

EXERCÍCIOS SOBRE EXPRESSÕES EQUIVALENTES
(CONTINUAÇÃO)

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A TRABALHAR NO SEGUINTE EXERCÍCIO:

CONSIDERE AS EXPRESSÕES ABAIXO:

- (E₀) $\forall x \in A \cup B. P(x)$
- (E₁) $\forall x \in A \cap B. P(x)$
- (E₂) $\exists x \in A \cup B. P(x)$
- (E₃) $\exists x \in A \cap B. P(x)$
- (E₄) $\forall x \in A. (x \in B \rightarrow P(x))$
- (E₅) $\forall x \in A. (x \in B \wedge P(x))$
- (E₆) $\exists x \in A. (x \in B \rightarrow P(x))$
- (E₇) $\exists x \in A. (x \in B \wedge P(x))$

ALGUMAS SÃO EQUIVALENTES ENTRE SI. QUAIS? ENCONTRE MODOS DE MOSTRAR QUE ALGUMAS SENTENÇAS NÃO SÃO EQUIVALENTES.

DICAS: podemos começar com $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$.

P PODE SER QUALQUER PROPOSIÇÃO DEFINIDA SOBRE $\{1, 2, 3\}$.

EXEMPLOS DE PROPOSIÇÕES:

$$P(x) = (x=3)$$

$$P(x) = (x=1 \rightarrow x=3)$$

$$P(x) = V$$

PENSE EM ÁLGEBRA E CÁLCULO 1...

x E x^2 SÃO FUNÇÕES DIFERENTES MAS QUE COINCIDEM EM $x=0$ E $x=1$;

x^2 E $(x+1)(x-1)+1$ SÃO DUAS FUNÇÕES DE x "EQUIVALENTES", MAS TIVEMOS QUE APRENDER BASTANTE ÁLGEBRA PARA ENTENDER ISTO...

AGORA ESTAMOS APRENDEDO MÉTODOS "ALGÉBRICOS" PARA LIDAR COM EXPRESSÕES LÓGICAS.

36) ANALISE O QUE ACONTECE SE DEFINIMOS:

$$(D_1) \forall x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow V$$

$$(D_2) \forall x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow F$$

$$(D_3) \exists x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow V$$

$$(D_4) \exists x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow F$$

QUAIS DESTAS DEFINIÇÕES DEVEM VALER? PORQUÊ?

4) COMPARE O EXERCÍCIO 3 COM A DISCUSSÃO DO LIVRO (PÁGS 45-47) SOBRE O VALOR DE 0!. REPRE QUE 1 É O ELEMENTO NEUTRO DO PRODUTO: $x \cdot 1 = x$.

LEMBRE QUE PODEMOS USAR A NOSSA NOÇÃO DE "REDUÇÃO" PARA CALCULAR O VALOR DE VERDADE DE CADA UMA DAS EXPRESSÕES E_0, \dots, E_7 - DESDE QUE CONHEÇAMOS OS CONJUNTOS A E B E A PROPOSIÇÃO $P(x)$. POR EXEMPLO, SE $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ E $P(x) = (x=3)$,

$$\begin{aligned} \forall x \in A \cup B. P(x) &\rightsquigarrow \forall x \in A \cup B. x=3 \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \forall x \in \{1, 2, 3\}. P(x) &\rightsquigarrow \forall x \in \{1, 2, 3\}. x=3 \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) &\rightsquigarrow 1=3 \wedge 2=3 \wedge 3=3 \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad F \wedge F \wedge V \rightsquigarrow F. \end{aligned}$$

NÓS QUASE SEMPRE TEMOS VÁRIOS CAMINHOS DE REDUÇÃO POSSÍVEIS - E NESTE CASO SE SÓ DAMOS OS DOIS PRIMEIROS PASSOS PRA BAIXO DESCOBRIMOS QUE:

$$\forall x \in A \cup B. P(x)$$

||

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$

$$(OU: (\forall x \in A \cup B. P(x)) \leftrightarrow (P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)))$$

E ISTO VALE PARA QUALQUER "VALOR" PARA P - JÁ QUE NÃO SUBSTITUÍMOS $P(x)$ POR $x=3$ NENHUMA VEZ - DESDE QUE $A = \{1, 2\}$ E $B = \{2, 3\}$.

1) USE ESTA IDÉIA PRA PROVAR QUE QUANDO $A = \{1, 2\}$ E $B = \{2, 3\}$ TEMOS

$$E_1 \not\leftrightarrow E_3$$

PARA QUALQUER PROPOSIÇÃO $P(x)$.

2) MOSTRE QUE SE $A = \{4, 5, 6\}$ E $B = \{5, 6, 7\}$ ENTÃO E_1 E E_3 PODER NÃO SER EQUIVALENTES.

3) SADEMOS "REDUZIR" EXPRESSÕES COMO

$$\forall a \in A. P(a) \text{ E } \exists a \in A. P(a)$$

QUANDO A É UM CONJUNTO FINITO NÃO-VAZIO. E REPRE:

$$\forall a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. P(a)$$

$$\downarrow$$

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5)$$

$$\forall a \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}. P(a) \quad \leftarrow \text{QUANDO } A \text{ TEM } n \text{ ELEMENTOS}$$

$$\downarrow$$

$$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n) \quad \leftarrow \text{A "REDUÇÃO" TEM } n \text{ OCORRÊNCIAS DE } P(a)$$

ENTÃO É RAZOÁVEL ESPERAR QUE QUANDO A É \emptyset (O CONJUNTO VAZIO; OUTRA NOTASÃO PARA \emptyset É $\{\}$) ENTÃO A "REDUÇÃO" DEVE TER ZERO OCORRÊNCIAS DE $P(a)$.

3a) MOSTRE QUE QUANDO $A \neq \emptyset$ E $B \neq \emptyset$ TEMOS

$$(\forall x \in A \cup B. P(x)) \leftrightarrow (\forall x \in A. P(x)) \wedge (\forall x \in B. P(x))$$

$$\text{E } (\exists x \in A \cup B. P(x)) \leftrightarrow (\exists x \in A. P(x)) \vee (\exists x \in B. P(x)).$$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS

SOBRE EXPRESSÕES EQUIVALENTES

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$ ENTÃO:

$$E_0 \rightsquigarrow \forall x \in \{1, 2\} \cup \{2, 3\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow \forall x \in \{1, 2, 3\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$

$$E_1 \rightsquigarrow \forall x \in \{1, 2\} \cap \{2, 3\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow \forall x \in \{2\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow P(2)$$

$$E_2 \rightsquigarrow \exists x \in \{1, 2\} \cup \{2, 3\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow \exists x \in \{1, 2, 3\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3)$$

$$E_3 \rightsquigarrow \exists x \in \{1, 2\} \cap \{2, 3\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow \exists x \in \{2\}. P(x)$$

$$\rightsquigarrow P(2)$$

$$E_4 \rightsquigarrow \forall x \in \{1, 2\}. (x \in \{2, 3\} \rightarrow P(x))$$

$$\rightsquigarrow (1 \in \{2, 3\} \rightarrow P(1)) \wedge (2 \in \{2, 3\} \rightarrow P(2))$$

$$\rightsquigarrow (F \rightarrow P(1)) \wedge (V \rightarrow P(2))$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} V \wedge P(2)$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} P(2)$$

$$E_5 \rightsquigarrow \forall x \in \{1, 2\}. (x \in \{2, 3\} \wedge P(x))$$

$$\rightsquigarrow (1 \in \{2, 3\} \wedge P(1)) \wedge (2 \in \{2, 3\} \wedge P(2))$$

$$\rightsquigarrow (F \wedge P(1)) \wedge (V \wedge P(2))$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} F \wedge P(2)$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} F$$

$$E_6 \rightsquigarrow \exists x \in \{1, 2\}. (x \in \{2, 3\} \rightarrow P(x))$$

$$\rightsquigarrow (1 \in \{2, 3\} \rightarrow P(1)) \vee (2 \in \{2, 3\} \rightarrow P(2))$$

$$\rightsquigarrow (F \rightarrow P(1)) \vee (V \rightarrow P(2))$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} V \vee P(2)$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} V$$

$$E_7 \rightsquigarrow \exists x \in \{1, 2\}. (x \in \{2, 3\} \wedge P(x))$$

$$\rightsquigarrow (1 \in \{2, 3\} \wedge P(1)) \vee (2 \in \{2, 3\} \wedge P(2))$$

$$\rightsquigarrow (F \wedge P(1)) \vee (V \wedge P(2))$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} F \vee P(2)$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} P(2)$$

REPRE QUE PARA QUALQUER VALOR DE VERDADE Q TEMOS:

Q	$F \wedge Q$	$V \wedge Q$	$F \vee Q$	$V \vee Q$	$F \rightarrow Q$	$V \rightarrow Q$	V	F
F	F	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	F

ENTÃO TEMOS:

$$F \wedge Q = F$$

$$V \wedge Q = Q$$

$$F \vee Q = Q$$

$$V \vee Q = V$$

$$F \rightarrow Q = V$$

$$V \rightarrow Q = Q$$

PODEMOS CONSIDERAR CADA UMA DESTAS IGUALDADES COMO UMA REGRA DE REDUÇÃO:

$$F \wedge Q \rightsquigarrow F$$

$$V \wedge Q \rightsquigarrow Q$$

$$F \vee Q \rightsquigarrow Q$$

$$V \vee Q \rightsquigarrow V$$

$$F \rightarrow Q \rightsquigarrow V$$

$$V \rightarrow Q \rightsquigarrow Q$$

ISTO JUSTIFICA AS REDUÇÕES MARCADAS COM "(*)"

À ESQUERDA. POR EXEMPLO:

$$(F \rightarrow P(1)) \wedge (V \rightarrow P(2))$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} V \wedge P(2) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{POR } F \rightarrow Q \rightsquigarrow V \\ \text{E } V \rightarrow Q \rightsquigarrow Q \end{array}$$

$$\stackrel{(*)}{\rightsquigarrow} P(2) \quad \leftarrow \text{POR } V \wedge Q \rightsquigarrow Q$$

TAMBÉM PODERÍAMOS TER PENSADO NOS "(*)"S

COMO IGUALDADES:

$$(F \rightarrow P(1)) \wedge (V \rightarrow P(2))$$

$$\parallel \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{PORQUE} \\ F \rightarrow Q = V \\ \text{E } V \rightarrow Q = Q \end{array}$$

$$\parallel \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{PORQUE} \\ V \wedge Q = Q \end{array}$$

MAS O QUE IMPORTA É QUE CONSEGUIMOS DESCOBRIR QUE SE $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$, ENTÃO:

$$E_0 = P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$

$$E_1 = P(2)$$

$$E_2 = P(1) \vee P(2) \vee P(3)$$

$$E_3 = P(2)$$

$$E_4 = P(2)$$

$$E_5 = F$$

$$E_6 = V$$

$$E_7 = P(2)$$

NO SENTIDO DE "O RESULTADO FINAL" - UM VALOR DE VERDADE, ISTO É, V ou F

SÓ PODEMOS CALCULAR O "RESULTADO" DE E_0, E_1, \dots, E_7 SE SABEMOS QUEM É A PROPOSIÇÃO $P(x)$ (LEMBRE QUE JÁ FIXAMOS $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$)... O "VALOR" DE E_0, E_1, \dots, E_7 DEPENDE DA PROPOSIÇÃO $P(x)$, COMO O VALOR DE UMA EXPRESSÃO COMO $x^2 + 1$ DEPENDE DO VALOR DE x , E PODEMOS FAZER UMA TABELA,

	F	$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$	$P(2)$	$P(1) \vee P(2) \vee P(3)$	V
$P(x) = F$	F	F	F	F	V
$P(x) = (x=3)$	F	F	F	V	V
$P(x) = (x=2)$	F	F	V	V	V
$P(x) = V$	F	V	V	V	V

QUE MOSTRA QUE AS EXPRESSÕES $F, P(1) \wedge P(2) \wedge P(3), P(2), P(1) \vee P(2) \vee P(3)$ E V NÃO SÃO EQUIVALENTES.

