de calcular $d(C,r)$ — a gente encontrava o ponto $C' \in r$ mais próximo de C e depois calculava $d(C,C')$. Agora vamos ver um outro modo no qual as contas ficam bem mais rápidas, mas que só faz sentido se a gente entende ângulos.

Seja s uma reta vertical que passa por C e seja $D \in r \cap s$.

Seja $r = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx+b\,\}$; m é o coeficiente angular de r.





O triângulo retângulo $\Delta CC'D$ é semelhante a um outro triângulo bem mais simples, ΔEFG, que tem um cateto horizontal e outro vertical e cuja hipotenusa é paralela à reta r; temos $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{(1,m)}$ (hipotenusa), $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{(1,0)}$ (cateto horizontal) e $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{(0,m)}$ (cateto vertical).

Queremos calcular $d(C,C')$ mas é trabalhoso fazer isto diretamente, então vamos calcular $d(C,D)$, que é fácil, e a proporção $d(C,C')/d(C,D)$ (que é o cosseno de um ângulo — qual?)... temos:

- se $C = (C_x, C_y)$ então $D = (C_x, mC_x + b)$,
- $d(C,D) = |C_y - (mC_x + b)| = |mC_x + b - C_y|$,
- $d(C,C') = \frac{d(C,C')}{d(C,D)} d(C,D)$,
- $\frac{d(C,C')}{d(C,D)} = \frac{d(E,F)}{d(E,G)} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,
- $d(C,C') = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |mC_x + b - C_y|$,
- $d(C,r) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |mC_x + b - C_y|$.

Obs: o meu truque pra lembrar é essa fórmula é: seja $dv(C,r)$ a "distância vertical" de C até r, isto é, a distância entre C e o ponto $r \cap s$, onde s é uma reta vertical que passa por C. A distância $d(C,r)$ é igual à "distância vertical" $dv(C,r)$ vezes alguma coisa que tem $\sqrt{1+m^2}$ no meio, e os casos mais fáceis de testar são os com coeficientes angulares iguais a 0, 1 ou 2... lembrando isso eu faço alguns testes e encontro a fórmula certa.

Exercício. Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e $F(x,y) = dv((x,y),r)$; use a notação da p.24 para representar $F(x,y)$.

1) $r = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+2\,\}$
2) $r = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4-2x\,\}$
3) $r = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3\,\}$

Áreas de retângulos e paralelogramos em R^3

Notação: se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ então $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$ é a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Quando $\vec{u}\perp\vec{v}$ a área pode ser calculada de forma bem fácil: $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$.

Exercícios

1) Visualize os paralelogramos abaixo e calcule a área de cada um deles. Em alguns casos você vai ter que usar truques pouco óbvios; em outros casos talvez você vá ter que responder "não sei".

a) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(2,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)})$
b) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(0,3,0)},\overrightarrow{(0,0,-4)})$
c) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)},\overrightarrow{(0,5,0)})$
d) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)},\overrightarrow{(4,3,0)})$
e) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)},\overrightarrow{(3,4,0)})$
f) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)},\overrightarrow{(-3,4,0)})$
g) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)},\overrightarrow{(4,3,0)})$
h) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)},\overrightarrow{(3,4,0)})$
i) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)},\overrightarrow{(0,4,3)})$
j) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)},\overrightarrow{(0,3,4)})$
k) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(5,0,0)},\overrightarrow{(0,0,5)})$

Podemos calcular áreas de paralelogramos em $\mathbb{R}^3$ usando um truque de "deslizamento" parecido com o que usamos para áreas e determinantes em $\mathbb{R}^2$. Se $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $k\in\mathbb{R}$, então $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}) = \mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u})$ — e repare que $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$ é a área de um retângulo e $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u})$ é a área de um paralelogramo.

