Matemática Discreta
2011.1 - PURO-UFF
Prof: Eduardo Ochs

Exercícios sobre operações booleanas

Vamos usar a seguinte notação para as operações booleanas básicas:

"∧" para "e",
"∨" para "ou",
"¬" para "não".

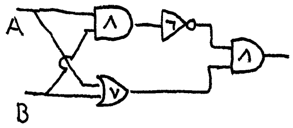
Durante quase toda a primeira aula consideramos que elas recebiam valores no conjunto {0,1} e retornavam valores pertencentes ao conjunto {0,1}. Nós definimos estas operações por estas tabelas:

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

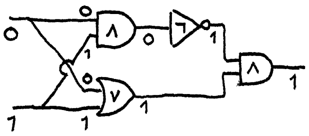
∨	0	1
0	0	1
1	1	1

a	¬a
0	1
1	0

E um dos exercícios que fizemos durante a aula foi montar a tabela para uma operação "X", definida da seguinte forma: para quaisquer valores de a e b, aXb é o valor que aparece no fio da direita no circuito abaixo se pomos o valor a no fio "A" do circuito e o valor b no fio "B" do circuito.



Por exemplo, para calcularmos 0X1 pomos o valor 0 no fio A e o valor 1 no fio B, e o resultado final é 1:

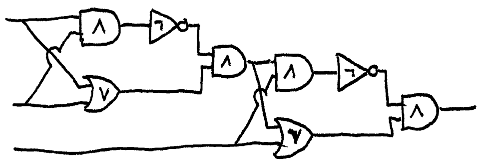


A tabela para a operação X pode ser escrita destas duas formas:

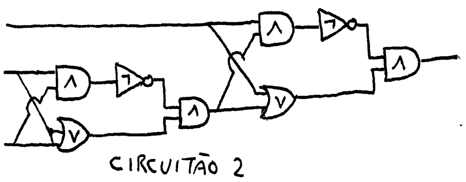
X	0	1
0	0	1
1	1	0

a	b	aXb
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(1) Considere os dois circuitos abaixo, que vou chamar de "circuitão 1" e "circuitão 2":



circuitão 1



circuitão 2

(a) Releia com muito cuidado a coluna da esquerda e encontre um bom modo de definir as operações correspondentes aos dois circuitões acima.

(b) Monte a tabela das duas operações.

(2) Encontre um circuito que calcula:

(a) $a \land \neg b$

(b) $\neg(\neg b \lor \neg a)$

(c) $(\neg a \lor \neg b) \land a$

(3) Encontre expressões "algébricas" (isto é, como as da questão 2) que representem os valores calculados pelos circuitões 1 e 2.

Matemática Discreta
PURO-UFF
29/março/2010

Exercícios sobre expressões equivalentes (continuação)

Na aula passada nós começamos a trabalhar no seguinte exercício:

Considere as expressões abaixo:

(E_0) $\forall x\in A\cup B.\,P(x)$
(E_1) $\forall x\in A\cap B.\,P(x)$
(E_2) $\exists x\in A\cup B.\,P(x)$
(E_3) $\exists x\in A\cap B.\,P(x)$
(E_4) $\forall x\in A.\,(x\in B\to P(x))$
(E_5) $\forall x\in A.\,(x\in B\land P(x))$
(E_6) $\exists x\in A.\,(x\in B\to P(x))$
(E_7) $\exists x\in A.\,(x\in B\land P(x))$

Algumas são equivalentes entre si. Quais? Encontre modos de mostrar que algumas sentenças não são equivalentes.

Dicas: Podemos começar com $A=\{1,2\}$ e $B=\{2,3\}$.
P pode ser qualquer proposição definida sobre $\{1,2,3\}$.
Exemplos de proposições:
$P(x) = (x=3)$
$P(x) = (x=1\to x=3)$
$P(x) = \mathbf{V}$

Pense em Álgebra e Cálculo 1... x e x^2 são funções diferentes mas que coincidem em $x=0$ e $x=1$; x^2 e $(x+1)(x-1)+1$ são duas funções de x "equivalentes", mas tivemos que aprender bastante álgebra pra entender isto...
Agora estamos aprendendo métodos "algébricos" pra lidar com expressões lógicas.

Lembre que podemos usar a nossa noção de "redução" para calcular o valor de verdade de cada uma das expressões $E_0,\ldots,E_7$ — desde que conheçamos os conjuntos A e B e a proposição $P(x)$. Por exemplo, se $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ e $P(x)=(x=3)$,

$$
\begin{array}{ccc}
\forall x\in A\cup B.\,P(x) & \rightsquigarrow & \forall x\in A\cup B.\,x=3 \\
\wr & & \wr \\
\forall x\in \{1,2,3\}.\,P(x) & \rightsquigarrow & \forall x\in\{1,2,3\}.\,x=3 \\
\wr & & \wr \\
P(1)\land P(2)\land P(3) & \rightsquigarrow & 1=3\land 2=3\land 3=3 \\
 & & \wr \\
 & & \mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{V} \rightsquigarrow \mathbf{F}.
\end{array}
$$

Nós quase sempre temos vários caminhos de redução possíveis — e neste caso se só damos os dois primeiros passos pra baixo descobrimos que:

$$
\begin{array}{c}
\forall x\in A\cup B.\,P(x) \\
\| \\
P(1)\land P(2)\land P(3)
\end{array}
$$

(ou: $(\forall x\in A\cup B.\,P(x))\leftrightarrow(P(1)\land P(2)\land P(3))$)
e isto vale para qualquer "valor" para P — já que não substituímos $P(x)$ por $x=3$ nenhuma vez — desde que $A=\{1,2\}$ e $B=\{2,3\}$.

1) Use esta idéia pra provar que quando $A=\{1,2\}$ e $B=\{2,3\}$ temos
$$E_1\leftrightarrow E_3$$
para qualquer proposição $P(x)$.

2) Mostre que se $A=\{4,5,6\}$ e $B=\{5,6,7\}$ então E_1 e E_3 podem não ser equivalentes.

3) Sabemos "reduzir" expressões como $\forall a\in A.\,P(a)$ e $\exists a\in A.\,P(a)$ quando A é um conjunto finito não-vazio. E repare:

$$
\begin{array}{c}
\forall a\in\{1,2,3,4,5\}.\,P(a) \\
\wr \\
P(1)\land P(2)\land P(3)\land P(4)\land P(5)
\end{array}
$$

$\forall a\in\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}.\,P(a)$ ⇦ quando A tem n elementos
$\wr$
$P(a_1)\land P(a_2)\land\ldots\land P(a_n)$ ⇦ a "redução" tem n ocorrências de $P(a)$

Então é razoável esperar que quando A é $\emptyset$ (o conjunto vazio; outra notação para $\emptyset$ é $\{\}$) então a "redução" deve ter zero ocorrências de $P(a)$.

3a) Mostre que quando $A\neq\emptyset$ e $B\neq\emptyset$ temos
$$(\forall x\in A\cup B.\,P(x))\leftrightarrow(\forall x\in A.\,P(x))\land(\forall x\in B.\,P(x))$$
e $$(\exists x\in A\cup B.\,P(x))\leftrightarrow(\exists x\in A.\,P(x))\lor(\exists x\in B.\,P(x)).$$

3b) Analise o que acontece se definimos:
(D_1) $\forall x\in\emptyset.\,P(x)\rightsquigarrow\mathbf{V}$
(D_2) $\forall x\in\emptyset.\,P(x)\rightsquigarrow\mathbf{F}$
(D_3) $\exists x\in\emptyset.\,P(x)\rightsquigarrow\mathbf{V}$
(D_4) $\exists x\in\emptyset.\,P(x)\rightsquigarrow\mathbf{F}$

Quais destas definições devem valer? Porquê?

4) Compare o exercício 3 com a discussão do livro (págs 45-47) sobre o valor de 0!. Repare que 1 é o elemento neutro do produto: $x\cdot 1=x$.