ISTO NOS MOSTRA QUE AS EXPRESSÕES E_5, E_0, E_2 E E_6

CONTINUA

(GABARITO DOS EXERCÍCIOS

SOBRE EXPRESSÕES EQUIVALENTES -

CONTINUAÇÃO)

... NÃO SÃO EQUIVALENTES A NENHUMA DAS OUTRAS; MAS AINDA NÃO SABEMOS QUAIS DAS EXPRESSÕES E_1, E_3, E_4 E E_7 VÃO SER SEMPRE EQUIVALENTES ENTRESI - O QUE VIMOS ATÉ AGORA É QUE QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$ TEMOS

$$E_1 = E_3 = E_4 = E_7 = P(2).$$

- ① Como vimos acima, quando $A=\{1,2\}$ e $B=\{2,3\}$ temos $E_1 = P(2)$ e $E_3 = P(2)$. Podemos FAZER UMA TABELA COM O VALOR DE E_1 e E_3 COMO FUNÇÃO DO VALOR DE $P(2)$:

$P(2)$	E_1	E_3	$E_1 \leftrightarrow E_3$
F	F	F	V
V	V	V	V

ISTO É UMA "PROVA PELA TABELA VERDADE" (VEJA A SEÇÃO 5 DO LIVRO) DE QUE $E_1 \leftrightarrow E_3$ É SEMPRE VERDADE (QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$).

- ② Se $A=\{4,5,6\}$ E $B=\{5,6,7\}$ ENTÃO:

$$E_1 \leftrightarrow \forall x \in A \cup B. P(x) \quad E_3 \leftrightarrow \exists x \in A \cap B. P(x)$$

$$\forall x \in \{5,6\}. P(x) \quad \exists x \in \{5,6\}. P(x)$$

$$P(5) \wedge P(6) \quad P(5) \vee P(6)$$

Se $P(x) = (x=5)$ ENTÃO:

$$P(5) \wedge P(6) \quad P(5) \vee P(6)$$

$$5=5 \wedge 6=5 \quad 5=5 \vee 6=5$$

$$V \wedge F \quad V \vee F$$

$$F \quad V$$

CONSEGUIMOS UM CASO [REDACTED] -

$A=\{4,5,6\}$, $B=\{5,6,7\}$, $P(x)=(x=5)$ - NO QUAL $E_1 = F$ E $E_3 = V$; ISTO MOSTRA QUE E_1 E E_3 NÃO SÃO EQUIVALENTES.

- 3a) Como POR ENQUANTO SÓ ESTAMOS LIDANDO COM CONJUNTOS FINITOS, PODEMOS SUPOR QUE $A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ E $B=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, ONDE m E n SÃO NÚMEROS NATURAIS POSITIVOS. (EXEMPLO: SE $A=\{\{1,2\}, 3\}$ E $B=\{4,5,6\}$ ENTÃO $m=2$, $a_1=\{1,2\}$, $a_2=3$, $n=1$, $b_1=(4,5,6)$)

$$\text{AÍ } A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\};$$

NOTE QUE ISTO VALE MESMO QUANDO

A E B TÊM ELEMENTOS EM COMUM:

SE $A=\{4,5,6\}$ E $B=\{5,6,7\}$ ENTÃO

$$A \cup B = \{4,5,6,5,6,7\} = \{4,5,6,7\}.$$

ENTÃO:

$$\forall x \in A \cup B. P(x) \quad (\forall x \in A. P(x)) \wedge (\forall x \in B. P(x))$$

$$\forall x \in \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}. P(x) \quad (\forall x \in \{a_1, \dots, a_m\}. P(x)) \wedge (\forall x \in \{b_1, \dots, b_n\}. P(x))$$

$$P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_m) \wedge P(b_1) \wedge \dots \wedge P(b_n) = (P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_m)) \wedge (P(b_1) \wedge \dots \wedge P(b_n))$$

E:

$$\exists x \in A \cup B. P(x) \quad (\exists x \in A. P(x)) \vee (\exists x \in B. P(x))$$

$$\exists x \in \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}. P(x) \quad (\exists x \in \{a_1, \dots, a_m\}. P(x)) \vee (\exists x \in \{b_1, \dots, b_n\}. P(x))$$

$$P(a_1) \vee \dots \vee P(a_m) \vee P(b_1) \vee \dots \vee P(b_n) = (P(a_1) \vee \dots \vee P(a_m)) \vee (P(b_1) \vee \dots \vee P(b_n))$$

- 3b) AINDA NÃO TEMOS REGRAS DE REDUÇÃO PARA EXPRESSÕES DA FORMA $\forall x \in \emptyset. P(x)$ E $\exists x \in \emptyset. P(x)$; VAMOS TESTAR AS

REGRAS DE REDUÇÃO

- (D₁) $\forall x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow V$
 (D₂) $\forall x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow F$
 (D₃) $\exists x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow V$
 (D₄) $\exists x \in \emptyset. P(x) \rightsquigarrow F$

E VER O QUE ACONTECE COM $\forall x \in A \cup \emptyset. P(x)$,

$$(\forall x \in A. P(x)) \wedge (\forall x \in \emptyset. P(x)),$$

$$\exists x \in A \cup \emptyset. P(x),$$

$$(\exists x \in A. P(x)) \vee (\exists x \in \emptyset. P(x))$$

QUANDO ELAS VALEM.

SE $A=\{a_1, \dots, a_m\}$, ENTÃO:

$$\forall x \in A \cup \emptyset. P(x) \quad (\forall x \in A. P(x)) \wedge (\forall x \in \emptyset. P(x))$$

$$\forall x \in A. P(x) \rightsquigarrow (\forall x \in A. P(x)) \wedge V \quad (\forall x \in A. P(x)) \wedge F$$

$$F$$

E:

$$\exists x \in A \cup \emptyset. P(x) \quad (\exists x \in A. P(x)) \vee (\exists x \in \emptyset. P(x))$$

$$\exists x \in A. P(x) \rightsquigarrow (\exists x \in A. P(x)) \vee F \quad (\exists x \in A. P(x)) \vee V$$

$$V$$

OU SEJA: AS REGRAS D₁ E D₄

FAZEM COM QUE AS IGUALDADES DO ITEM ANTERIOR,

$$(\forall x \in A \cup B. P(x)) = (\forall x \in A. P(x)) \wedge (\forall x \in B. P(x))$$

$$E (\exists x \in A \cup B. P(x)) = (\exists x \in A. P(x)) \vee (\exists x \in B. P(x)),$$

QUE TÍNHAMOS VISTO QUE VALIAM QUANDO $A \neq \emptyset$ E $B \neq \emptyset$, CONTINUAM VALENDO QUANDO $B = \emptyset$.

PROPOSIÇÕES, LEMAS, ETC

NA ÚLTIMA AULA VIMOS ESTAS DEFINIÇÕES:
SE A E B SÃO CONJUNTOS ENTÃO:

DEF: SE $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ENTÃO
 $x \in A$ SE E SÓ SE $x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n$.

DEF: $A \subseteq B$ ("A ESTÁ CONTIDO OU É IGUAL A B") SE E SÓ SE $\forall a \in A. a \in B$.

DEF: $A = B$ SE E SÓ SE $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

OPS: A "PRONÚNCIA" DE $x \in A$ É

"X PERTENCE A A" OU "X É ELEMENTO DE A";

UMA PRONÚNCIA ALTERNATIVA PARA

$A \subseteq B$ É "A É SUBCONJUNTO DE B".

REPRE QUE $A \in B$ E $A \subseteq B$ SÃO
EXPRESSÕES DIFERENTES, COM SIGNIFICADOS
PRECISOS E DIFERENTES ENTRE SI... NÃO
CONFUNDA AS DUAS, E CUIDADO PRA NÃO
ESCREVER ALGO COMO "A ESTÁ DENTRO DE B"...
ISTO É AMBÍGUO!

VOLTANDO: VIMOS QUE $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$,
E VIMOS QUE A DEMONSTRAÇÃO DISTO
PODE OU SER FEITA DO MODO MAIS
ÓBVIO - COMO UMA CONTA ENORME -
OU PODE SER DIVIDIDA EM VÁRIAS PARTES,
USANDO "LEMAS".

PROPOSIÇÃO 1. $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$.

PARA DEMONSTRAR A PROPOSIÇÃO 1 VAMOS USAR
DOIS LEMAS.

LEMA 1.1. $\{1, 2\} \subseteq \{1, 1, 2\}$.

DEMONSTRAÇÃO (DO LEMA 1.1):

$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 1, 2\}$$

} PELA DEF. DE $A \subseteq B$,
COM $A = \{1, 2\}$ E $B = \{1, 1, 2\}$

$$\forall a \in \{1, 2\}. a \in \{1, 1, 2\}$$

} ~~PRONÚNCIA~~
EXPANDINDO O "V"

$$(1 \in \{1, 1, 2\}) \wedge (2 \in \{1, 1, 2\})$$

} EXPANDINDO OS "E"s

$$(1 = 1 \vee 1 = 1 \vee 1 = 2) \wedge (2 = 1 \vee 2 = 1 \vee 2 = 2)$$

}

$$(V \vee V \vee F) \wedge (F \vee F \vee V)$$

}

$$V \wedge V$$

}

$$V$$

LEMA 1.2. $\{1, 1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$.

DEMONSTRAÇÃO (DO LEMA 1.2):

$$\{1, 1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$$

$$\forall a \in \{1, 1, 2\}. a \in \{1, 2\}$$

}

$$1 \in \{1, 2\} \wedge 1 \in \{1, 2\} \wedge 2 \in \{1, 2\}$$

}

$$V \wedge V \wedge V$$

}

$$V$$

AGORA PODEMOS DEMONSTRAR A
PROPOSIÇÃO 1.

DEMONSTRAÇÃO (DA PROPOSIÇÃO 1):

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$$

} PELA DEF. DA IGUALDADE
EM CONJUNTOS

$$(\{1, 2\} \subseteq \{1, 1, 2\}) \wedge (\{1, 1, 2\} \subseteq \{1, 2\})$$

} PELOS LEMAS 1.1 E 1.2

$$V \wedge V$$

}

$$V$$

REPRE QUE PODERÍAMOS TER PROVAO
LEMAS MAIS GERAIS, COMO POR EXEMPLO:

LEMA 1.1'. $\{a, b\} \subseteq \{a, a, b\}$.