2) Use o truque acima em cada um dos itens abaixo. Visualize o paralelogramo $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u})$ e o retângulo $\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v})$ associado a ele, e calcule as áreas.

a) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)}+\overrightarrow{(4,0,0)})$
b) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)}+\frac{3}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$
c) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)}+\frac{2}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$
d) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)}+\frac{1}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$
e) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)})$
f) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)},\overrightarrow{(0,0,1)})$
g) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)}+\overrightarrow{(0,0,1)},\overrightarrow{(0,0,1)})$
h) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)}+2\overrightarrow{(0,0,1)},\overrightarrow{(0,0,1)})$
i) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,3,0)}+3\overrightarrow{(0,0,1)},\overrightarrow{(0,0,1)})$

3) Faça o mesmo nos casos abaixo, mas agora você vai ter que escolher os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ adequados você mesmo.

a) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)}+\overrightarrow{(4,0,0)})$ (mudar)
b) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)}+\frac{3}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$ (mudar)
c) $\mathsf{Área}(\overrightarrow{(4,0,0)},\overrightarrow{(0,3,0)}+\frac{2}{4}\overrightarrow{(4,0,0)})$ (mudar)

4) Demonstre que se $\vec{u}\perp\vec{v}$ e $a,k\in\mathbb{R}$ então:

$$\mathsf{Área}(\vec{u},a(\vec{v}+k\vec{u})) = |a|\,\mathsf{Área}(\vec{u},\vec{v}+k\vec{u}).$$

Retas e planos em R^3

Obs: adaptado da aula de 4/jul/2016:
http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf

Sejam:
$r_1 = \{ (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_2 = \{ (2,2,1) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_3 = \{ (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_4 = \{ (0,2,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_4 = \{ (1,2,1) + t\overrightarrow{(2,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
Quais destas retas se interceptam?
Em que pontos? Em que 't's?
Quais destas retas são paralelas?
Quais destas retas são coincidentes?
A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – "retas *reversas*".

As retas acima são *parametrizadas*.
O que é uma *equação de reta* em $\mathbb{R}^3$?
$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \}$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$;
$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \}$ é um *plano* em $\mathbb{R}^3$...

Exercício: encontre
três pontos não colineares de $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$,
três pontos não colineares de $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 \}$,
três pontos não colineares de $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 \}$,
três pontos não colineares de $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3 \}$,
três pontos não colineares de $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \}$,
e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:
$\pi_{xy} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$ (x e y variam, $z = 0$)
$\pi_{xz} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \}$ (x e z variam, $y = 0$)
$\pi_{yz} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \}$ (y e z variam, $x = 0$)
Notação (temporária):
$[\text{equação}] = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{equação} \}$
Obs: $\pi_{xy} = [z = 0]$, $\pi_{xz} = [y = 0]$, $\pi_{yz} = [x = 0]$.

Exercício: visualize:
$\pi_1 = [x = 1]$, $\quad \pi_8 = [y = x]$,
$\pi_2 = [y = 1]$, $\quad \pi_9 = [y = 2x]$,
$\pi_3 = [z = 1]$, $\quad \pi_{10} = [z = x]$,
$\pi_4 = [z = 4]$, $\quad \pi_{11} = [z = x + 1]$,
$\pi_5 = [z = 2]$,
Quais deles planos são paralelos?
Quais deles planos se cortam? Onde?

Retas e planos em R^3 (2)

Dá pra parametrizar planos em $\mathbb{R}^3$...
Sejam
$\pi_6 = \{\, \underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a, b \in \mathbb{R}\,\}$,
$\pi_7 = \{\, \underbrace{(3,2,1) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a, b \in \mathbb{R}\,\}$.
Calcule e visualize:
$(0,0)_{\Sigma_6}$, $(1,0)_{\Sigma_6}$, $(0,1)_{\Sigma_6}$, $(1,1)_{\Sigma_6}$,
$(0,0)_{\Sigma_7}$, $(1,0)_{\Sigma_7}$, $(0,1)_{\Sigma_7}$, $(1,1)_{\Sigma_7}$,
e resolva:
$(a,b)_{\Sigma_6} = (0,3,0)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,1)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,0)$.

Nossos três modos preferidos de descrever planos em $\mathbb{R}^3$ (por equações) são:
$[z = ax + by + c]$ ("z em função de x e y"),
$[y = ax + bz + c]$ ("y em função de x e z"),
$[x = ay + bz + c]$ ("x em função de y e z").

Na p.10 nós vimos este tipo de diagrama aqui, que nos ajuda a visualizar as curvas de nível de funções de x e y:

$$\begin{array}{c} F(x,y) \\ = x+2y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Use diagramas deste tipo para visualizar
$[z = x + y]$,
$[z = x + y + 2]$,
$[z = x - y + 4]$.