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO - UFF
8/ABRIL/2010

GABARITO DOS EXERCÍCIOS SOBRE EXPRESSÕES EQUIVALENTES

SE $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$ ENTÃO:

$E_0 \rightsquigarrow \forall x\in\{1,2\}\cup\{2,3\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow \forall x\in\{1,2,3\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow P(1)\land P(2)\land P(3)$

$E_1 \rightsquigarrow \forall x\in\{1,2\}\cap\{2,3\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow \forall x\in\{2\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow P(2)$

$E_2 \rightsquigarrow \exists x\in\{1,2\}\cup\{2,3\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow \exists x\in\{1,2,3\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow P(1)\lor P(2)\lor P(3)$

$E_3 \rightsquigarrow \exists x\in\{1,2\}\cap\{2,3\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow \exists x\in\{2\}.\ P(x)$
$\rightsquigarrow P(2)$

$E_4 \rightsquigarrow \forall x\in\{1,2\}.\ (x\in\{2,3\}\to P(x))$
$\rightsquigarrow (1\in\{2,3\}\to P(1))\land(2\in\{2,3\}\to P(2))$
[redacted] $\rightsquigarrow (\mathbf{F}\to P(1))\land(\mathbf{V}\to P(2))$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \mathbf{V}\land P(2)$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} P(2)$

$E_5 \rightsquigarrow \forall x\in\{1,2\}.\ (x\in\{2,3\}\land P(x))$
$\rightsquigarrow$ [redacted] $(1\in\{2,3\}\land P(1))\land(2\in\{2,3\}\land P(2))$
[redacted] $\rightsquigarrow (\mathbf{F}\land P(1))\land(\mathbf{V}\land P(2))$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \mathbf{F}\land P(2)$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \mathbf{F}$

$E_6 \rightsquigarrow \exists x\in\{1,2\}.\ (x\in\{2,3\}\to P(x))$
$\rightsquigarrow (1\in\{2,3\}\to P(1))\lor(2\in\{2,3\}\to P(2))$
$\rightsquigarrow (\mathbf{F}\to P(1))\lor(\mathbf{V}\to P(2))$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \mathbf{V}\lor P(2)$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \mathbf{V}$

$E_7 \rightsquigarrow \exists x\in\{1,2\}.\ (x\in\{2,3\}\land P(x))$
$\rightsquigarrow (1\in\{2,3\}\land P(1))\lor(2\in\{2,3\}\land P(2))$
$\rightsquigarrow (\mathbf{F}\land P(1))\lor(\mathbf{V}\land P(2))$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \mathbf{F}\lor P(2)$
$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} P(2)$

REPARE QUE PARA QUALQUER VALOR DE VERDADE Q TEMOS:

Q	F∧Q	V∧Q	F∨Q	V∨Q	F→Q	V→Q	V	F
F	F	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	F

ENTÃO TEMOS:

$\mathbf{F}\land Q = \mathbf{F}$
$\mathbf{V}\land Q = Q$
$\mathbf{F}\lor Q = Q$
$\mathbf{V}\lor Q = \mathbf{V}$
$\mathbf{F}\to Q = \mathbf{V}$
$\mathbf{V}\to Q = Q$

PODEMOS CONSIDER CADA UMA DESTAS IGUALDADES COMO UMA REGRA DE REDUÇÃO:

$\mathbf{F}\land Q \rightsquigarrow \mathbf{F}$
$\mathbf{V}\land Q \rightsquigarrow Q$
$\mathbf{F}\lor Q \rightsquigarrow Q$
$\mathbf{V}\lor Q \rightsquigarrow \mathbf{V}$
$\mathbf{F}\to Q \rightsquigarrow \mathbf{V}$
$\mathbf{V}\to Q \rightsquigarrow Q$

ISTO JUSTIFICA AS REDUÇÕES MARCADAS COM "(*)" À ESQUERDA. POR EXEMPLO:

$(\mathbf{F}\to P(1))\land(\mathbf{V}\to P(2))$
} (*) ⇦ POR $\mathbf{F}\to Q\rightsquigarrow \mathbf{V}$ E $\mathbf{V}\to$ [redacted] $\rightsquigarrow Q$
$\mathbf{V}\land P(2)$
} (*) ⇦ POR $\mathbf{V}\land Q\rightsquigarrow Q$
$P(2)$

TAMBÉM PODERÍAMOS TER PENSADO NOS "$\overset{(*)}{\rightsquigarrow}$"S COMO IGUALDADES:

$(\mathbf{F}\to P(1))\land(\mathbf{V}\to P(2))$
|| ⇦ PORQUE $\mathbf{F}\to Q=\mathbf{V}$ E $\mathbf{V}\to Q=Q$
$\mathbf{V}\land P(2)$
|| ⇦ PORQUE $\mathbf{V}\land Q=Q$
$P(2)$

MAS O QUE IMPORTA É QUE CONSEGUIMOS DESCOBRIR QUE SE $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$, ENTÃO:

$E_0 = P(1)\land P(2)\land P(3)$
$E_1 = P(2)$
$E_2 = P(1)\lor P(2)\lor P(3)$
$E_3 = P(2)$
$E_4 = P(2)$
$E_5 = \mathbf{F}$
$E_6 = \mathbf{V}$
$E_7 = P(2)$

NO SENTIDO DE "O RESULTADO FINAL" - UM VALOR DE VERDADE, ISTO É, V OU F

SÓ PODEMOS CALCULAR O "RESULTADO" DE $E_0, E_1, \ldots, E_7$ SE SABEMOS QUEM É A PROPOSIÇÃO $P(x)$ (LEMBRE QUE JÁ FIXAMOS $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$!)... O "VALOR" DE $E_0, E_1, \ldots, E_7$ DEPENDE DA PROPOSIÇÃO $P(x)$, COMO O VALOR DE UMA EXPRESSÃO COMO x^2+1 DEPENDE DO VALOR DE x, E PODEMOS FAZER UMA TABELA,

	F	P(1)∧P(2)∧P(3)	P(2)	P(1)∨P(2)∨P(3)	V
P(x)=F	F	F	F	F	V
P(x)=(x=3)	F	F	F	V	V
P(x)=(x=2)	F	F	V	V	V
P(x)=V	F	V	V	V	V

QUE MOSTRA QUE AS EXPRESSÕES **F**, $P(1)\land P(2)\land P(3)$, $P(2)$, $P(1)\lor P(2)\lor P(3)$ E **V** NÃO SÃO EQUIVALENTES.
ISTO NOS MOSTRA QUE AS EXPRESSÕES E_5, E_0, E_2 E E_6

CONTINUA

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO-UFF
8/ABRIL/2010
(CONTINUAÇÃO)

(GABARITO DOS EXERCÍCIOS SOBRE EXPRESSÕES EQUIVALENTES - CONTINUAÇÃO)

... NÃO SÃO EQUIVALENTES A NENHUMA DAS OUTRAS; MAS AINDA NÃO SABEMOS QUAIS DAS EXPRESSÕES E_1, E_3, E_4 E E_7 VÃO SER SEMPRE EQUIVALENTES ENTRE SI - O QUE VIMOS ATÉ AGORA É QUE QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$ TEMOS

$E_1 = E_3 = E_4 = E_7 = P(2)$.

① COMO VIMOS ACIMA, QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$ TEMOS $E_1 = P(2)$ E $E_3 = P(2)$. PODEMOS FAZER UMA TABELA COM O VALOR DE $E_1 \leftrightarrow E_3$ COMO FUNÇÃO DO VALOR DE $P(2)$:

$P(2)$	E_1	E_3	$E_1 \leftrightarrow E_3$
F	F	F	V
V	V	V	V

ISTO É UMA "PROVA PELA TABELA VERDADE" (VEJA A SEÇÃO 5 DO LIVRO) DE QUE $E_1 \leftrightarrow E_3$ É SEMPRE VERDADE (QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$).

② SE $A=\{4,5,6\}$ E $B=\{5,6,7\}$ ENTÃO:

$E_1 \rightsquigarrow \forall x \in A \cap B.\, P(x)$ ⇝ $\forall x \in \{5,6\}.\, P(x)$ ⇝ $P(5) \land P(6)$

$E_3 \rightsquigarrow \exists x \in A \cap B.\, P(x)$ ⇝ $\exists x \in \{5,6\}.\, P(x)$ ⇝ $P(5) \lor P(6)$

SE $P(x) = (x=5)$ ENTÃO:

$P(5) \land P(6)$ ⇝ $5=5 \land 6=5$ ⇝ $V \land F$ ⇝ F

$P(5) \lor P(6)$ ⇝ $5=5 \lor 6=5$ ⇝ $V \lor F$ ⇝ V

CONSEGUIMOS UM CASO [redacted] - $A=\{4,5,6\}$, $B=\{5,6,7\}$, $P(x)=(x=5)$ - NO QUAL $E_1 = F$ E $E_3 = V$; ISTO MOSTRA QUE E_1 E E_3 NÃO SÃO EQUIVALENTES.

③a COMO POR ENQUANTO SÓ ESTAMOS LIDANDO COM CONJUNTOS FINITOS, PODEMOS SUPOR QUE $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ E $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, ONDE m E n SÃO NÚMEROS NATURAIS POSITIVOS. (EXEMPLO: SE $A=\{\{1,2\},3\}$ E $B=\{(4,5,6)\}$ ENTÃO $m=2$, $a_1=\{1,2\}$, $a_2=3$, $n=1$, $b_1=(4,5,6)$)

AÍ $A \cup B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$;

NOTE QUE ISTO VALE MESMO QUANDO A E B TÊM ELEMENTOS EM COMUM: SE $A=\{4,5,6\}$ E $B=\{5,6,7\}$ ENTÃO $A \cup B = \{4,5,6,5,6,7\} = \{4,5,6,7\}$.