LEMA 1.2'. $\{a, a, b\} \subseteq \{a, b\}$.

E REPRE QUE NA DEMONSTRAÇÃO ACIMA
QUANDO CHEGAMOS AO PASSO:

$$(\{1, 2\} \subseteq \{1, 1, 2\}) \wedge (\{1, 1, 2\} \subseteq \{1, 2\})$$

} PELOS LEMAS 1.1 E 1.2

$$V \wedge V$$

NÓS JÁ DEMONSTRAMOS OS LEMAS 1.1 E 1.2,
E O LEITOR SADE QUE ESTA REDUÇÃO É
VÁLIDA... O QUE O LEITOR MAIS ATENTO VAI
SE PERGUNTAR É: "COMO É QUE ESSE CARA
ADVINHOU QUE TINHA QUE COMEÇAR PROVANDO
ESSES LEMAS?" - MAS O QUE ACONTECE É QUE
EM GERAL A GENTE ESCRVE DEMONSTRAÇÕES
NA ORDEM MAIS CONVINCENTE, QUE NÃO É
A ORDEM EM QUE A GENTE AS DESCOBRE...
O RASCUNHO PRA DEMONSTRAÇÃO DE
 $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$ SERIA ALGO ASSIM:

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\}$$

}

$$(\{1, 2\} \subseteq \{1, 1, 2\}) \wedge (\{1, 1, 2\} \subseteq \{1, 2\})$$

} ACHO QUE SEI PROVAV OS DOIS "E"s...

} VOU CHAMAR ESTAS PROVAS DE

$$V \wedge V$$

LEMAS 1.1 E 1.2.

JÁ FIZEMOS UM
PASSO PARECIDO COM
ESTE NO LEMA ANTERIOR,
ENTÃO AGORA PODEMOS
SUPOR QUE O LEITOR
JÁ APRENDEU A FAZER
PASSOS ASSIM COM
DETALHES, E PODEMOS
IR MAIS RÁPIDO.

PRIMEIRA PROVA ("P1")

- ① ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO INDUTIVA PARA A FUNÇÃO "RESTO":

$$r: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$$

$(n, d) \mapsto$ O RESTO DA DIVISÃO DE n POR d

E TESTE A SUA DEFINIÇÃO MOSTRANDO QUE $r(20, 6) = 2$.

3.5 PONTOS

- ② SUPONHA QUE $A = \{a_1, a_2, c_1, c_2\}$,
 $B = \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$,

ONDE $a_1, a_2 \notin B$

E $b_1, b_2 \notin A$.

Mostre que:

$$\forall x \in A. (x \in B \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \forall x \in A \cap B. P(x).$$

2.0 PONTOS

- ③ MOSTRE QUE SE AS REGRAS DE REDUÇÃO "(α)" E "(β)" ABAIXO VALEM,

$$\forall x \in A. (x \in B \rightarrow P(x)) \stackrel{(\alpha)}{\leadsto} \forall x \in A \cap B. P(x)$$

$$\forall x \notin A. P(x) \stackrel{(\beta)}{\leadsto} F$$

3.0 PONTOS

ENTÃO TEMOS UMA SEQUÊNCIA DE REDUÇÃO QUE PROVA QUE $\forall x \in A. (x \in B \rightarrow P(x))$ É VERDADEIRO E OUTRA QUE PROVA QUE $\forall x \in A. (x \in B \rightarrow P(x))$ É FALSO.

- ④ UMA RELAÇÃO $R \subseteq A \times A$ É TRANSITIVA SE $\forall a, b, c \in A. (aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$.

SEJA $A = \{0, 1, 2, 3\}$ E

$$R = \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 \mid x+1=y \vee x+2=y\}.$$

MOSTRE QUE $(R \text{ É TRANSITIVA}) \leadsto F$.

3.0 PONTOS

- ⑤ MOSTRE QUE $\{2\} = \{\{2\}\} \leadsto F$.

(LEMBRE QUE QUANDO a E b SÃO DE "TIPOS DIFERENTES" - POR EXEMPLO, QUANDO a É UM NÚMERO E b É UMA LISTA - TEMOS $a=b \leadsto F$).

1.5 PONTOS

- ⑥ DIGAMOS QUE A SEQUÊNCIA (A_0, A_1, \dots) É DADA POR:

$$A_n = \begin{cases} \emptyset & \text{QUANDO } n=0, \\ \{1\} & \text{QUANDO } n=1, \\ \{A_{n-1}\} \cup \{n\} & \text{QUANDO } n \geq 2. \end{cases}$$

CALCULE A_4 .

1.0 PONTOS

NA QUESTÃO 3 FALTOU UMA COISA NO ENUNCIADO: SUPONHA QUE $A = \{a_1, a_2\}$,
 $B = \{b_1, b_2\}$,
 $a_1, a_2 \notin B$,
 $b_1, b_2 \notin A$.

A PROVA VALE BEM MAIS DE 10 PONTOS, ENTÃO ESCOLHA AS QUESTÕES QUE VOCÊ QUER FAZER E FAÇA-AS COM MUITO CUIDADO.

A CORREÇÃO IRÁ SE BASEAR NO QUE VOCÊ ESCREVEU, E É IMPOSSÍVEL LER O QUE VOCÊ PENSOU E NÃO ESCREVEU.

VOCÊ NÃO PRECISA APAGAR OU RISCAR OS SEUS RASCUNHOS - SÓ INDIQUE ONDE ESTÁ A RESPOSTA FINAL.

LEMBRE QUE A "RESPOSTA CERTA" PARA CADA PERGUNTA NÃO É UMA CONTINHA, EM GERAL... É UM RACIOCÍNIO CLARO E CONVINCENTE, COM TODOS OS DETALHES CERTOS NA PARTE EM MATEMÁTICAS - INCLUSIVE A SINTAXE DAS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS, E COM EXPLICAÇÕES CLARAS EM PORTUGUÊS E DIAGRAMAS, MOSTRANDO QUE VOCÊ SABE USAR BEM CADA UMA DESSAS "LINGUAGENS".

A PROVA É PRA SER FEITA SEM CONSULTA A NADA ALÉM DA FOLHA MANUSCRITA COM ANOTAÇÕES QUE VOCÊ DEVE TER TIRADO DE CASA E QUE DEVERÁ SER ANEXADA À PROVA. IDAS AO BANHEIRO SÓ SÃO PERMITIDAS NOS PRIMEIROS 30 MINUTOS DA PROVA.

VOCÊ PODE PERGUNTAR COISAS AO PROFESSOR DURANTE A PROVA, MAS NÃO PODE CONFIAR NAS RESPOSTAS.

RESPOSTAS PARECIDAS COM AS DE COLEGAS PODEM FAZER COM QUE A SUA PROVA SEJA ANULADA... PORTANTO NÃO COLE DE JEITO NENHUM E SEMPRE EScreva PELO MENOS UM POUCO DE PORTUGUÊS EM CADA RESPOSTA!

BOA PROVA!

(AH, E POR FAVOR NÃO EScreva NO CANTO SUPERIOR ESQUERDO DE CADA FOLHA - AS FOLHAS SERÃO GRAMPEADAS).

MATEMÁTICA DISCRETA

PURO/UFF - 2010.2

PROF: EDUARDO OCHS

GABARITO DA P1

(QUE ACONTECEU EM 6/OUT/2010)

- ① UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO $r(n, d)$:

5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d=1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

DUAS DEFINIÇÕES POSSÍVEIS PARA $r(n, d)$ E VERIFICAÇÕES DE QUE $r(20, 6) = 2$:

$$\text{I } r(n, d) = \begin{cases} n & \text{se } n < d, \\ r(n-d, d) & \text{se } n \geq d. \end{cases}$$

$$r(20, 6) = r(20-6, 6) = r(14, 6)$$

$$r(14, 6) = r(14-6, 6) = r(8, 6)$$

$$r(8, 6) = r(8-6, 6) = r(2, 6) = 2.$$

$$\text{II } r(n, d) = \begin{cases} r(n-1, d) + 1 & \text{se } r(n-1, d) + 1 < d, \\ 0 & \text{se } r(n-1, d) + 1 \geq d. \end{cases}$$

$$r(n, d) = \begin{cases} 0 & \text{se } n=0, \\ r(n-1, d) + 1 & \text{se } n > 0 \text{ e } r(n-1, d) + 1 < d, \\ 0 & \text{se } n > 0 \text{ e } r(n-1, d) + 1 \geq d. \end{cases}$$

$$\text{Ai: } r(0, 6) = 0$$

$$r(1, 6) = r(0, 6) + 1 = 1$$

$$r(2, 6) = 2$$

$$\vdots$$

$$r(5, 6) = 5$$

$$r(6, 6) = 0$$

$$r(7, 6) = 1$$

$$\vdots$$

$$r(11, 6) = 5$$

$$r(12, 6) = 0$$

$$\vdots$$

$$r(18, 6) = 0$$

$$r(19, 6) = 1$$

$$r(20, 6) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{② } \forall x \in A. (x \in B \rightarrow P(x)) & \quad \forall x \in A \cap B. P(x) \\ \{ & \quad \{ \\ (a_1 \in B \rightarrow P(a_1)) \wedge & \quad \{ \\ (a_2 \in B \rightarrow P(a_2)) \wedge & \quad \{ \\ (c_1 \in B \rightarrow P(c_1)) \wedge & \quad \{ \\ (c_2 \in B \rightarrow P(c_2)) & \quad \{ \\ \{ & \quad \{ \\ (F \rightarrow P(a_1)) \wedge & \quad \{ \\ (F \rightarrow P(a_2)) \wedge & \quad \{ \\ (V \rightarrow P(c_1)) \wedge & \quad \{ \\ (V \rightarrow P(c_2)) & \quad \{ \\ \{ & \quad \{ \\ V \wedge V \wedge P(c_1) \wedge P(c_2) \leadsto & \quad \{ \\ P(c_1) \wedge P(c_2) & \quad \{ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③ } \forall x \in A. (x \in B \rightarrow P(x)) & \xrightarrow{(\alpha)} \forall x \in A \cap B. P(x) \\ \{ & \quad \{ \\ (a_1 \in B \rightarrow P(a_1)) \wedge & \quad \{ \\ (a_2 \in B \rightarrow P(a_2)) & \quad \{ \\ \{ & \quad \{ \\ (F \rightarrow P(a_1)) \wedge & \quad \{ \\ (F \rightarrow P(a_2)) & \quad \{ \\ \{ & \quad \{ \\ V \wedge V \leadsto V & \quad \{ \\ & \quad \{ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{④ } R = \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 \mid x+1=y \vee x+2=y\} \\ = \{ (0, 1), (0, 2), \\ (1, 2), (1, 3), \\ (2, 3) \} \end{aligned}$$