Sejam:
$\pi_{12} = [z = x + y]$,
$\pi_{13} = [z = x - y + 4]$
Exercício: encontre pontos de $r = \pi_{12} \cap \pi_{13}$ tais que
a) $x = 0$, b) $x = 1$, c) $x = 3$; depois
d) encontre uma parametrização para r,
e) encontre uma parametrização para r na qual $t = x$.

Alguns dos nossos modos preferidos de descrever retas em $\mathbb{R}^3$:
$[y = ax + b, z = cx + d]$ ("y e z em função de x"),
$[x = ay + b, z = cy + d]$ ("x e z em função de y"),
$[x = az + b, y = cz + d]$ ("x e y em função de z").
Encontre uma descrição da forma $[y = ax + b, z = cx + d]$ para a r acima.
(Dica: use o "chutar e testar"!)

Determinantes em R^3

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede *áreas* (de paralelogramos), e às vezes ele responde números negativos:

$$\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ac - bd \qquad \left|\begin{smallmatrix} c & d \\ a & b \end{smallmatrix}\right| = bd - ac = -\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$$

Vamos usar a seguinte notação (temporária):
$[\vec{u},\vec{v}] = [\overrightarrow{(u_1,u_2)}, \overrightarrow{(v_1,v_2)}] = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{smallmatrix}\right|$ (em $\mathbb{R}^2$)
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\overrightarrow{(u_1,u_2,u_3)}, \overrightarrow{(v_1,v_2,v_3)}, \overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}] = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right|$ (em $\mathbb{R}^3$)
"$[\vec{u},\vec{v}]$" e "$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$" querem dizer
"empilhe os vetores numa matriz quadrada e tire o determinante dela".

A definição de determinante em $\mathbb{R}^3$ – como conta – é:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1v_2w_3 + u_2v_3w_4 + u_3v_4w_5 \\ -u_3v_2w_1 - u_4v_3w_2 - u_5v_4w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 \\ -u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As seguintes definições são padrão:

$$\vec{\mathbf{i}} = \overrightarrow{(1,0,0)} \qquad \vec{\mathbf{j}} = \overrightarrow{(0,1,0)} \qquad \vec{\mathbf{k}} = \overrightarrow{(0,0,1)}$$

Exercício: calcule
a) $[\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}]$
b) $[\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{j}}]$
c) $[\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{k}}]$
d) $[\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{i}}]$
e) $[\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}}]$
f) $[\vec{\mathbf{k}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{i}}]$
g) $[\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{i}}]$
g) $[2\vec{\mathbf{i}},3\vec{\mathbf{j}},4\vec{\mathbf{k}}]$
h) $[a\vec{\mathbf{i}},b\vec{\mathbf{j}},c\vec{\mathbf{k}}]$
i) $[a\vec{\mathbf{i}}+b\vec{\mathbf{j}}+c\vec{\mathbf{k}},d\vec{\mathbf{j}}+e\vec{\mathbf{k}},f\vec{\mathbf{k}}]$
j) $[a\vec{\mathbf{i}},b\vec{\mathbf{i}}+c\vec{\mathbf{j}},d\vec{\mathbf{i}}+e\vec{\mathbf{j}}+f\vec{\mathbf{k}}]$

Determinantes em R^3 (2)

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede áreas, que são "base vezes altura", e que a gente pode deslizar um lado ($\vec{v}$) do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ "numa direço paralela a $\vec{u}$", sem alterar nem a "base" nem a "altura"...
Algebricamente: $[\vec{u},\vec{v}] = [\vec{u},\vec{v}+a\vec{u}]$.
E deslizando o $\vec{u}$, temos $[\vec{u},\vec{v}] = [\vec{u}+a\vec{v},\vec{v}]$.

Em $\mathbb{R}^3$ podemos pensar que o determinante $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ mede a área da base — a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ — vezes a altura.
Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais entre si então a "área da base" é $||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||$, e a "altura" é $||\vec{w}||$.

(Obs: em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(d,e,f)} = ad+be+cf$, $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{v}}$,
$\vec{u}\perp\vec{v} = (\vec{u}\cdot\vec{v}=0)$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$.)