ENTÃO:

$\forall x \in A \cup B.\, P(x)$ ⇝ $\forall x \in \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}.\, P(x)$ ⇝ $P(a_1) \land \ldots \land P(a_m) \land P(b_1) \land \ldots \land P(b_n)$

$(\forall x \in A.\, P(x)) \land (\forall x \in B.\, P(x))$ ⇝ $(\forall x \in \{a_1, \ldots, a_m\}.\, P(x)) \land (\forall x \in \{b_1, \ldots, b_n\}.\, P(x))$ ⇝ $(P(a_1) \land \ldots \land P(a_m)) \land (P(b_1) \land \ldots \land P(b_m))$

$$P(a_1) \land \ldots \land P(a_m) \land P(b_1) \land \ldots \land P(b_n) = (P(a_1) \land \ldots \land P(a_m)) \land (P(b_1) \land \ldots \land P(b_m))$$

E:

$\exists x \in A \cup B.\, P(x)$ ⇝ $\exists x \in \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}.\, P(x)$ ⇝ $P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m) \lor P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_n)$

$(\exists x \in A.\, P(x)) \lor (\exists x \in B.\, P(x))$ ⇝ $(\exists x \in \{a_1, \ldots, a_m\}.\, P(x)) \lor (\exists x \in \{b_1, \ldots, b_n\}.\, P(x))$ ⇝ $(P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m)) \lor (P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_m))$

$$P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m) \lor P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_n) = (P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m)) \lor (P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_m))$$

③b AINDA NÃO TEMOS REGRAS DE REDUÇÃO PARA EXPRESSÕES DA FORMA $\forall x \in \emptyset.\, P(x)$ E $\exists x \in \emptyset.\, P(x)$; VAMOS TESTAR AS REGRAS DE REDUÇÃO

(D_1) $\forall x \in \emptyset.\, P(x) \rightsquigarrow V$
(D_2) $\forall x \in \emptyset.\, P(x) \rightsquigarrow F$
(D_3) $\exists x \in \emptyset.\, P(x) \rightsquigarrow V$
(D_4) $\exists x \in \emptyset.\, P(x) \rightsquigarrow F$

E VER O QUE ACONTECE COM $\forall x \in A \cup \emptyset.\, P(x)$, $(\forall x \in A.\, P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.\, P(x))$, $\exists x \in A \cup \emptyset.\, P(x)$, $(\exists x \in A.\, P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.\, P(x))$ QUANDO ELAS VALEM.

SE $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$, ENTÃO:

$\forall x \in A \cup \emptyset.\, P(x)$ ⇝ $\forall x \in A.\, P(x)$

$(\forall x \in A.\, P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.\, P(x))$ ⇝ (POR D_1) $(\forall x \in A.\, P(x)) \land V$

$(\forall x \in A.\, P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.\, P(x))$ ⇝ (POR D_2) $(\forall x \in A.\, P(x)) \land F$ ⇝ F

E:

$\exists x \in A \cup \emptyset.\, P(x)$ ⇝ $\exists x \in A.\, P(x)$

$(\exists x \in A.\, P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.\, P(x))$ ⇝ (POR D_4) $(\exists x \in A.\, P(x)) \lor F$

$(\exists x \in A.\, P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.\, P(x))$ ⇝ (POR D_3) $(\exists x \in A.\, P(x)) \lor V$ ⇝ V

OU SEJA: AS REGRAS D_1 E D_4 FAZEM COM QUE AS IGUALDADES DO ITEM ANTERIOR,

$$(\forall x \in A \cup B.\, P(x)) = (\forall x \in A.\, P(x)) \land (\forall x \in B.\, P(x))$$
E
$$(\exists x \in A \cup B.\, P(x)) = (\exists x \in A.\, P(x)) \lor (\exists x \in B.\, P(x)),$$

QUE TÍNHAMOS VISTO QUE VALIAM QUANDO $A \neq \emptyset$ E $B \neq \emptyset$, CONTINUEM VALENDO QUANDO $B = \emptyset$.

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Primeira Prova ("P1")
3/Junho/2011

Nim

Ao contrário de jogos como o jogo da velha, em que um jogador marca "o"s e outro marca "x"s, o Nim é um jogo simétrico: os dois jogadores se alternam fazendo jogadas do mesmo tipo. Inicialmente os dois jogadores decidem de comum acordo quantos palitos eles vão pôr em cima da mesa, depois em cada jogada cada um deles tira ou um ou dois palitos. Quem não puder mais jogar - porque não sobrou mais palito nenhum - perdeu.

Fato: se o jogo começar com 10 palitos sobre a mesa o primeiro jogador tem uma estratégia que lhe permite ganhar sempre.

Vamos ver como definir esta estratégia matematicamente.

Seja $P_0 = 10$ a posição inicial.

Seja

$$\begin{array}{rl} \text{jogs}: & \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ & n \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{se } n=0 \\ \{0\} & \text{se } n=1 \\ \{n-2, n-1\} & \text{se } n \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

A função que diz o conjunto das jogadas possíveis (isto é, das posições seguintes possíveis) a partir de cada posição.

Agora vamos definir indutivamente o conjunto das posições acessíveis a partir da posição inicial, $\mathbb{P}$.

A seqüência $(\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots)$ é definida por:

$$\mathbb{P}_0 = \{P_0\} \;\land$$
$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_n \cup \bigcup_{P \in \mathbb{P}_n} \text{jogs}(P)$$

E definimos:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2 \cup \ldots .$$

Agora definimos:

$$\begin{array}{rl} \text{venc}: & \mathbb{P} \to \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\ & P \mapsto (\exists Q \in \text{jogs}(P).\ \text{venc}(Q) = \mathbf{F}) \end{array}$$

E uma estratégia vencedora é uma função

$$\text{estr}: \{P \in \mathbb{P} \mid \text{venc}(P)\} \to \{P \in \mathbb{P} \mid \text{venc}(P) = \mathbf{F}\}$$

que obedece:

$$\forall P \in \{P \in \mathbb{P} \mid \text{venc}(P)\}.\ \text{estr}(P) \in \text{jogs}(P).$$

(1) Mostre que $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}_6$. (1.0 pontos)

(2) Calcule $\mathbb{P}$. (1.0 pontos)

(3) Calcule venc(0), venc(1), venc(2), venc(3) e venc. (2.0 pontos)

(4) Para representar o Nim como um grafo direcionado, fazemos: $R = \{(P,Q) \in \mathbb{P} \mid Q \in \text{jogs}(P)\}$. Represente graficamente $(\mathbb{P}, R)$. (1.0 pontos)

(5) No caso do Nim existe uma única estratégia vencedora estr. Exiba-a explicitamente. (2.0 pontos)

O jogo dos divisores de 12

Vamos denotar por $\downarrow n$ o conjunto dos divisores de n. Neste jogo a posição inicial vai ser

$$P_0 = \downarrow 12 = \{1, 2, 4, 3, 6, 12\}$$

e as jogadas válidas são da seguinte forma: se a posição atual é um conjunto A então podemos escolher qualquer $a \in A$, desde que $a \neq 1$; aí a posição seguinte vai ser o conjunto A menos todos os múltiplos de a. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 4, 3\}$ então

$$\begin{array}{rll} \text{jogs}(A) = \{ & \{1, 2, 3\}, & \leftarrow \text{Aqui tiramos os múltiplos de 4,} \\ & \{1, 2, 4\}, & \leftarrow \text{Aqui os de 3,} \\ & \{1, 3\}\}. & \leftarrow \text{Aqui os de 2.} \end{array}$$

(6) Calcule venc({1, 2, 3, 6}). (1.0 pontos)

(7) Defina $\downarrow n$ em matematiquês puro. (1.0 pontos)

(8) Defina jogs(A) — para o jogo dos divisores de 12 — em matematiquês puro. Nesta questão e na anterior não se esqueça de testar as suas definições! (3.0 pontos)

(Pra casa: calcule $\mathbb{P}$, R e venc para o jogo dos divisores de 12; represente $(\mathbb{P}, R)$ graficamente, encontre uma estratégia vencedora e use-a pra ganhar dos seus colegas que ou não conseguiram descobrir a estratégia ou calcularam ela errado.)