GRÁFICAMENTE:

$$R = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & & \rightarrow & \rightarrow & \\ 1 & & & \rightarrow & \\ 2 & & & & \rightarrow \\ 3 & & & & \end{matrix}$$

$$\text{Se } a=0, b=1, c=3$$

$$\text{ENTÃO } aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$$

$$\{ \text{OR } 1 \wedge 1R3 \rightarrow 0R3$$

$$\{ \{ V \wedge V \rightarrow F$$

$$\{ \{ V \rightarrow F$$

$$\{ \{ F$$

$$\text{ENTÃO } (R \text{ É TRANSITIVA})$$

$$\{ \text{(PELA DEF)}$$

$$\{ (\forall a, b, c \in \{0, 1, 2, 3\}. aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$$

$$\{ \text{(PORQUE QUANDO } a=0, b=1, c=3 \text{ TEMOS } aRb \wedge bRc \rightarrow aRc \leadsto F). \\ \downarrow \\ F.$$

MATEMÁTICA DISCRETA
 PURO/UFF - 2010.2
 PROF: EDUARDO OCHS
 GABARITO DA P1 (CONT.)

$$\textcircled{5} \quad \{2\} = \{\{2\}\}$$

$$\{2\} \subseteq \{\{2\}\} \wedge \{\{2\}\} \subseteq \{2\}$$

$$(\forall a \in \{2\}. a \in \{\{2\}\}) \wedge (\forall b \in \{\{2\}\}. b \in \{2\})$$

$$(2 \in \{\{2\}\}) \wedge (\{2\} \in \{2\})$$

$$(2 = \{2\}) \wedge (\{2\} = 2)$$

$$F \wedge F$$

$$F$$

$$\textcircled{6} \quad A_n = \begin{cases} \emptyset & \text{QUANDO } n=0, \\ \{1\} & \text{QUANDO } n=1, \\ \{A_{n-1}\} \cup \{n\} & \text{QUANDO } n \geq 2 \end{cases}$$

$$A_0 = \emptyset$$

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{A_1\} \cup \{2\} = \{\{1\}\} \cup \{2\} = \{\{1\}, 2\}$$

$$A_3 = \{A_2\} \cup \{3\}$$

$$= \{\{\{1\}, 2\}\} \cup \{3\}$$

$$= \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$$

$$A_4 = \{A_3\} \cup \{4\}$$

$$= \{\{\{\{1\}, 2\}, 3\}\} \cup \{4\}$$

$$= \{\{\{\{1\}, 2\}, 3\}, 4\}$$

MATEMÁTICA DISCRETA
 PURO/UFF - 2010.2
 PROF: EDUARDO OCHS
 8/NOVEMBRO/2010

GRAMÁTICAS

USANDO CONSTRUÇÕES INDUTIVAS
 PODEMOS DEFINIR O CONJUNTO DAS
EXPRESSÕES VÁLIDAS. O HOPCROFT/
 ULLMAN/MOTWANI É TODO SOBRE
 ISTO... ISTO É UM ASSUNTO AVANÇADO,
 MAS OS EXEMPLOS BÁSICOS SÃO BEM
 FÁCEIS DE ENTENDER, E BEM ÚTEIS.

NO FINAL DE QUALQUER LIVRO SOBRE
 UMA LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO
 VOCÊ SEMPRE ENCONTRA UMA
 "ESPECIFICAÇÃO EM BNF" DA LINGUAGEM.

ISTO É UM EXEMPLO DE UMA ESPECIFICAÇÃO
 EM BNF: (OBS: ESTE EU TIREI DO MANUAL
 DO PISON)

expr: term '+' expr
 | term
 ;

term: '(' expr ')'
 | term '!'
 | NUMBER
 ;

UM MODO DE TRADUZÍ-LO PARA
 MATEMÁTICÔS É O SEGUINTE (VOU
 SIMPLIFICAR O "NUMBER"):

$\mathbb{D} = \{ "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9" \}$

$E_0 = \emptyset$

$T_0 = \emptyset$

E PARA QUALQUER $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n+1} = \{ t \dots "+" \dots e \mid t \in T_n, e \in E_n \}$$

$$\cup \{ t \mid t \in T_n \} \cup E_n \cup T_n$$

$$T_{n+1} = \{ "(" \dots e \dots ")" \mid e \in E_n \}$$

$$\cup \{ t \dots "!" \mid t \in T_n \}$$

$$\cup \mathbb{D}$$

$$\cup T_n$$

NA ÚLTIMA AULA - 4ª, 3/NOVEMBRO - VIMOS
 UMA PROVA EM ÁRVORE DE QUE $2^{777} < 777!$.

OS CONJUNTOS $E_0, E_1, E_2, \dots, T_0, T_1, T_2, \dots$
 SÃO FINITOS, MAS BEM GRANDES - NÃO VALE A
 PENA CALCULÁ-LOS EXPLICITAMENTE - MAS
 QUEM ENTENDEU A PROVA DA AULA PASSADA
 DEVE ENTENDER QUE ESTA ÁRVORE AQUI
 É UMA PROVA DE QUE $"(1+2)+3!" \in E_5$:

$"1" \in \mathbb{D}$	$"2" \in \mathbb{D}$	$"3" \in \mathbb{D}$
$\frac{"1" \in \mathbb{D}}{"1" \in T_1}$	$\frac{"2" \in \mathbb{D}}{"2" \in T_1}$	$\frac{"3" \in \mathbb{D}}{"3" \in T_1}$
$\frac{"1" \in T_1}{"1" \in T_2}$	$\frac{"2" \in T_1}{"2" \in T_2}$	$\frac{"3" \in T_1}{"3" \in T_2}$
$\frac{"1" \in T_2 \quad "2" \in T_2}{"1+2" \in E_3}$		$\frac{"3" \in T_2}{"3!" \in T_3}$
$\frac{"1+2" \in E_3}{"(1+2)" \in T_4}$		$\frac{"3!" \in T_3}{"3!" \in E_4}$
$\frac{"(1+2)" \in T_4 \quad "3!" \in E_4}{"(1+2)+3!" \in E_5}$		

EXERCÍCIOS:

1a) PROVE QUE $"1+2!" \in E_4$.

1b) EXPLIQUE - EM PORTUGUÊS - PORQUE
 CADA UM DOS PASSOS DA ÁRVORE
 ACIMA É VÁLIDO.

GRAMÁTICAS (CONT.)

UM OUTRO MODO DE DEFINIR O CONJUNTO DAS "EXPRESSÕES VÁLIDAS" FORMADAS A PARTIR DE DÍGITOS E DE '+' E '!' É A PARTIR DESTAS EQUAÇÕES:

$$E = \{t.. "+" .. e \mid t \in T, e \in E\}$$

$$\cup T$$

$$T = \{(".." e.."") \mid e \in E\}$$

$$\cup \{t.."!" \mid t \in T\}$$

$$\cup \mathbb{D}$$

OU:

$$A = \{a_1.. "+" .. a_2 \mid a_1, a_2 \in A\}$$

$$\cup \{(".." a.."") \mid a \in A\}$$

$$\cup \{a.."!" \mid a \in A\}$$

$$\cup \mathbb{D}$$

AGORA OS CONJUNTOS E, T, A VÃO SER INFINITOS, MAS SABEMOS PROVAR QUE CADA "EXPRESSÃO VÁLIDA" PERTENCE A ELES:

$$\begin{array}{l} \frac{}{2 \in \mathbb{D}} \\ \frac{1 \in \mathbb{D}}{1 \in T} \quad \frac{2 \in T}{2 \in E} \quad \frac{3 \in \mathbb{D}}{3 \in T} \\ \frac{1+2 \in E}{(1+2) \in T} \quad \frac{3! \in T}{3! \in E} \\ \frac{(1+2)+3! \in E}{} \end{array}$$

NOTE QUE TEMOS DUAS PROVAS DIFERENTES DE QUE $"1+2!" \in A$:

$$\begin{array}{l} \frac{1 \in \mathbb{D}}{1 \in A} \quad \frac{2 \in \mathbb{D}}{2 \in A} \\ \frac{1+2 \in A}{1+2! \in A} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{2 \in \mathbb{D}}{2 \in A} \\ \frac{1 \in \mathbb{D}}{1 \in A} \quad \frac{2! \in A}{1+2! \in A} \end{array}$$

A DA DIREITA CORRESPONDE À PROVA DO EXERCÍCIO (1a), DE QUE $"1+2!" \in E_4$; A DA ESQUERDA É NOVA.

EXERCÍCIOS:

- (2a) ENCONTRE DUAS PROVAS DIFERENTES DE QUE $"1+2+3" \in A$.
- (2b) ENCONTRE UMA PROVA DE QUE $"1+2+3" \in E$.
- (2c) ENCONTRE UMA PROVA DE QUE $"1+2+3" \in E_4$.

VALORES DE EXPRESSÕES

DIGAMOS QUE $R \subseteq E \times \mathbb{N}$

É UMA RELAÇÃO QUE OBEDECE

$$\begin{array}{l} t \in T, \\ (t, n_1) \in R \end{array}$$

ESTAS EQUAÇÕES:

$$R \supseteq \{(t.. "+" .. e, n_1+n_2) \mid (t, n_1) \in R, (e, n_2) \in R\}$$

$$R \supseteq \{(".." e.."", n) \mid (e, n) \in R\}$$

$$R \supseteq \{(t.."!", n!) \mid t \in T, (t, n) \in R\}$$

$$R \supseteq \{("0", 0), ("1", 1), \dots, ("9", 9)\}$$

EXERCÍCIOS:

- (2d) EXPLIQUE - EM PORTUGUÊS - CADA PASSO DA PROVA ABAIXO:

$$\frac{}{1 \in \mathbb{D}}$$

$$\frac{1 \in T \quad (1, 1) \in R \quad (2, 2) \in R}{(1+2, 3) \in R}$$

- (2e) PROVE QUE $("2+3!", 8) \in R$.

- (2f) ADAPTE AS EQUAÇÕES ACIMA PARA ENCONTRAR EQUAÇÕES SOBRE UMA RELAÇÃO $S \subseteq A \times \mathbb{N}$.

- (2g) PROVE QUE $("2+3!", 8) \in S$.

- (2h) ADAPTE ESTA PROVA PARA OBTER UMA PROVA DE QUE $("2+3!", 120) \in S$.

SISTEMAS DEDUTIVOS

VOCÊ DEVE ESTAR COMEÇANDO A PERCEBER QUE DÁ PRA DEFINIR FORMALMENTE O CONJUNTO DAS EXPRESSÕES VÁLIDAS E COMO CALCULAR OS SEUS VALORES. TAMBÉM PODEMOS DEFINIR O CONJUNTO DAS PROPOSIÇÕES VÁLIDAS, E A PARTIR DELE O CONJUNTO DAS "BARRAS VÁLIDAS" E DAS ÁRVORES NAS QUAIS CADA BARRA É UMA DEDUÇÃO VÁLIDA...