Propriedades mais importantes dos determinantes em $\mathbb{R}^3$:
$[a\vec{u},b\vec{v},c\vec{w}] = abc[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}+a\vec{u}+b\vec{v}]$
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v}+a\vec{u}+b\vec{w},\vec{w}]$
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u}+a\vec{v}+b\vec{w},\vec{v},\vec{w}]$

Quase todas as idéias sobre determinantes em $\mathbb{R}^3$ que a gente vai ver agora ficam mais fáceis de entender se a gente as entende em três etapas: 1) com $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ortogonais entre si, e todos com comprimento 1; 2) usando vetores $\vec{u}' = a\vec{u}$, $\vec{v}' = b\vec{v}$, $\vec{w}' = c\vec{w}$ construídos a partir dos anteriores; estes $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ e $\vec{w}'$ são ortogonais entre si, mas podem ter qualquer comprimento, 3) usando vetores $\vec{u}'' = \vec{u}'$, $\vec{v}'' = \vec{v}'+d\vec{u}'$ e $\vec{w}' = \vec{w}'+e\vec{u}'+f\vec{v}'$.

Exercício importantíssimo (encontrar coeficientes):
a) Encontre a,b,c tais que $\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)} = 2x+3y+4z$
b) Encontre a,b,c,d tais que $\overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}+d = 2x+3y+4z+5$
c) Encontre a,b,c tais que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$
d) Encontre a,b,c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(x,y,z)}$
e) Encontre a,b,c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)}\cdot\overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}$

O produto cruzado ($\times$) em R^3

O "produto cruzado" (ou "produto vetorial") $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido como se ele fosse "uma parte da conta do determinante": $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
Exercício: verifique que no item (e) acima temos
$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(\vec{u}_2\vec{v}_3 - \vec{u}_3\vec{v}_2, \vec{u}_3\vec{v}_1 - \vec{u}_1\vec{v}_3, \vec{u}_1\vec{v}_2 - \vec{u}_2\vec{v}_1)}$.

Idéia importantíssima:

1) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

2) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

3) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}]$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

4) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

5) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $\vec{u} \times \vec{v} = \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (exceto talvez pelo sinal).

Exercício:

Use o (5) acima para tentar descobrir quais são as duas respostas possíveis para $\vec{u} \times \vec{v}$ nos casos a e b abaixo, e depois compare as suas respostas com resposta "algébrica" dada pela fórmula lá no alto da página.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(3,0,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,4,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,1)}$
b) $\vec{u} = \overrightarrow{(0,3,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,3,3)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,0,0)}$

Alguns usos do '$\times$'

1) $||\vec{u} \times \vec{v}|| = \textsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$
2) $\vec{u} \times \vec{v}$ sempre dá um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$
3) $\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(0,0,0)}$ se e só se $\textsf{área}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, ou seja, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (i.e., paralelos).
4) Digamos que
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então r e r' são reversas se e só se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.
(Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ então r e r' são ou paralelas, ou coincidentes, ou se cortam).
5) Pra testar se quatro pontos $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ são coplanares,
encontre $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tais que $A + \vec{u} = B$, $A + \vec{v} = C$, $A + \vec{w} = D$;
temos $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se e só se A, B, C, D forem coplanares.
6) (Difícil!) Sejam
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então: $d(r, r') = \underbrace{\underbrace{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}_{\text{volume}} \,/\, \underbrace{\textsf{área}(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{área da base}}}_{\text{altura}}$.
7) (Difícil!) Sejam
$r = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$r' = \{\, B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Como a gente encontra uma reta s que corte r e r' e seja ortogonal a ambas?
Sejam $C_t = A + t\vec{u}$ e $D_{t'} = B + t'\vec{v}$.
Queremos que $\overrightarrow{C_t D_{t'}}$ seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_t D_{t'}}$ seja paralelo a $\vec{u} \times \vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_t D_{t'}} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(D_{t'} - C_t) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $((B + t'\vec{v}) - (A + t\vec{u})) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(t'\vec{v} - t\vec{u} + \overrightarrow{AB}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
o que dá um sistema que nos permite encontrar t e t' com poucas contas...
Sabendo t e t' sabemos C_t e $D_{t'}$, e a reta s passa por C_t e $D_{t'}$.

Agora você deve ser capaz de resolver os exercícios 1 a 20 da lista 9 da Ana Isabel! Yaaaaay! =) =) =)