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Primeira Prova ("P1")
3/junho/2011

Gabarito

(1) Sabemos que:

$\mathbb{P}_0 = \{P_0\} = \{10\}$,

$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_0 \cup \bigcup_{P \in \mathbb{P}_0} \text{jogs}(P)$,

$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 \cup \bigcup_{P \in \mathbb{P}_1} \text{jogs}(P)$,

etc; então

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1 &= \{10\} \cup \bigcup_{P \in \{10\}} \text{jogs}(P) \\
&= \{10\} \cup \text{jogs}(10) \\
&= \{10\} \cup \{10-2, 10-1\} \\
&= \{10, 9, 8\}, \\
\mathbb{P}_2 &= \{10, 9, 8\} \cup \bigcup_{P \in \{10,9,8\}} \text{jogs}(P) \\
&= \{10,9,8\} \cup \text{jogs}(10) \cup \text{jogs}(9) \cup \text{jogs}(8) \\
&= \{10,9,8\} \cup \{8,9\} \cup \{7,8\} \cup \{6,7\} \\
&= \{10,9,8,7,6\}, \\
\mathbb{P}_3 &= \{10,\ldots,6\} \cup \text{jogs}(10) \cup \ldots \cup \text{jogs}(6) \\
&= \{10,\ldots,4\} \\
\mathbb{P}_4 &= \{10,\ldots,4\} \cup \text{jogs}(10) \cup \ldots \cup \text{jogs}(4) \\
&= \{10,\ldots,2\} \\
\mathbb{P}_5 &= \{10,\ldots,2\} \cup \text{jogs}(10) \cup \ldots \cup \text{jogs}(2) \\
&= \{10,\ldots,0\} \\
\mathbb{P}_6 &= \{10,\ldots,0\} \cup \text{jogs}(10) \cup \ldots \cup \text{jogs}(2) \cup \text{jogs}(1) \cup \text{jogs}(0) \\
&= \{10,\ldots,0\} \cup \{9,8\} \cup \{8,7\} \cup \ldots \cup \{1,0\} \cup \{0\} \cup \emptyset \\
&= \{10,\ldots,0\}
\end{aligned}$$

Daí $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}_6 = \{10,\ldots,0\}$.

(2) O mesmo argumento que usamos pra calcular $\mathbb{P}_6$ e ver que $\mathbb{P}_6 = \mathbb{P}_5$ vale para $\mathbb{P}_7, \mathbb{P}_8, \ldots$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_7 &= \{10,\ldots,0\} \cup \text{jogs}(10) \cup \ldots \cup \text{jogs}(0) \\
&= \{10,\ldots,0\}.
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \mathbb{P}_0 \cup \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2 \cup \mathbb{P}_3 \cup \ldots \\
&= \{10\} \cup \{10,\ldots,8\} \cup \{10,\ldots,6\} \cup \{10,\ldots,4\} \cup \ldots \\
&= \{10,\ldots,0\}.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\text{venc}(0) &= (\exists Q \in \text{jogs}(0).\ \text{venc}(Q) = \mathbf{F}) \\
&= (\exists Q \in \emptyset.\ \text{venc}(Q) = \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{F} \\
\text{venc}(1) &= (\exists Q \in \text{jogs}(1).\ \text{venc}(Q) = \mathbf{F}) \\
&= (\exists Q \in \{0\}.\ \text{venc}(Q) = \mathbf{F}) \\
&= (\text{venc}(0) = \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{F} = \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{V}
\end{aligned}$$

(3) (cont)

$$\begin{aligned}
\text{venc}(2) &= (\exists Q \in \text{jogs}(2).\ \text{venc}(Q) = \mathbf{F}) \\
&= (\exists Q \in \{0,1\}.\ \text{venc}(Q) = \mathbf{F}) \\
&= (\text{venc}(0) = \mathbf{F} \lor \text{venc}(1) = \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{F} = \mathbf{F} \lor \mathbf{V} = \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{V} \lor \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{V} \\
\text{venc}(3) &= (\text{venc}(1) = \mathbf{F} \lor \text{venc}(2) = \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{V} = \mathbf{F} \lor \mathbf{V} = \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{F} \lor \mathbf{F} \\
&= \mathbf{F} \\
\text{venc}(4) &= (\text{venc}(2) = \mathbf{F} \lor \text{venc}(3) = \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{V} = \mathbf{F} \lor \mathbf{F} = \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{F} \lor \mathbf{V} \\
&= \mathbf{V} \\
\text{venc}(5) &= (\text{venc}(3) = \mathbf{F} \lor \text{venc}(4) = \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{F} = \mathbf{F} \lor \mathbf{V} = \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{V} \\
\text{venc}(6) &= (\text{venc}(4) = \mathbf{F} \lor \text{venc}(5) = \mathbf{F}) \\
&= (\mathbf{V} = \mathbf{F} \lor \mathbf{V} = \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{F} \\
\text{venc}(7) &= (\mathbf{V} = \mathbf{F} \lor \mathbf{F} = \mathbf{F}) = \mathbf{V} \\
\text{venc}(8) &= (\mathbf{F} = \mathbf{F} \lor \mathbf{V} = \mathbf{F}) = \mathbf{V} \\
\text{venc}(9) &= (\mathbf{V} = \mathbf{F} \lor \mathbf{V} = \mathbf{F}) = \mathbf{F} \\
\text{venc}(10) &= (\mathbf{V} = \mathbf{F} \lor \mathbf{F} = \mathbf{V}) = \mathbf{V}
\end{aligned}$$

Podemos dar uma definição explícita da função venc usando uma definição por casos,

$$\begin{aligned}
\text{venc}: \mathbb{P} &\to \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\
P &\mapsto \begin{cases} \mathbf{F} & \text{quando } P \in \{0,3,6,9\}, \\ \mathbf{V} & \text{quando } P \in \{1,2,4,5,7,8,10\} \end{cases}
\end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned}
\text{venc} = \{&(0,\mathbf{F}), (1,\mathbf{V}), (2,\mathbf{V}), \\
&(3,\mathbf{F}), (4,\mathbf{V}), (5,\mathbf{V}), \\
&(6,\mathbf{F}), (7,\mathbf{V}), (8,\mathbf{V}), \\
&(9,\mathbf{F}), (10,\mathbf{V})\}
\end{aligned}$$

já que funções são relações e relações são conjuntos de pares.

(4)

$$\begin{aligned}
R = \{&(P,Q) \mid P \in \mathbb{P}, Q \in \text{jogs}(P)\} \\
= \{&(10,9), (10,8), (9,8), (9,7), (8,7), (8,6), \\
&(7,6), (7,5), (6,5), (6,4), (5,4), (5,3), \\
&(4,5), (4,3), (3,2), (3,1), (2,1), (2,0), \\
&(1,0)\}
\end{aligned}$$

$(\mathbb{P}, R) = 10 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$

(5) Como $\{P \in \mathbb{P} \mid \text{venc}(P)\} = \{1,2,4,5,7,8,10\}$

e $\{P \in \mathbb{P} \mid \text{venc}(P) = \mathbf{F}\} = \{0,3,6,9\}$

estamos procurando uma função

$\text{estr}: \{1,2,4,5,7,8,10\} \to \{0,3,6,9\}$

que obedeça

$\forall P \in \{1,2,4,5,7,8,10\}.\ \text{estr}(P) \in \text{jogs}(P)$,

isto é, que obedeça

$\text{estr}(1) \in \{0\} \land \text{estr}(2) \in \{1,0\} \land$
$\text{estr}(4) \in \{3,2\} \land \text{estr}(5) \in \{4,3\} \land$
$\text{estr}(7) \in \{6,5\} \land \text{estr}(8) \in \{7,6\} \land \text{estr}(10) \in \{9,8\}$.

A única solução possível é:

$\text{estr} = \{(1,0), (2,0), (4,3), (5,3), (7,6), (8,6), (10,9)\}$.

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Primeira prova ("P1")
3/junho/2011

Gabarito (cont.)

⑥ $\mathrm{venc}(\{1,2,3,6\}) =$
$= (\exists Q \in \mathrm{jogs}(\{1,2,3,6\}).\ \mathrm{venc}(Q)=F)$
$= (\exists Q \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}.\ \mathrm{venc}(Q)=F)$
$= (\mathrm{venc}(\{1,2\})=F) \lor (\mathrm{venc}(\{1,3\})=F) \lor (\mathrm{venc}(\{1,2,3\})=F)$

$\mathrm{venc}(\{1,2\}) =$
$= (\exists Q \in \mathrm{jogs}(\{1,2\}).\ \mathrm{venc}(Q)=F)$
$= (\mathrm{venc}(\{1\})=F)$

$\mathrm{venc}(\{1,3\}) =$
$= (\mathrm{venc}(\{1\})=F)$

$\mathrm{venc}(\{1,2,3\}) =$
$= (\mathrm{venc}(\{1,2\})=F) \lor (\mathrm{venc}(\{1,3\})=F)$

$\mathrm{venc}(\{1\}) =$
$= (\exists Q \in \mathrm{jogs}(\{1\}).\ \mathrm{venc}(Q)=F)$
$= (\exists Q \in \emptyset.\ \mathrm{venc}(Q)=F)$
$= F$

$\mathrm{venc}(\{1,2\}) = (F=F) = V$
$\mathrm{venc}(\{1,3\}) = (F=F) = V$
$\mathrm{venc}(\{1,2,3\}) = (V=F) \lor (V=F) = F$
$\mathrm{venc}(\{1,2,3,6\}) = (V=F) \lor (V=F) \lor (F=V) = V$