SISTEMAS DEDUTIVOS

NUMA DAS ÚLTIMAS AULAS NÓS CHEGAMOS, EM SALA, A UMA PROVA DE $2^{777} < 777!$. QUE CONVENÇEU TODO MUNDO:

$$\begin{array}{r} 2^4 < 4! \\ \hline 2 \cdot 2^4 < 5 \cdot 4! \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 2^4 < 6 \cdot 5 \cdot 4! \\ \hline \vdots \\ \hline 2^{777} < 777! \end{array} \begin{array}{l} p''' \\ p''' \\ p''' \\ p''' \end{array}$$

MAS TÍNHAMOS UM PROBLEMA: A REGRA

$$\frac{0 < a < b \quad 0 < c < d}{0 < ac < bd} p''$$

NÃO É UMA DAS REGRAS QUE APARECEM NO APÊNDICE C DO SCHEINERMAN COMO UMA DAS REGRAS BÁSICAS... ELA É CONSEQUÊNCIA DAS REGRAS BÁSICAS - ELA PODE SER PROVADA COMO UM TEOREMA, E A PARTIR DAÍ PODEMOS USÁ-LA COMO UMA NOVA REGRA DE DEDUÇÃO.

AS NOSSAS REGRAS BÁSICAS VÃO SER ESTAS:

$$\frac{\alpha < \beta \quad \beta < \gamma}{\alpha < \gamma} T \quad ("TRANSITIVIDADE")$$

$$\frac{\beta < \gamma}{\alpha + \beta < \alpha + \gamma} S \quad ("SOMA")$$

$$\frac{\alpha < \alpha \quad \beta < \gamma}{\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma} p \quad ("PRODUTO")$$

$$\frac{\alpha < \beta}{\alpha' < \beta'} A \quad ("ÁLGEBRA")$$

ONDE $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ SÃO EXPRESSÕES, E A REGRA A SÓ PODE SER APLICADA QUANDO SABEMOS QUE AS EXPRESSÕES α E α' "TÊM O MESMO VALOR", E β E β' TAMBÉM.

VAMOS INTERPRETAR EXPRESSÕES COMO STRINGS, E SABEMOS QUE $"2 \cdot 3" \neq "3 \cdot 2"$. A REGRA A É A QUE NOS PERMITE PROVAR COISAS COMO:

$$\frac{2 \cdot 2^4 < 5 \cdot 4!}{2^5 < 5!} A$$

VAMOS USAR A NOTAÇÃO

$$\frac{P \quad Q \quad R}{S}$$

COM UMA BARRA DUPLA, COMO UMA ABREVIÇÃO PARA UMA DEDUÇÃO DA CONCLUSÃO, S, A PARTIR DAS HIPÓTESES P, Q E R, USANDO SÓ REGRAS QUE CONSIDERAMOS "BÁSICAS", E VAMOS USAR A NOTAÇÃO

$$\frac{P \quad Q \quad R}{S} T_1 \quad \leftarrow \text{NOME DO TEOREMA!}$$

PRA INDICAR QUE ALÉM DISTO ESTAMOS DEFININDO UMA REGRA NOVA.

EXEMPLO:

TEOREMA (T'):

$$\frac{a < b \quad b < c \quad c < d}{a < d} T'$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{a < b \quad b < c}{a < c} T \quad \frac{a < c \quad c < d}{a < d} T$$

TEOREMA (T''):

$$\frac{a < b \quad b < c \quad c < d \quad d < e}{a < e} T''$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{a < b \quad b < c \quad c < d}{a < d} T' \quad \frac{a < d \quad d < e}{a < e} T$$

REPRE QUE SE EXPANDINDO O T' NA DEMONSTRAÇÃO ACIMA OBTENEMOS:

$$\frac{a < b \quad b < c}{a < c} T \quad \frac{a < c \quad c < d}{a < d} T \quad \frac{a < d \quad d < e}{a < e} T$$

QUE É UMA DEMONSTRAÇÃO DE T'' QUE ENVOLVE SÓ AS REGRAS BÁSICAS ORIGINAIS.

EXERCÍCIOS SOBRE SISTEMAS DEDUTIVOS

LEMBRE QUE ESTAMOS TRABALHANDO COM ESTES QUATRO "AXIOMAS", OU "REGRAS";

$$\frac{\alpha < \beta \quad \beta < \gamma}{\alpha < \gamma} T \quad ("TRANSITIVIDADE"),$$

$$\frac{\alpha < \beta}{\alpha' < \beta'} A \quad ("ÁLGEBRA"; \text{AQUI } \alpha \text{ E } \alpha' \text{ SÃO EXPRESSÕES QUE PODEMOS PROVAR POR MANIPULAÇÕES ALGÉBRICAS QUE SÃO "NUMERICAMENTE IGUAIS", E IDEM PARA } \beta \text{ E } \beta'),$$

$$\frac{\beta < \gamma}{\alpha + \beta < \alpha + \gamma} S \quad ("SOMA"),$$

$$\frac{0 < \alpha \quad 0 < \beta}{0 < \alpha \cdot \beta} P_0 \quad ("PRODUTO").$$

① PROVE OS QUATRO LEMAS ABAIXO,

$$\frac{\alpha < \beta}{0 < \beta - \alpha} L_A \quad ("LEMA A"),$$

$$\frac{0 < \beta - \alpha}{\alpha < \beta} L_B \quad ("LEMA B"),$$

$$\frac{0 < \alpha \quad b < c}{ab < ac} L_C \quad ("LEMA C"),$$

$$\frac{0 < \alpha \quad \alpha < \beta \quad 0 < c \quad c < d}{\alpha c < \beta d} L_D \quad ("LEMA D")$$

USANDO SÓ AS REGRAS T, A, S, P₀ E OS LEMAS ANTERIORES; OU SEJA, NA DEMONSTRAÇÃO DO L_A VOCÊ SÓ PODE USAR T, A, S, P₀, MAS NA DEMONSTRAÇÃO DO L_D VOCÊ PODE USAR AS "REGRAS" T, A, S, P₀, L_A, L_B, L_C. REPARE QUE CADA LEMA QUE PROVAMOS SE TRANSFORMA NUMA REGRA NOVA QUE PODEMOS USAR EM DEMONSTRAÇÕES FUTURAS.

② "EXPANDA" CADA USO DOS LEMAS L_A, L_B, L_C NA SUA DEMONSTRAÇÃO DO LEMA L_D, ISTO É, TROQUE CADA BARRA MARCADA COM "L_A" PELA DEMONSTRAÇÃO DO L_A, TROQUE CADA BARRA MARCADA COM "L_B" PELA DEMONSTRAÇÃO DO L_B, ETC; O RESULTADO DEVE SER UMA DEMONSTRAÇÃO (GRANDE!) DE L_D USANDO SÓ AS REGRAS T, A, S, P₀.

CONECTIVOS LÓGICOS: "Λ" ("E")

A NOTAÇÃO " $\alpha < \beta < \gamma$ " É UMA ABREVIATURA PARA " $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma$ ". AS REGRAS DE DEDUÇÃO QUE NOS PERMITEM MANIPULAR PROPOSIÇÕES COM O "Λ" SÃO ESTAS AQUI:

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E_1 \quad ("ELIMINAÇÃO DO 'E', VERSÃO 1"),$$

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \wedge E_2 \quad ("ELIMINAÇÃO DO 'E', VERSÃO 2"),$$

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \wedge I \quad ("INTRODUÇÃO DO 'E'").$$

ADAPTANDO-AS PARA A NOTAÇÃO $\alpha < \beta < \gamma$, TEMOS:

$$\frac{\alpha < \beta < \gamma}{\alpha < \beta} \wedge E_1 \quad \frac{\alpha < \beta < \gamma}{\beta < \gamma} \wedge E_2$$

$$\frac{\alpha < \beta \quad \beta < \gamma}{\alpha < \beta < \gamma} \wedge I$$

③ DEMONSTRE ISTO:

$$\frac{0 < a < b \quad 0 < c < d}{0 < ac < bd} L_E \quad ("LEMA E")$$

VOCÊ PODE USAR TODAS AS REGRAS DEFINIDAS ATÉ AGORA: T, A, S, P₀, L_A, L_B, L_C, L_D, $\wedge E_1$, $\wedge E_2$, $\wedge I$.

④ DEMONSTRE QUE $2^{10} < 10!$ E LEMAS... TENTE USAR SÓ AS REGRAS QUE DEFINIMOS ATÉ AGORA.

⑤ ~~DEMONSTRE~~ DEMONSTRE QUE $2^{777} < 777!$. AGORA VOCÊ PODE USAR RETICÊNCIAS ("...") NA SUA ÁRVORE. TENTE USAR AS RETICÊNCIAS DO MODO MAIS CLARO POSSÍVEL. DISCUTA COM OS SEUS COLEGAS.

DICAS E SUGESTÕES PARA O ④ E O ⑤:

a) VOCÊ PODE TER REGRAS E LEMAS SEM NENHUMA HIPÓTESE - POR EXEMPLO:

$$\frac{}{n < n+4}$$

b) TENTE PROVAR

$$\frac{}{2 < n} \quad \frac{}{0 < n < n+4}$$

c) VOCÊ PODE USAR LEMAS SEM NOME NO RASCUNHO, E NOMEÁ-LOS SÓ NO FINAL.

EXERCÍCIOS SOBRE SISTEMAS DEDUTIVOS (PARTE 2: IMPLICAÇÃO)

DA MESMA FORMA QUE O "∧" TEM REGRAS DE INTRODUÇÃO E ELIMINAÇÃO, OS OUTROS CONECTIVOS E QUANTIFICADORES (\rightarrow , \vee , \forall , \exists , ...) TAMBÉM TÊM...

A REGRA " \rightarrow E" É FÁCIL,

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q} \rightarrow E$$

MAS A REGRA " \rightarrow I" É DIFÍCIL, E VAI MERECER QUE VOCÊ PENSE VÁRIAS HORAS SOBRE ELA PARA ENTENDÊ-LA BEM.

ELA FUNCIONA ASSIM: PARA PROVAR " $Q \rightarrow R$ " A PARTIR DE HIPÓTESES P_1, P_2, \dots, P_n NÓS PRIMEIRO PROVAMOS R A PARTIR DE P_1, \dots, P_n, Q ,

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \quad P_n \quad Q}{R}$$

E AÍ CONSIDERAMOS QUE PODEMOS EMPURRAR A HIPÓTESE Q PARA DENTRO DA CONCLUSÃO:

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \quad P_n}{Q \rightarrow R}$$

ISTO FICA MAIS CLARO SE COMPARAMOS A NOTAÇÃO EM ÁRVORE COM A NOTAÇÃO LINHA-A-LINHA. POR EXEMPLO:

LEMA ("T"):

$$\frac{a < b \quad b < c}{c < d \rightarrow a < d} T$$

ISTO É UM JARGÃO MATEMÁTICO!

DEMONSTRAÇÃO: BASTA MOSTRAR QUE:

$$\frac{a < b \quad b < c \quad c < d}{a < d} T$$

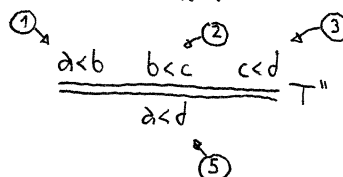
A DEMONSTRAÇÃO DE T' É:

$$\frac{\frac{a < b \quad b < c}{a < c} T \quad c < d}{a < d} T$$

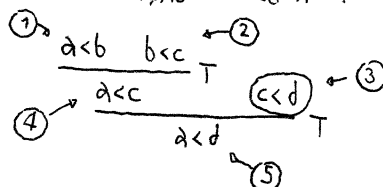
NA NOTAÇÃO LINHA-A-LINHA, ISTO FICA:

- 1) $a < b$ (POR HIPÓTESE)
- 2) $b < c$ (POR HIPÓTESE)
- 3) SUPONHA QUE $c < d$.
- 4) $a < c$ (POR (1), (2) E T).
- 5) $a < d$ (POR (4), (3) E T).
- 6) PORTANTO $c < d \rightarrow a < d$.

REPRE QUE CADA UMA DAS LINHAS DE 1 A 6 ACIMA CORRESPONDE A PELO MENOS UM NÓ DAS ÁRVORES:



DEMONSTRAÇÃO DO LEMA T':



E O ENUNCIADO DO LEMA T' É:

$$\frac{a < b \quad b < c}{c < d \rightarrow a < d} T'$$

EXERCÍCIOS:

- 6) DEMONSTRE QUE $2^{20} < 2^{21} \rightarrow 2^{21} < 2^{21}!$.
- 7) DEMONSTRE QUE $2^{21} < 2^{21}! \rightarrow 2^{22} < 2^{21}!$.
- 8) DEMONSTRE QUE $2^{20} < 2^{21}! \rightarrow 2^{22} < 2^{21}!$.
- 9) DEMONSTRE QUE SE $n > 4$ ENTÃO $2^n < n! \rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

ESTAMOS TENTANDO ENTENDER O "ESQUEMA DE PROVA 1" DO SCHEINERMAN (P.20).

TANTA GENTE SE ENROLAVA COM ELE NOS SEMESTRES PASSADOS - JÁ QUE HOJE EM DIA QUASE NINGUÉM VÊ DEMONSTRAÇÕES DIREITO NO COLÉGIO - QUE AGORA ESTAMOS TENTANDO VER DEMONSTRAÇÕES EM VÁRIAS LINGUAGENS: ÁRVORES, LINHA-A-LINHA, E PROVAS NO FORMATO DO SCHEINERMAN, QUE É UM POUCO MENOS FORMAL QUE LINHA-A-LINHA; O FORMATO DAS PROVAS QUE VOCÊ VAI VER EM LIVROS DE MATEMÁTICA, FÍSICA E TEORIA DA COMPUTAÇÃO É UM POUCO MENOS FORMAL QUE O DO SCHEINERMAN, E MAIS PRÓXIMO DE PORTUGUÊS.

OBS: NA P.18 O SCHEINERMAN FAZ UMA PROVA LINHA-A-LINHA NUM FORMATO UM POUCO MAIS LIVRE QUE O NOSSO - MAS ELE USA MUITAS REGRAS QUE AINDA NÃO VIMOS.

① (ESTA QUESTÃO SERVE COMO UMA INTRODUÇÃO À TERCEIRA PARTE DO CURSO.)

LEMBRE QUE UMA FUNÇÃO $f: A \rightarrow B$ ESTÁ DEFINIDA SOBRE O SEU DOMÍNIO, A , E MAIS EM LUGAR NENHUM (ISTO É, SE $x \notin A$ ENTÃO $f(x)$ NÃO ESTÁ DEFINIDA)... MAS OPERAÇÕES SÃO MAIS LIVRES QUE FUNÇÕES, E PODEMOS "AUMENTAR O DOMÍNIO" DE OPERAÇÕES - POR EXEMPLO, COMEÇAMOS APRENDENDO QUE O "+" É UMA OPERAÇÃO SOBRE NÚMEROS, MAS DEPOIS DEFINIMOS COMO SOMAR VETORES E MATRIZES.

VAMOS DEFINIR O "PRODUTO" E A "INVERSA" DE VETORES DE \mathbb{R}^2 DESTA FORMA:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2)^{-1} = (-a_1, -a_2)$$

ENTÃO, POR EXEMPLO,

$$(3, 4) \cdot (5, 6) = (3+5, 4+6) = (8, 10) \quad \text{E:}$$

$$(1, 2)^{-1} = (-1, -2).$$

DIZEMOS QUE UM SUBCONJUNTO $C \subseteq \mathbb{R}^2$ É FECHADO PELO PRODUTO QUANDO

$$\forall \alpha, \beta \in C. \alpha \cdot \beta \in C,$$

E DIZEMOS QUE UM SUBCONJUNTO $C \subseteq \mathbb{R}^2$ É FECHADO PELA INVERSA QUANDO;

$$\forall \alpha \in C. \alpha^{-1} \in C.$$

DIGAMOS QUE $D \subseteq \mathbb{R}^2$ É UM SUBCONJUNTO DE \mathbb{R}^2 QUE É FECHADO PELO PRODUTO E PELA INVERSA. PODEMOS REPRESENTAR ESTAS PROPRIEDADES DE D POR ESTAS REGRAS DE DEDUÇÃO:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D \quad (b_1, b_2) \in D}{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \in D} \text{ FP}$$

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(a_1, a_2)^{-1} \in D} \text{ FI}$$

VAMOS TENTAR ENTENDER QUAIS SÃO AS CONSEQUÊNCIAS DE D SER FECHADO POR PRODUTO E INVERSA.

2.0PTS ①a) PROVE OS SEGUINTE LEMAS:

$$\frac{(1, 2) \in D \quad (2, 1) \in D}{(3, 3) \in D} \text{ La}$$

$$\frac{(1, 2) \in D \quad (2, 1) \in D}{(-1, 1) \in D} \text{ Lb}$$

$$\frac{(1, 2) \in D \quad (2, 1) \in D}{(-2, 2) \in D} \text{ Lc}$$

$$\frac{(1, 2) \in D \quad (2, 1) \in D}{(-5, 5) \in D} \text{ Ld}$$

2.0PTS ①b) TRANSFORME A PROVA EM ÁRVORE QUE VOCÊ OBTIVE PARA O LEMA Ld NUMA PROVA LINHA-A-LINHA.

2.0PTS ①c) PROVE OS SEGUINTE LEMAS:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(2a_1, 2a_2) \in D} \text{ L}_2$$

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(4a_1, 4a_2) \in D} \text{ L}_4$$

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(-10a_1, -10a_2) \in D} \text{ L}_{-10}$$

$$\frac{(a_1, a_2) \in D \quad (b_1, b_2) \in D}{(3a_1 - 4b_1, 3a_2 - 4b_2) \in D} \text{ L}_{3-4}$$

1.0PTS ①d) MOSTRE QUE O CONJUNTO $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ NÃO É FECHADO POR PRODUTO E INVERSA.

② SEJAM (a_0, a_1, \dots) E (b_0, b_1, \dots) AS SEQUÊNCIAS DEFINIDAS POR:

$$a_0 = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. a_{n+1} = a_n + 3,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. b_n = (n+1)(3n+2)$$

$$c_0 = a_0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. c_{n+1} = c_n + a_{n+1}$$

PROVE QUE:

0.2PTS ②a) $a_0 = 1 + 3 \cdot 0$

2.0PTS ②b) $(a_n = 1 + 3n) \rightarrow (a_{n+1} = 1 + 3(n+1))$

(UMA REGRA QUE NÃO TIVEMOS TEMPO DE VER DIREITO EM AULA NOS PERMITE DEDUZIR A PARTIR DE 2a E 2b QUE $\forall n \in \mathbb{N}. a_n = 1 + 3n$).

0.3PTS ②c) $b_0 = 2c_0$

2.5PTS ②d) $b_n = 2c_n \rightarrow b_{n+1} = 2c_{n+1}$

A CORREÇÃO SERÁ FEITA PELA TIA STEPHANIA.
PASSE A LIMPO AS SUAS RESPOSTAS!
AS OUTRAS REGRAS SÃO AS MESMAS DE SEMPRE.
BOA PROVA!

GABARITO DA P2

1a) LEMA:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(3,3) \in D} L_a$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(1,2) \cdot (2,1) \in D} FP$$

$$\frac{(1+2, 2+1) \in D}{(3,3) \in D} DEF$$

LEMA:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-1,1) \in D} L_b$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{(2,1) \in D}{(2,1)^{-1} \in D} FI$$

$$\frac{(1,2) \in D \quad (-2,-1) \in D}{(-1,1) \in D} DEF, FP$$

LEMA:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-2,2) \in D} L_c$$

DEMONSTRAÇÃO:
PODEMOS PROVAR PRIMEIRO O LEMA L2, E AÍ:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-1,1) \in D} L_b$$

$$\frac{(-1,1) \in D}{(-2,2) \in D} L_2$$

LEMA:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(5a_1, 5a_2) \in D} L_5$$

DEMONSTRAÇÃO:
PROVAMOS L4, E AÍ:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(4a_1, 4a_2) \in D} L_4$$

$$\frac{(4a_1, 4a_2) \in D \quad (a_1, a_2) \in D}{(5a_1, 5a_2) \in D} FP$$

LEMA:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-5,5) \in D} L_d$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-1,1) \in D} L_b$$

$$\frac{(-1,1) \in D}{(-5,5) \in D} L_5$$

- 1b) 1) SUPONHA QUE $(1,2) \in D$.
 2) SUPONHA QUE $(2,1) \in D$.
 3) ENTÃO $(-1,1) \in D$
 (POR (1), (2) E POR Lb),
 4) E $(-5,5) \in D$
 (POR (3) E L5,
 COM $a_1 = -1$ E $a_2 = 1$).

1c) LEMA:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(2a_1, 2a_2) \in D} L_2$$

$$\frac{(a_1, a_2) \in D \quad (a_1, a_2) \in D}{(2a_1, 2a_2) \in D} FP$$

LEMA:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(4a_1, 4a_2) \in D} L_4$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(2a_1, 2a_2) \in D} L_2$$

$$\frac{(2a_1, 2a_2) \in D}{(4a_1, 4a_2) \in D} L_2$$

LEMA:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(-10a_1, -10a_2) \in D} L_{-10}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(4a_1, 4a_2) \in D} L_4$$

$$\frac{(4a_1, 4a_2) \in D \quad (a_1, a_2) \in D}{(8a_1, 8a_2) \in D} L_2$$

$$\frac{(8a_1, 8a_2) \in D \quad (2a_1, 2a_2) \in D}{(10a_1, 10a_2) \in D} FP$$

$$\frac{(10a_1, 10a_2) \in D}{(-10a_1, -10a_2) \in D} FI$$

LEMA:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(3a_1, 3a_2) \in D} L_3$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D}{(2a_1, 2a_2) \in D} L_2$$

$$\frac{(2a_1, 2a_2) \in D \quad (a_1, a_2) \in D}{(3a_1, 3a_2) \in D} FP$$

LEMA:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D \quad (b_1, b_2) \in D}{(3a_1 - 4b_1, 3a_2 - 4b_2) \in D} L_{3,-4}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{(a_1, a_2) \in D \quad (b_1, b_2) \in D}{(4b_1, 4b_2) \in D} L_4$$

$$\frac{(3a_1, 3a_2) \in D \quad (-4b_1, -4b_2) \in D}{(3a_1 - 4b_1, 3a_2 - 4b_2) \in D} FI, FP$$

1d) SABEMOS QUE $(2,3) \in E$.
 SEJA $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$.
 SE E FOR FECHADO POR INVERSA,
 ENTÃO $(2,3)^{-1} = (-2,-3)$ TAMBÉM
 TEM QUE PERTENCER A E. MAS
 $(-2,-3)$ NÃO PERTENCE A E,
 ENTÃO E NÃO É FECHADO POR
 INVERSA.