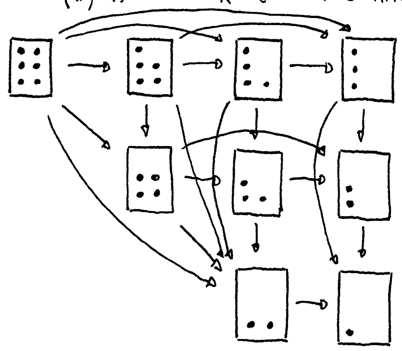
⑦ Uma possibilidade:
$\downarrow n = \{k \in \mathbb{N} \mid k|n\}$
outra:
$\downarrow n = \{k \in \{1,\ldots,n\} \mid$ [redacted] $k|n\}$
outra:
$\downarrow n = \{k \in \{1,\ldots,n\} \mid \exists a \in \{1,\ldots,n\}.\ ak=n\}$

⑧ Aqui é melhor usar uma definição intermediária:
$\mathrm{mults}(a,n) = \{m \in \{1,\ldots,n\} \mid a|m\}$
Por exemplo, $\mathrm{mults}(2,6) = \{2,4,6\}$ — note que $\mathrm{mults}(a,n)$ pode incluir elementos que não pertencem a $\downarrow n$.
Agora:
$\mathrm{jogs}(A) = \{ A \setminus \mathrm{mults}(a,12) \mid a \in A,\ a \neq 1\}$
Um teste: se $A = \{1,2,4,3,6,12\}$ então
$\mathrm{jogs}(\{1,2,4,3,6,12\}) =$
$= \{ A\setminus\mathrm{mults}(2,12),$
$A\setminus\mathrm{mults}(3,12),$
$A\setminus\mathrm{mults}(4,12),$
$A\setminus\mathrm{mults}(6,12),$
$A\setminus\mathrm{mults}(12,12)\}$
$= \{\{1,3\}$[redacted],
$\{1,2,4\},$
$\{1,2,3,6\},$
$\{1,2,3,4\},$
$\{1,2,3,4,6\}\}$

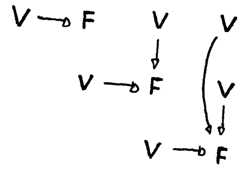
Aqui vão algumas dicas pra quem for tentar entender em casa a estratégia pro jogo dos divisores de 12.
Se escrevermos $\downarrow 12 = \{4, 12,$
$2, 6,$
$1, 3\}$
e escrevermos subconjuntos de $\downarrow 12$ mantendo sempre esta convenção para a posição dos elementos — por exemplo, escreveremos $\{1,2,3,4\}$ como $\{4,$
$2,$
$1, 3\}$ —
e além disto representarmos subconjuntos de $\downarrow 12$ como retângulos 2x3 com bolinhas pretas indicando os elementos presentes, por exemplo,

$\{1,2,3,4\} = \{4,$
$2,$
$1,3\}$ $\equiv$ 

então $(\mathbb{P}, R)$ vai ser esta figura:



E o diagrama abaixo mostra as posições vencedoras e perdedoras (i.e., a função venc) e a única estratégia vencedora possível:



MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
<u>SEGUNDA PROVA</u> ("P2")
<u>22/JUNHO/2011</u>

PROVE POR EXAUSTÃO QUE:

ISTO É "$\neg P$".

① $\forall P, Q \in \{V, F\}. ((P \to (Q \land \neg Q)) \to \neg P)$ ⇦ 1,0 PONTOS

② $x \in \{1,2,3,4,5\} \to x^2 < 100$ ⇦ 1,0 PONTOS

CONSIDERE A SEGUINTE DEMONSTRAÇÃO, EM "PORTUGUÊS FORMALIZÁVEL":

SUPONHA QUE a É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO. ENTÃO EXISTEM INTEIROS x E y TAIS QUE $a = 2x$ E $a = 2y+1$, E TEMOS $2x = 2y+1$ E $1 = 2x - 2y = 2(x-y)$; PORTANTO $x - y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, MAS COMO $x, y \in \mathbb{Z}$ TEMOS $x - y \in \mathbb{Z}$, UMA CONTRADIÇÃO.

ELA USA AS SEGUINTES DEFINIÇÕES:

a É PAR $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}.\ a = 2x$
a É ÍMPAR $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z}.\ a = 2y+1$

③ TRADUZA PARA MATEMATIQUÊS PURO "a É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO" E TESTE A SUA DEFINIÇÃO CALCULANDO:
"42 É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO",
"−43 É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO" E
"3.14 É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO". ⇦ 2,0 PONTOS

④ PARA ENCURTAR A SOLUÇÃO DOS PRÓXIMOS ITENS DÊ UMA (BOA) DEFINIÇÃO FORMAL PARA "a É PAR-E-ÍMPAR". ⇦ 1,0 PONTOS

⑤ NÓS USAMOS SEQUENTES EM SALA DE AULA PRA ENTENDER CERTAS DEMONSTRAÇÕES DO LIVRO; POR EXEMPLO,

$x > 0,\ y > 0 \vdash xy > 0$

É LIDO COMO: "SEMPRE QUE AS HIPÓTESES $x>0$ E $y>0$ FOREM VERDADEIRAS A CONCLUSÃO $xy>0$ TAMBÉM VAI SER VERDADEIRA". A DEMONSTRAÇÃO ACIMA TEM A FORMA $P \vdash Q \land \neg Q$, PARA ALGUMA SENTENÇA P E ALGUMA SENTENÇA Q; QUAIS? ⇦ 1,0 PONTOS

⑥ SEJAM $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ OS SEGUINTES PREDICADOS SOBRE NÚMEROS REAIS: ⇦ 2,0 PONTOS

$S_0 : \mathbb{R} \to \{V, F\}$
$\quad a \mapsto (\exists x \in \mathbb{Z}.\ a = 7x+0)$,
$S_1 : \mathbb{R} \to \{V, F\}$
$\quad a \mapsto (\exists x \in \mathbb{Z}.\ a = 7x+1)$,
...
$S_6 : \mathbb{R} \to \{V, F\}$
$\quad a \mapsto (\exists x \in \mathbb{Z}.\ a = 7x+6)$.

MOSTRE – ADAPTANDO AS IDÉIAS DA DEMONSTRAÇÃO ACIMA – QUE $S_2(a) \land S_3(a)$ LEVA A UMA CONTRADIÇÃO.

⑦ PROVE POR INDUÇÃO QUE ⇦ 3,0 PONTOS
$\forall n \in \{1,2,3,\ldots\}.\ 1+2+\ldots+n \leq n^2$.
DICAS: DEFINA $P(0), P(1), P(2), P(3), P(k)$; PROVE QUE $P(k) \to P(k+1)$; O PRIMEIRO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO DIZ QUE
$P(0),\ \forall k \in \mathbb{N}.\ P(k) \to P(k+1) \vdash \forall k \in \mathbb{N}.\ P(k)$.

⑧ TENTE PROVAR POR INDUÇÃO QUE ⇦ 3,0 PONTOS
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$ PARA $n \geq 1$.
O QUE NÃO FUNCIONA?

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Segunda Prova ("P2") - Gabarito
22/junho/2011

(1) Basta testarmos todos os valores possíveis de P e Q:

P	Q	$Q\land\neg Q$	$P\to(Q\land\neg Q)$	$(P\to(Q\land\neg Q))\to\neg P$
F	F	F	V	V
F	V	F	V	V
V	F	F	F	V
V	V	F	F	V

(2) Quando $x\notin\{1,2,3,4,5\}$ temos:

$$\begin{array}{c} x\in\{1,2,3,4,5\}\to x^2<100 \\ \wr \\ F\to x^2<100 \\ \wr \\ V \end{array}$$

Então basta testarmos os casos em que $x\in\{1,2,3,4,5\}$ para confirmar que $x\in\{1,2,3,4,5\}\to x^2<100$ é sempre verdadeiro:

x	$x\in\{1,2,3,4,5\}$	$x^2<100$	$x\in\{1,2,3,4,5\}\to x^2<100$
1	V	V	V
2	V	V	V
3	V	V	V
4	V	V	V
5	V	V	V

(3) $a\in\mathbb{Z}\land a$ é par $\land\ a$ é ímpar,

ou:

$a\in\mathbb{Z}\land(\exists x\in\mathbb{Z}.\,a=2x)\land(\exists y\in\mathbb{Z}.\,a=2y+1)$

Testes:

$$\begin{array}{c} 42\in\mathbb{Z}\land(\exists x\in\mathbb{Z}.\,42=2x)\land(\exists y\in\mathbb{Z}.\,42=2y+1) \\ \wr \\ V\land V\land F \\ \wr \\ F \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -43\in\mathbb{Z}\land(\exists x\in\mathbb{Z}.\,-43=2x)\land(\exists y\in\mathbb{Z}.\,-43=2y+1) \\ \wr \\ V\land F\land V \\ \wr \\ F \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3.14\in\mathbb{Z}\land(\exists x\in\mathbb{Z}.\,3.14=2x)\land(\exists y\in\mathbb{Z}.\,3.14=2y+1) \\ \wr \\ F\land F\land F \\ \wr \\ F \end{array}$$

(4) Def: a é par-e-ímpar se e só se $a\in\mathbb{Z}\land a$ é par $\land\ a$ é ímpar

(5) $\overbrace{a \text{ é par-e-ímpar},\ x,y\in\mathbb{Z},\ a=2x,\ a=2y+1}^{P}\vdash$
$\underbrace{(x-y)\in\mathbb{Z}}_{Q}\land\underbrace{(x-y)\notin\mathbb{Z}}_{\neg Q}$

(6) Suponha que a é inteiro e $S_2(a)$ e $S_3(a)$ são ambos verdade. Então existem inteiros x e y tais que $a=7x+2$ e $a=7y+3$, e temos $7x+2=7y+3$, $7(x-y)=3-2=1$, $x-y=\frac{1}{7}$. Portanto $x-y\notin\mathbb{Z}$, mas como $x,y\in\mathbb{Z}$ temos $x-y\in\mathbb{Z}$, uma contradição.

(7) Def: $P(k)=(1+2+3+\ldots+k\leq k^2)$.

Então
$$\begin{aligned} P(k+1) &= (1+2+\ldots+k+(k+1)\leq(k+1)^2) \\ &= (1+2+\ldots+k+(k+1)\leq k^2+2k+1) \\ &= (1+2+\ldots+k\leq k^2+2k+1-(k+1)) \\ &= (1+2+\ldots+k\leq k^2+k) \end{aligned}$$

e $P(1)=(1\leq 1^2)=\mathbf{V}$.

Vamos supor que $k\in\{1,2,3,\ldots\}$ e que $P(k)$ é verdade. Então $k>0$ e

$$1+2+\ldots+k\leq k^2\leq k^2+k,$$

ou seja, $P(k+1)$ é verdade.

Podemos "passar as duas hipóteses para dentro da conclusão". Provamos

$$k\in\{1,2,3,\ldots\},\ P(k)\vdash P(k+1),$$

que é equivalente a

$$k\in\{1,2,3,\ldots\}\vdash P(k)\to P(k+1)$$

e a:

$$\vdash\forall k\in\{1,2,3,\ldots\}.\ P(k)\to P(k+1).$$

Como vimos que $P(1)=\mathbf{V}$ podemos aplicar o primeiro princípio de indução, e obtemos

$$\forall k\in\{1,2,3,\ldots\}.\ P(k),$$

que é o que queríamos demonstrar.

(8) Vamos definir a sequência $(a_0,a_1,a_2,\ldots)$ por:

$$a_n := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n},$$

e $P(n) := (a_n<2)$.

Então $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^{n+1}}$ e $P(n+1)=(a_n+\frac{1}{2^{n+1}}<2)$.

Não temos como provar que

$\forall n\in\mathbb{N}.\ P(n)\to P(n+1)$, ⇦ sem informações extras

porque se para um certo $n\in\mathbb{N}$ o valor de a_n for próximo o suficiente de 2 podemos ter $P(n)=(a_n<2)=\mathbf{V}$ mas $P(n+1)=(a_n+\frac{1}{2^{n+1}}<2)=\mathbf{F}$.

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
TERCEIRA PROVA ("P3")

A DEFINIÇÃO QUE O SCHEINERMAN USA PARA "GRUPO" É BEM MAIS DIFÍCIL DO QUE PODE PARECER À PRIMEIRA VISTA... O PROBLEMA PRINCIPAL É COM A IDÉIA DE "OPERAÇÃO".
POR EXEMPLO, SEJA:

$$/_{\mathbb{R}} = \{((a,b),c) \mid a,b,c \in \mathbb{R},\ a=bc\}$$

PRA FAZER O "$/_{\mathbb{R}}$" SE COMPORTAR COMO UMA OPERAÇÃO NÓS DEFINIMOS (ÉÉÉ!)
UM SIGNIFICADO PARA

$$a /_{\mathbb{R}} b = c,$$

QUE É O SEGUINTE:

$a /_{\mathbb{R}} b = c$ VAI SER VERDADE SE E SÓ SE $((a,b),c) \in /_{\mathbb{R}}$ FOR VERDADE.

USANDO REDUÇÃO ISTO PODE SER VISTO COMO A SEGUINTE REGRA DE REDUÇÃO:

$a /_{\mathbb{R}} b = c$
⇝ ⟸ ESTA É A REGRA NOVA
$((a,b),c) \in /_{\mathbb{R}}$
⇝ ⟸ PELA DEFINIÇÃO DO CONJUNTO $/_{\mathbb{R}}$
$a,b,c \in \mathbb{R} \wedge a=bc$

POR EXEMPLO,

$6 /_{\mathbb{R}} 3 = 2$
⇝
$((6,3),2) \in /_{\mathbb{R}}$
⇝
$6,3,2 \in \mathbb{R} \wedge 6 = 3 \cdot 2$
⇝
$V \wedge V$
⇝
V.

AÍ DIZEMOS QUE $a /_{\mathbb{R}} b$ (SEM O "$=c$"!) ESTÁ BEM-DEFINIDO QUANDO EXISTE UM ÚNICO VALOR DE c TAL QUE $a /_{\mathbb{R}} b = c$, E NESTE CASO DEFINIMOS O VALOR DE $a /_{\mathbb{R}} b$ COMO SENDO ESTE c.

(1) VAMOS DEFINIR:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\},$$
$$(A \times B) \times C = \{((a,b),c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}.$$

(a) EXIBA UM ELEMENTO $\alpha \in A \times B \times C$ E UM ELEMENTO $\beta \in (A \times B) \times C$ E TESTE-OS — ISTO É, CALCULE $(\alpha \in A \times B \times C)$ E $(\beta \in (A \times B) \times C)$ PASSO A PASSO.

OOPS! FALTOU UMA COISA AQUI... SUPONHA QUE $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{5,6\}$.

0,5 PTS

(b) DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL DE UMA FUNÇÃO f COM DOMÍNIO $A \times B \times C$ E CONTRA-DOMÍNIO $(A \times B) \times C$ E A DEFINIÇÃO FORMAL DE UMA FUNÇÃO g COM DOMÍNIO $(A \times B) \times C$ E CONTRA-DOMÍNIO $A \times B \times C$. TESTE SUAS DEFINIÇÕES MOSTRANDO COMO CALCULAR $(g \circ f)((2,4,6))$ E $(f \circ g)(((2,4),6))$. ⟸ 2,0 PTS

DICA: FINJA QUE O SEU LEITOR É ALGUÉM QUE TEM DIFICULDADE COM ESTAS NOTAÇÕES, E FAÇA TUDO PASSO A PASSO.

AGORA VAMOS VOLTAR À DEFINIÇÃO DE GRUPO DO SCHEINERMAN. UM GRUPO (NO SENTIDO DO SCHEINERMAN) É UM PAR $\mathbb{G} = (G, \cdot)$ ONDE G É UM CONJUNTO E $\cdot$ É UMA OPERAÇÃO TAL QUE:

(I) PARA QUAISQUER $a,b \in G$ O RESULTADO DE $a \cdot b$ ESTÁ BEM-DEFINIDO E PERTENCE A G,
(III) EXISTE UM "ELEMENTO NEUTRO" $e \in G$ TAL QUE $\forall a \in G.\ e \cdot a = a \cdot e = a$,
(IV) PARA TODO ELEMENTO $a \in G$ EXISTE UM ELEMENTO $a^{-1} \in G$ TAL QUE $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.
(II) $\forall a,b,c.\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(2) MOSTRE QUE $(\mathbb{R}, /_{\mathbb{R}})$ NÃO É UM GRUPO POR VÁRIAS RAZÕES:

(a) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO (I), ⟸ 1,0 PTS
(b) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO (II), ⟸ 1,0 PTS
(c) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO (III), ⟸ 1,0 PTS
(d) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO (IV). ⟸ 1,0 PTS

(3) SEJA $\otimes$ A OPERAÇÃO DEFINIDA POR:

$$a \otimes b = (a-1)(b-1)+1$$

SE VOCÊ NÃO TIVER NENHUMA INTUIÇÃO SOBRE COMO ESTA OPERAÇÃO FUNCIONA UMA DICA É FAZER A TABELA DO $\otimes$ PARA $a,b \in \{-2,-1,0,1,2,3\}$.

(a) MOSTRE QUE $(\mathbb{R}, \otimes)$ NÃO É UM GRUPO. ⟸ 1,0 PTS
(b) MOSTRE QUE $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \otimes)$ É UM GRUPO. ⟸ 2,0 PTS
(c) $((1,+\infty), \otimes)$ É UM GRUPO? JUSTIFIQUE. ⟸ 3,0 PTS

INTERVALO

ESTA PROVA É BEM RÁPIDA (NO SENTIDO DE QUE O GABARITO É BEM CURTO) E VALE MAIS DE 10 PONTOS, ENTÃO CAPRICHE NAS RESPOSTAS! BOA PROVA!