2a) $a_0 = 1 = 1 + 3 \cdot 0$

2b) $a_{n+1} = a_n + 3$
 $= (1 + 3n) + 3$
 $= 1 + 3(n+1)$

2c) $b_0 = (0+1)(3 \cdot 0 + 2)$
 $= 2$
 $= 2a_0$
 $= 2c_0$

2d) $b_{n+1} = ((n+1)+1)(3(n+1)+2)$
 $= (n+2)(3n+5)$
 $= 3n^2 + 11n + 10$
 $= (3n^2 + 5n + 2) + 6n + 8$
 $= b_n + 6n + 8$
 $= 2c_n + 6n + 8$
 $= 2(c_n + 3n + 4)$
 $= 2(c_n + 1 + 3(n+1))$
 $= 2(c_n + a_{n+1})$
 $= 2c_{n+1}$

CONSIDERE AS SEGUINTEs OPERAÇÕES, DEFINIDAS SOBRE \mathbb{R}^2
(OBS: ELAS SÃO DIFERENTES DAS OPERAÇÕES DA P2!):

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad+bc)$$

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

VOCÊ DEVE TER REPARADO QUE O SCHEINERMAN DEFINE GRUPOS E MONÓIDES DE UM MODO BEM DIFERENTE DO QUE FIZEMOS EM SALA. NA DEFINIÇÃO QUE VIMOS EM SALA UM MONÓIDE ERA UMA ESTRUTURA

$$(M, \cdot, e)$$

OBEDECENDO CERTAS CONDIÇÕES, E UM GRUPO ERA UMA ESTRUTURA

$$(G, \cdot, e, \text{inv})$$

OBEDECENDO CERTAS CONDIÇÕES, NO SCHEINERMAN MONÓIDES E GRUPOS SÃO ESTRUTURAS (M, \cdot)

E (G, \cdot) , ONDE O " \cdot " É UMA OPERAÇÃO (NÃO NECESSARIAMENTE UMA FUNÇÃO), E AS CONDIÇÕES SÃO OUTRAS.

MAIS PRECISAMENTE: NA DEFINIÇÃO VISTA EM SALA UM MONÓIDE É:

$$(M, \cdot: M \times M \rightarrow M, e \in M)$$

OBEDECENDO:

$$\forall a,b,c \in M. a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$\forall a \in M. a \cdot e = e \cdot a = a$$

E UM GRUPO É:

$$(G, \cdot: G \times G \rightarrow G, e \in G, \text{inv}: G \rightarrow G)$$

OBEDECENDO:

$$\forall a,b,c \in G. a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$\forall a \in G. a \cdot e = e \cdot a = a$$

$$\forall a \in G. a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

OU SEJA: PARA PROVAR "À MODA DO SCHEINERMAN" QUE UMA ESTRUTURA É UM GRUPO PRECISAMOS ENCONTRAR A UNIDADE ("e") E DEFINIR A FUNÇÃO "INVERSA" ("inv", ou " $()^{-1}$ "), E ALÉM DISSO PROVAR QUE TODAS AS CONDIÇÕES SÃO OBEDECIDAS.

1) CALCULE:

$$(a,b) \cdot (c,d)$$

$$(c,d) \cdot (a,b)$$

$$((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f)$$

$$(a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f))$$

$$(1,0) \cdot (a,b)$$

$$(1,b) \cdot (1,-b)$$

$$(a,0) \cdot (\frac{1}{a},0)$$

$$(a,0) \cdot (1,\frac{b}{a}) \cdot (1,-\frac{b}{a}) \cdot (\frac{1}{a},0)$$

OBS: $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, EXCETO NOS DOIS ÚLTIMOS ITENS, EM QUE $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.0 PONTOS

2) SEJAM:

$$A = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad A = (A, \cdot)$$

$$B = (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad B = (B, \cdot)$$

$$C = (0, \infty) \times (0, \infty), \quad C = (C, \cdot)$$

PROVE ~~UMA~~ OU QUE A É UM MONÓIDE

OU QUE A NÃO É UM MONÓIDE,

E OU QUE A É UM GRUPO

OU QUE A NÃO É UM GRUPO;

FAÇA O MESMO PARA B E C .

LEMBRE QUE A NOTAÇÃO DE FUNÇÃO,

$(f: A \rightarrow B, a \mapsto \dots)$, É SUA GRANDE AMIGA -

USE-A SEMPRE QUE FOR ADEQUADO.

6.0 PONTOS

3) PROVE QUE $(\mathbb{R}^2, +)$ É UM GRUPO. 2.0 PONTOS

4) SEJA $\alpha = (2,3) \in \mathbb{R}^2$.

1.0 PONTOS

USANDO AS OPERAÇÕES " \cdot " E " $+$ "

QUE DEFINIMOS ALI À ESQUERDA,

CALCULE $\alpha^3 - 4\alpha$.

① $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad+bc)$
 $(c,d) \cdot (a,b) = (ac, ad+bc)$
 $((a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1)) \cdot (c_0, c_1) =$
 $(a_0, a_1) \cdot ((b_0, b_1) \cdot (c_0, c_1)) =$
 $(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_0)$
 $(1,0) \cdot (a,b) = (a,b)$
 $(1,b) \cdot (1,-b) = (1,0)$
 $(a,0) \cdot (\frac{1}{a}, 0) = (1,0)$
 $(a,b) \cdot (a,b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2})$
 $(a,0) \cdot (1, \frac{b}{a}) \cdot (1, -\frac{b}{a}) \cdot (\frac{1}{a}, 0) = (1,0)$
 $(a,0)$
 $(a,0)$

② PARA PROVAR QUE $A = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$ É UM MONÓIDE PRECISAMOS MOSTRAR QUE
 $\cdot: A \times A \rightarrow A$
 $(a,b), (c,d) \mapsto (ac, ad+bc)$
 É REALMENTE UMA FUNÇÃO, QUE ELA É ASSOCIATIVA, E QUE EXISTE UM ELEMENTO $e \in A$ QUE "SE COMPORTA COMO IDENTIDADE", ISTO É, QUE $\forall \alpha \in A. e\alpha = \alpha e = \alpha$.
 SE $(a,b), (c,d) \in A$ ENTÃO $a, c \in \mathbb{R}^*$, E PORTANTO O SEU PRODUTO, ac , É $\neq 0$, E DAÍ $ac \in \mathbb{R}^*$ E $(a,b) \cdot (c,d) \in A$.
 VIMOS NA QUESTÃO 1 QUE A OPERAÇÃO $\cdot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ É ASSOCIATIVA; A SUA RESTRIÇÃO $\cdot: A \times A \rightarrow A$ TAMBÉM VAI SER ASSOCIATIVA (A PROVA É IGUAL), E O ELEMENTO $(1,0) \in A$ "SE COMPORTA COMO IDENTIDADE"... PORTANTO A É UM MONÓIDE.

A OPERAÇÃO $\mapsto (a,b) \mapsto (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2})$ PRODUZ A INVERSA DE UM ELEMENTO (a,b) ; ELA ESTÁ DEFINIDA EXATAMENTE QUANDO $a \neq 0$ - OU SEJA, QUANDO $(a,b) \in A$, E PORTANTO

$\text{inv}: A \rightarrow A$
 $(a,b) \mapsto (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2})$
 É UMA FUNÇÃO, E
 (A, \cdot)
 $\cdot: A \times A \rightarrow A$
 $(1,0) \in A$
 $\text{inv}: A \rightarrow A$
 É UM GRUPO.

A PROVA DE QUE B É UM MONÓIDE É SIMILAR. SE $(a,b), (c,d) \in B$ ENTÃO $a, c \in (0, \infty)$, PORTANTO $ac \in (0, \infty)$, E $(a,b) \cdot (c,d) \in B$; DAÍ A RESTRIÇÃO $\cdot: B \times B \rightarrow B$ É UMA FUNÇÃO, QUE É ASSOCIATIVA, E O ELEMENTO $(1,0) \in B$ "SE COMPORTA COMO IDENTIDADE". A RESTRIÇÃO $\text{inv}: B \rightarrow B$ TAMBÉM É UMA FUNÇÃO, E DAÍ B TAMBÉM É UM GRUPO.

A PROVA DE QUE \mathbb{C} É UM MONÓIDE É SIMILAR A ESTAS, MAS SE $(a,b) \in \mathbb{C}$ A SUA INVERSA $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2})$ TERIA A SEGUNDA COORDENADA NEGATIVA... PORTANTO NENHUM ELEMENTO DE \mathbb{C} TEM INVERSA, E \mathbb{C} NÃO É GRUPO.

③ AQUI A DIFICULDADE ESTÁ EM QUE A OPERAÇÃO DO GRUPO, QUE NORMALMENTE CHAMAMOS DE " \cdot ", AGORA É O " $+$ " - E ISTO CAUSA CONFUSÃO. A IDENTIDADE É O PONTO $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, A INVERSA É A OPERAÇÃO $\text{inv}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(a,b) \mapsto (-a, -b)$
 E AS VERIFICAÇÕES SÃO TRIVIAIS - POR EXEMPLO,
 $(a,b) \cdot (a,b)^{-1} \mapsto (a,b) + (-a, -b)$
 \downarrow
 $(0,0)$.

④ $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = (2,3) \cdot (2,3) \cdot (2,3)$
 $= (4,12) \cdot (2,3)$
 $= (8,36)$

$4\alpha = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = (8,12)$
 E DA MESMA FORMA QUE PODEMOS DEFINIR α/β COMO $\alpha \cdot \beta^{-1}$ PODEMOS DEFINIR $\alpha - \beta$ COMO $\alpha + (-\beta)$, ONDE A OPERAÇÃO $\beta \mapsto -\beta$ É A INVERSA DO GRUPO $(\mathbb{R}^2, +, (0,0), -)$, QUE É:

$-: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(a,b) \mapsto (-a, -b)$
 ENTÃO $-4\alpha = (-8, -12)$
 E $\alpha^3 - 4\alpha = \alpha^3 + (-4\alpha)$
 $= (8,36) + (-8, -12)$
 $= (0, 24)$.

- ① DIGAMOS QUE SABEMOS QUE AS SEQUÊNCIAS (a_0, a_1, \dots) E (b_0, b_1, \dots) OBEDECEM:

2.0
PONTOS

$$a_0 = 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. a_{n+1} = a_n + 2n + 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. b_n = n^2.$$

PROVE QUE $a_k = b_k \rightarrow a_{k+1} = b_{k+1}$.

(OBS: k É UM NÚMERO NATURAL QUALQUER.)