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
TERCEIRA PROVA ("P3")
GABARITO

(1a) SEJAM
$\alpha = (2,4,6)$
E $\beta = ((1,3),5)$.

ENTÃO $\alpha \in A\times B\times C$ E $\beta \in (A\times B)\times C$

$(2,4,6) \in A\times B\times C$
FAZENDO $a=2$, $b=4$, $c=6$
$2\in A \wedge 4\in B \wedge 6\in C$
$V \wedge V \wedge V$
V

$((1,3),5) \in (A\times B)\times C$
FAZENDO $a=1$, $b=3$, $c=5$
$1\in A \wedge 3\in B \wedge 5\in C$
$V \wedge V \wedge V$
V.

(1b) SEJAM $f: A\times B\times C \to (A\times B)\times C$
$(a,b,c) \mapsto ((a,b),c)$
E $g: (A\times B)\times C \to A\times B\times C$
$((a,b),c) \mapsto (a,b,c)$.

ENTÃO $(g\circ f)((2,4,6)) = g(f((2,4,6)))$
$= g(((2,4),6))$
$= (2,4,6)$
E $(f\circ g)(((2,4),6)) = f(g(((2,4),6)))$
$= f((2,4,6))$
$= ((2,4),6)$

(2a) O RESULTADO DE $a/_{\mathbb{R}}b$ NEM SEMPRE ESTÁ BEM-DEFINIDO. POR EXEMPLO, SE $a=4$ E $b=0$ NÃO EXISTE UM $c\in\mathbb{R}$ TAL QUE $a/_{\mathbb{R}}b = c$.

(2b) $(6/_{\mathbb{R}}3)/_{\mathbb{R}}2 = 2/_{\mathbb{R}}2 = 1$

$6/_{\mathbb{R}}(3/_{\mathbb{R}}2) = 6/_{\mathbb{R}}\frac{3}{2} = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$ $\not=$

(2c) VAMOS TESTAR TODOS OS ELEMENTOS DE $\mathbb{R}$ PRA VER SE ALGUM DELES PODE FAZER O PAPEL DE ELEMENTO NEUTRO.
SE $e\neq 1$ – POR EXEMPLO, $e=4$ – A CONDIÇÃO $a/_{\mathbb{R}}e = a$ SÓ VAI VALER PARA $a=0$, E DEVERIA VALER PARA TODO $a\in\mathbb{R}$;
E SE $e=1$ A CONDIÇÃO $e/_{\mathbb{R}}a = e$ SÓ VAI VALER PARA $a=1$.
PORTANTO NENHUM $e\in\mathbb{R}$ OBEDECE $\forall a\in\mathbb{R}.\ a/_{\mathbb{R}}e = e/_{\mathbb{R}}a = a$.

(2d) COMO $(\mathbb{R}, /_{\mathbb{R}})$ NÃO TEM ELEMENTO NEUTRO A CONDIÇÃO $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$ NEM FAZ SENTIDO.

(3) A TABELA:

3	-5	-3	-1	1	3	5
2	-2	-1	0	1	2	3
1	1	1	1	1	1	1
0	4	3	2	1	0	-1
-1	7	5	3	1	-1	-3
-2	10	7	4	1	-2	-5
⊗	-2	-1	0	1	2	3

(3a) PELA TABELA DÁ PRA VER QUE O 2 É O ELEMENTO NEUTRO – MAS AÍ A GENTE DESCOBRE QUE $a=1$ NÃO TEM INVERSA – NÃO EXISTE $a^{-1}\in\mathbb{R}$ TAL QUE $a\otimes a^{-1} = e = 2$.
MAIS FORMALMENTE: SE $e=2$ ENTÃO
$a\otimes e = (a-1)(e-1)+1 = (a-1)\cdot 1 + 1 = a$,
$e\otimes a = (e-1)(a-1)+1 = 1\cdot(a-1)+1 = a$,
E SE $a=1$ ENTÃO
$a\otimes a^{-1} = (1-1)(a^{-1}-1)+1 = 0\cdot(a^{-1}-1)+1 = 1 \neq 2$.

(3b) (I) PARA QUAISQUER $a,b\in\mathbb{R}$ TEMOS QUE $a\otimes b = (a-1)(b-1)+1$, QUE ESTÁ BEM-DEFINIDO E PERTENCE A $\mathbb{R}$; ALÉM DISSO SE $a\neq 1$ E $b\neq 1$ ENTÃO $(a-1)\neq 0$, $(b-1)\neq 0$, $(a-1)(b-1)\neq 0$, $a\otimes b\neq 1$.
(II) PARA $a,b,c\in\mathbb{R}$ TEMOS
$(a\otimes b)\otimes c = (((a-1)(b-1)\cancel{+1})\cancel{-1})(c-1)+1$
$= (a-1)(b-1)(c-1)+1$,
$a\otimes(b\otimes c) = (a-1)(((b-1)(c-1)\cancel{+1})\cancel{-1})+1$
$= (a-1)(b-1)(c-1)+1$.
(III) O ELEMENTO NEUTRO É O $e = 2\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, COMO VIMOS NA 3a.
(IV) $a\otimes b = e$ É EQUIVALENTE A:
$(a-1)(b-1)+1 = 2$
$(a-1)(b-1) = 1$
$b-1 = \frac{1}{a-1}$
$b = \frac{1}{a-1}+1$
PORTANTO BASTA DEFINIR $a^{-1} := \frac{1}{a-1}+1$;
COMO $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ISTO É, $a\neq 1$, TEMOS $a^{-1}\neq 1$.

(3c) $((1,+\infty),\otimes)$ É UM GRUPO SIM.
QUASE TODO O TRABALHO PARA VERIFICAR ISTO JÁ FOI FEITO [redacted] NA (3b); SÓ FALTA VER QUE:
(I') $\forall a,b\in(1,+\infty).\ a\otimes b\in(1,+\infty)$,
(III') $e\in(1,+\infty)$,
(IV') $\forall a\in(1,+\infty).\ a^{-1}\in(1,+\infty)$,
QUE SÃO CONTAS TRIVIAIS.

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR")
13/julho/2011

(1) Podemos definir o conjunto das <u>árvores binárias com elementos de A nas folhas</u>, T_A, da seguinte forma:

$$T_{A0} = A,$$
$$T_{A(n+1)} = T_{An} \cup \{(t,t') \mid t,t' \in T_{An}\} \quad (\text{para } n \in \mathbb{N}),$$
$$T_A = T_{A0} \cup T_{A1} \cup T_{A2} \cup \ldots .$$

A <u>linearização</u> de uma árvore $t \in T_A$ é uma lista que tem todos os elementos de t "só com os parênteses externos". Por exemplo,

$$\mathrm{Lin}((((2,3),4),(10,20))) = (2,3,4,10,20)$$

(a) Defina formalmente (você vai precisar de uma definição indutiva!) a função 2,0 pts

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}} : T_{\mathbb{N}} \to \mathrm{Listas}_{\mathbb{N}},$$

onde $\mathrm{Listas}_{\mathbb{N}}$ é o conjunto das listas de naturais de comprimento finito.
Teste a sua definição calculando passo a passo

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}((((2,3),4),(10,20))).$$

(b) Seja $T_{seq\,ab}$ o subconjunto de $T_{\mathbb{N}}$ formado só pelas árvores cuja linearização é $(a, a+1, \ldots, b)$. 1,0 pts
Encontre todos os elementos de $T_{seq\,14}$.

(c) É possível definir $T_{seq\,1n}$ indutivamente. 3,0 pts
Calcule $T_{seq\,11}$, $T_{seq\,12}$, $T_{seq\,13}$,
$T_{seq\,24}$, $T_{seq\,34}$, $T_{seq\,44}$ e mostre como definir $T_{seq\,ab}$ a partir de conjuntos menores.

<u>Dicas:</u>

$\boxed{\alpha}$ $2 \in \mathbb{N}$, mas $(2,3) \notin \mathbb{N}$.

$\boxed{\beta}$ $\mathbb{N} \subsetneq T_{\mathbb{N}}$.