- ② MOSTRE QUE SE $k > 0$ ENTÃO

$$234 + k^2 < k^3 \rightarrow 234 + (k+1)^2 < (k+1)^3.$$

4.0
PONTOS

DICA: LEMBRE-SE DE COMO EXPANDIR

$$(a+b)^2 \text{ E } (a+b)^3.$$

OBS: É POSSÍVEL PROVAR ISTO USANDO TÉCNICAS DE CÁLCULO 1, MAS VOCÊ AQUI VAI TER QUE ENCONTRAR UMA PROVA NO ESTILO DAS QUE VIMOS NO CURSO, USANDO NÚMEROS INTEIROS, TRANSITIVIDADE DO "<", ETC.

- ③ A OPERAÇÃO F VAI SER DEFINIDA POR:

$$F(A, B) = \{A \cup B' \mid B' \subseteq B, B' \neq \emptyset\}.$$

1.0
PONTOS

CALCULE $F(F(\{2, 3\}, \{4, 5\}), \{6\})$.

- ④ A RELAÇÃO R VAI SER DEFINIDA POR:

$$aRb \text{ SE E SÓ SE } a \in B \text{ E } \forall b \in B. a \leq b.$$

3.0
PONTOS

- a) SE $B = \{10, 20, 30\}$, ENCONTRE UM a TAL QUE aRb .

- b) SEJAM:

$$C = \{2, 3, 4\},$$

$$D = \mathcal{P}(C) \setminus \{\emptyset\},$$

$$E = \mathcal{P}(C),$$

$$F = \{(x, y) \mid x \in D, yRx\},$$

$$G = \{(x, y) \mid x \in E, yRx\}.$$

CALCULE $|D|, |E|, F, G$.

F E G SÃO FUNÇÕES?

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad a_{k+1} &= a_k + 2k + 1 \\ &= b_k + 2k + 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \\ &= b_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ (k+1)^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 234 + (k+1)^2 &= (234 + k^2) + (2k + 1) \\ &\quad \begin{array}{r} 0 < k \\ 0 < 3k^2 \quad 0 < k \\ \hline 0 < 3k^2 + k \end{array} \\ \hline 234 + k^2 &< k^3 \quad 2k + 1 < 3k^2 + 3k + 1 \\ \hline 234 + k^2 + 2k + 1 &< k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ \hline 234 + (k+1)^2 &< (k+1)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad F(\{2,3\}, \{4,5\}) &= \{\{2,3\} \cup B' \mid B' \subseteq \{4,5\}, B' \neq \emptyset\} \\ &= \{\{2,3\} \cup \{4\}, \\ &\quad \{2,3\} \cup \{5\}, \\ &\quad \{2,3\} \cup \{4,5\}\} \\ &= \{\{2,3,4\}, \\ &\quad \{2,3,5\}, \\ &\quad \{2,3,4,5\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(F(\{2,3\}, \{4,5\}), \{6\}) &= \\ &= \{\{\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}\} \cup B' \mid B' \subseteq \{6\}, B' \neq \emptyset\} \\ &= \{\{\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}\} \cup \{6\}\} \\ &= \{\{\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}, 6\}\} \end{aligned}$$

4a) Se $a=10 \in \tau_{A0}$ aRB.

4b) Como $|C|=3$, $|\mathcal{P}(C)|=2^3=8$.

Como $\emptyset \in \mathcal{P}(C)$, $|\mathcal{P}(C) \setminus \{\emptyset\}|=7$.

$D = \{\{4\}, \{3\}, \{3,4\}, \{2\}, \{2,4\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}\}$,

$E = \{\emptyset, \{4\}, \{3\}, \{3,4\}, \{2\}, \{2,4\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}\}$.

$|D|=7$,

$|E|=8$,

$F = \{(\{4\}, 4),$
 $(\{3\}, 3),$
 $(\{3,4\}, 3),$
 $(\{2\}, 2),$
 $(\{2,4\}, 2),$
 $(\{2,3\}, 2),$
 $(\{2,3,4\}, 2)\}$,

$F=G$, e $F \in G$ SÃO FUNÇÕES.

- ① CADA UMA DAS BARRAS ABAIXO REPRESENTA UMA POSSÍVEL REGRA DE DEDUÇÃO.

2.0
PONTOS

$$\frac{P \wedge P' \quad (P \wedge P') \rightarrow Q}{Q} \alpha$$

$$\frac{P \wedge P' \quad P \wedge (P' \rightarrow Q)}{Q} \beta$$

$$\frac{P \quad P \rightarrow (Q \wedge Q')}{Q \wedge Q'} \gamma$$

$$\frac{P \quad (P \rightarrow Q) \wedge Q'}{Q \wedge Q'} \delta$$

QUAIS DELAS SÃO REGRAS
 VÁLIDAS DE DEDUÇÃO E QUAIS
 NÃO? PORQUÊ?

- ② SEJAM:

2.0
PONTOS

$$A = \{1, 2, 3\},$$

$$B = \{A' \in A \mid |A'| \in A'\},$$

$$C = \{2, 3, 4\}$$

$$D = \{C' \in C \mid |C'| \in C'\}.$$

Calcule $B \in D$.

- ③ SEJA $(a_0, a_1, \dots) \in (b_0, b_1, \dots)$
 AS SEQUÊNCIAS QUE OBEDECEM:

4.0
PONTOS

$$\forall n \in \mathbb{N}. a_n = n^3,$$

$$b_0 = 44,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. b_{n+1} = b_n + 3n^2.$$

PROVE QUE SE $k \in \mathbb{N}$ ENTÃO

$$a_k > b_k \rightarrow a_{k+1} > b_{k+1}.$$

- ④ SEJA (a_0, a_1, \dots) A SEQUÊNCIA:

2.0
PONTOS

$$(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots)$$

ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO FORMAL

(INDUTIVA) PARA ELA - OU SEJA,

ENCONTRE UMA SÉRIE DE SENTENÇAS

LÓGICAS, COMO AS DA QUESTÃO

ANTERIOR, QUE ESTA SEQUÊNCIA

OBEDEÇA E QUE NÃO SEJAM

OBEDECIDAS POR NENHUMA

OUTRA SEQUÊNCIA.

- ① AS REGRAS α E γ SÃO VÁLIDAS, PORQUE PODEM SER OBTIDAS A PARTIR DA REGRA

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q} \rightarrow E$$

POR SUBSTITUIÇÃO: NO CASO DA α SUBSTITUÍMOS P POR $P \wedge P'$, E NO CASO DA γ SUBSTITUÍMOS Q POR $Q \vee Q'$. PRA CHECAR SE AS REGRAS β E δ SÃO VÁLIDAS PODEMOS USAR TABELAS:

P	P'	Q	P' \rightarrow Q	P \wedge (P' \rightarrow Q)	P \wedge P'
F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	V	F
V	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V

AS LINHAS ONDE AS HIPÓTESES DA "REGRA" β SÃO VÁLIDAS ESTÃO MARCADAS COM "V" NA TABELA ACIMA.

~~AS LINHAS ONDE AS HIPÓTESES DA "REGRA" δ SÃO VÁLIDAS ESTÃO MARCADAS COM "V" NA TABELA ACIMA.~~

~~AS LINHAS ONDE AS HIPÓTESES DA "REGRA" δ SÃO VÁLIDAS ESTÃO MARCADAS COM "V" NA TABELA ACIMA.~~

~~AS LINHAS ONDE AS HIPÓTESES DA "REGRA" δ SÃO VÁLIDAS ESTÃO MARCADAS COM "V" NA TABELA ACIMA.~~

~~AS LINHAS ONDE AS HIPÓTESES DA "REGRA" δ SÃO VÁLIDAS ESTÃO MARCADAS COM "V" NA TABELA ACIMA.~~

~~AS LINHAS ONDE AS HIPÓTESES DA "REGRA" δ SÃO VÁLIDAS ESTÃO MARCADAS COM "V" NA TABELA ACIMA.~~

~~AS LINHAS ONDE AS HIPÓTESES DA "REGRA" δ SÃO VÁLIDAS ESTÃO MARCADAS COM "V" NA TABELA ACIMA.~~

SÓ TEMOS UMA LINHA COM "V" E NELA A "CONCLUSÃO" É VERDADEIRA. PORTANTO A REGRA β É VÁLIDA.

PARA TESTAR A REGRA δ , FAZEMOS:

P	Q	Q'	P \rightarrow Q	(P \rightarrow Q) \wedge Q'	Q \wedge Q'
F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V

DE NOVO SÓ TEMOS UMA LINHA NA QUAL AS HIPÓTESES SÃO VERDADEIRAS, E NELA A CONCLUSÃO É VERDADEIRA. A REGRA δ É VÁLIDA.

- ② PODEMOS LISTAR OS VALORES POSSÍVEIS PARA A' E C', E PARA CADA UM DELES TESTAR SE $|A'| \in A'$ E $|C'| \in C'$ SÃO VERDADES:

A'	A'	A' \in A'	C'	C'	C' \in C'
\emptyset	0	F	\emptyset	0	F
{ 3 }	1	F	{ 4 }	1	F
{ 2 }	1	F	{ 3, 4 }	1	F
{ 2, 3 }	2	V	{ 3, 4 }	2	F
{ 1 }	1	V	{ 2 }	1	F
{ 1, 3 }	2	F	{ 2, 4 }	2	V
{ 1, 2 }	2	V	{ 2, 3 }	2	V
{ 1, 2, 3 }	3	V	{ 2, 3, 4 }	3	V

AGORA TEMOS QUE FORMAR O CONJUNTO DOS "A"'S "BONS" E O DOS "C"'S "BONS".

$$B = \{ \{2, 3\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\} \}$$

$$D = \{ \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\} \}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad a_{k+1} &= (k+1)^3 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= a_k + 3k^2 + 3k + 1 \\ &> b_k + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= b_{k+1} + 3k + 1 \\ &> b_{k+1} \end{aligned}$$

- ④ SE DEFINIMOS $b_n = a_{(n-a_n+1)}$, TEMOS:

n	a_n	$n - a_n + 1$	b_n	$a_n = b_n$
0	1	0	1	V
1	2	0	1	F
2	2	1	2	V
3	3	1	2	F
4	3	2	2	F
5	3	3	3	V
6	4	3	3	F
7	4	4	3	F
8	4	5	3	F
9	4	6	4	V
10	5	6	4	F

ONDE A COLUNA " $a_n = b_n$ " VAI SER INTERPRETADA COMO "ESTÁ NA HORA DO VALOR DE a_n MUDAR". GRAFICAMENTE, OS " $a_n = b_n$ " CORRESPONDEM A ESTAS COMPARAÇÕES:

$$\begin{aligned} &(\underbrace{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots}_{(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \dots)}) \end{aligned}$$

PODEMOS DEFINIR A SEQUÊNCIA (a_0, a_1, \dots) POR:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}. a_n \neq b_n &\rightarrow a_{n+1} = a_n, \\ \forall n \in \mathbb{N}. a_n = b_n &\rightarrow a_{n+1} = a_n + 1 \end{aligned}$$

OU POR:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}. a_n \neq a_{(n-a_n+1)} &\rightarrow a_{n+1} = a_n, \\ \forall n \in \mathbb{N}. a_n = a_{(n-a_n+1)} &\rightarrow a_{n+1} = a_n. \end{aligned}$$