$\boxed{\gamma}$ $(2,3,4) +\!\!+ (5,6) = (2,3,4,5,6)$

$\boxed{\delta}$ $\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(1) = ?$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}((1,2)) = ?$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(((1,2),(3,4))) = ?$

(2) Prove que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (para $n \in \mathbb{N}$). 4,0 pts

(3) Sejam $A = \{1,2,\ldots,10\}$
e $R = \{(a,b) \in A \times A \mid b = \frac{a}{2} \text{ ou } b = 3a+1\}$.
Represente R como grafo direcionado e diga se R é transitiva, reflexiva, simétrica, e se R é ou não uma função (justifique!). Se R não for transitiva calcule o seu fecho transitivo. 2,0 pts

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR")
13/julho/2011

<u>Gabarito</u>

(1a) $\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}: T_{\mathbb{N}} \to \mathrm{Listas}_{\mathbb{N}}$

$$t \mapsto \begin{cases} (t) & \text{quando } t\in\mathbb{N}, \\ \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(a) +\!\!+\, \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(b) & \text{quando } t\notin\mathbb{N} \text{ e } t=(a,b) \end{cases}$$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(2) = (2)$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(3) = (3)$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}((2,3)) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(2) +\!\!+\, \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(3) = (2) +\!\!+\, (3) = (2,3)$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(4) = (4)$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(((2,3),4)) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}((2,3)) +\!\!+\, \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(4) = (2,3) +\!\!+\, (4) = (2,3,4)$

$\vdots$

$\mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}((((2,3),4),(10,20))) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}(((2,3),4)) +\!\!+\, \mathrm{Lin}_{\mathbb{N}}((10,20)) = (2,3,4,10,20)$

(1b) $T_{seq\,14} = \{ (((1,2),3),4),\ ((1,2),(3,4)),\ (1,(2,(3,4))),\ (1,((2,3),4)),\ ((\mathbf{4},(2,3)),4) \}$

(1c) Usando uma notação em árvore,

$T_{seq\,11} = \{1\}$, $T_{seq\,24} = \{ 2\widehat{\ }(3\widehat{\ }4),\ (2\widehat{\ }3)\widehat{\ }4 \}$,

$T_{seq\,12} = \{ 1\widehat{\ }2 \}$, $T_{seq\,34} = \{ 3\widehat{\ }4 \}$,

$T_{seq\,13} = \{ 1\widehat{\ }(2\widehat{\ }3),\ (1\widehat{\ }2)\widehat{\ }3 \}$, $T_{seq\,44} = \{4\}$

e

$$T_{seq\,ab} = T_{seq\,aa} \times T_{seq\,(a+1)b} \cup T_{seq\,a(a+1)} \times T_{seq\,(a+2)b} \cup \ldots \cup T_{seq\,a(b-1)} \times T_{seq\,bb}.$$

(2) Vamos definir:

$$P(k) = \left(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+\mathbf{1})}{6}\right)$$

Queremos ver que $\forall n\in\mathbb{N}.\ P(n)$.

Sabemos que $P(0) = \left(0 = \frac{0(0+1)(2\cdot0+\mathbf{1})}{6}\right) = V$;

vamos ver que se $P(k)$ é verdade então $P(k+1)$ também é verdade.

$$P(k+1) = \left(1+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+\mathbf{1})}{6}\right)$$
$$= \left(1+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+\mathbf{3})}{6}\right)$$
$$\overset{(*)}{=} \left(\frac{k(k+1)(2k+\mathbf{1})}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+\mathbf{3})}{6}\right),$$

onde em $(*)$ fizemos uma substituição usando $P(k)$.

É fácil provar que

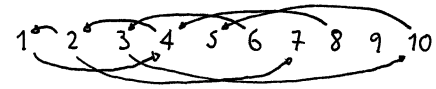
$$\frac{k\cancel{(k+1)}(2k+1) + 6\cancel{(k+1)}(k+1)}{\cancel{6}} = \frac{\cancel{(k+1)}(k+2)(2k+3)}{\cancel{6}},$$

isto é, que:

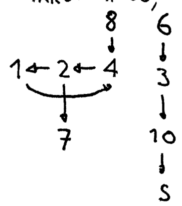
$$k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3)$$

Basta expandir - e isto prova que $P(k+1)$ é verdade. Portanto $\forall k\in\mathbb{N}.\ P(k)\to P(k+1)$, e pelo 1º princípio de indução temos $\forall n\in\mathbb{N}.\ P(n)$.

(3) R é:



Rearrumando, temos:



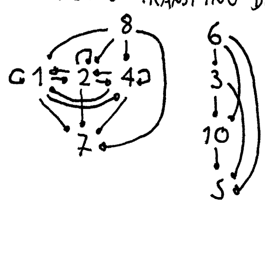
R não é transitiva porque temos $6\mathbf{R}3$ e $3R10$ mas $6 \not R 10$;

R não é simétrica porque temos $6R3$ mas $3 \not R 6$;

R não é reflexiva porque temos $6 \not R 6$;

R não é função porque temos $2R1$ e $2R7$.

O fecho transitivo de R é:



Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Prova Suplementar ("VS")
15/julho/2011

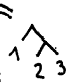
Na VR nós definimos o conjunto das "árvores binárias com elementos de A nas folhas" desta forma:

$$T_{A0} = A$$
$$T_{A(n+1)} = T_{An} \cup T_{An} \times T_{An} \quad \text{(para todo } n \in \mathbb{N}\text{)}$$
$$T_A = T_{A0} \cup T_{A1} \cup T_{A2} \cup \ldots,$$

e a partir disto podemos definir o que é uma "árvore binária com elementos de A nas folhas": t é uma árvore binária com elementos de A nas folhas se e só se $t \in T_A$.

① Seja $A = \{2\}$. Calcule T_{A0}, T_{A1} e T_{A2} e verifique que $(2,(2,2))$ é uma árvore binária com elementos de $\{2\}$ nas folhas. (0,5 pts)

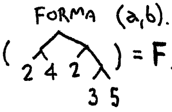
② Podemos usar uma notação alternativa para pares ordenados: vamos nos permitir escrever (α,β) como $\alpha \,\hat{}\, \beta$. Note que:

$(1,(2,3)) = 1 \,\hat{}\, (2,3) =$  $= (1, 2 \,\hat{}\, 3)$

ou seja, podemos escrever só alguns pares como "^"s, ou todos, ou nenhum.
Calcule $T_{\{3\}2}$ usando esta notação. (0,5 pts)

③ Dizemos que x é "da forma (a,b)" quando existem a e b tais que $x=(a,b)$; note que $(1,(2,3))$ é da forma (a,b), mas 9 não é da forma (a,b). (1,0 pts)
Agora que você já entende o que é $T_{\mathbb{N}}$ — que é um conjunto muuuito grande — você vai conseguir entender certos tipos de definições recursivas. :)
Para qualquer $A \subseteq \mathbb{N}$ podemos definir:

$$\mathrm{earv}_A : T_{\mathbb{N}} \to \{V, F\}$$
$$t \mapsto \begin{cases} t \in A & \text{se } t \text{ não é da forma } (a,b), \\ \mathrm{earv}_A(a) \wedge \mathrm{earv}_A(b) & \text{se } t \text{ é da forma } (a,b). \end{cases}$$

Mostre que $\mathrm{earv}_{\{2,3,4\}}($  $) = F$.

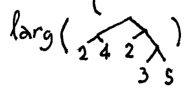
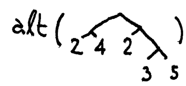
Lembre que você não precisa escrever "{2,3,4}" em todo lugar — a partir do momento que você diz "seja $B=\{2,3,4\}$" (em português!!) você passa a poder usar B como uma "abreviatura" para $\{2,3,4\}$.

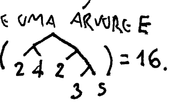
④ Como nenhum elemento de $\mathbb{N}$ é da forma (a,b) podemos escrever "se t não é da forma (a,b)" e "se t é da forma (a,b)" de modo mais compacto: "se $t \in \mathbb{N}$" e "se $t=(a,b)$". (1,0 pts)
Usando as definições

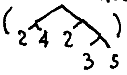
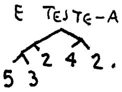
$$\mathrm{larg} : T_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$
$$t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \mathbb{N}, \\ \mathrm{larg}(a) + \mathrm{larg}(b) & \text{se } t=(a,b) \end{cases}$$

e

$$\mathrm{alt} : T_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$$
$$t \mapsto \begin{cases} \max(\mathrm{alt}(a), \mathrm{alt}(b))+1 & \text{se } t=(a,b) \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

calcule $\mathrm{larg}($  $)$ e $\mathrm{alt}($  $)$.

⑤ Defina formalmente uma função que soma os elementos nas folhas de uma árvore e teste-a mostrando que $\mathrm{soma}($  $) = 16$. (1,5 pts)

⑥ Defina formalmente uma função que "espelha" uma árvore e teste-a mostrando que $\mathrm{esp}($  $) =$ . (2,5 pts)

. . . .

Até agora estávamos usando só pares. A partir daqui vamos passar a usar também listas de comprimento 0 — notação: $()$ —, de comprimento 1 — notação: (a) —, de comprimento 3 — notação: (a,b,c) —, etc.
Lembre que $(10,20,30) + () + (4) = (10,20,30,4)$, e que $(10,20,30) + () + 4$ "dá erro" porque 4 não é uma lista.
Definimos:

$$L_{A0} = \{()\},$$
$$L_{A(n+1)} = L_{An} \cup \{\alpha + (\beta) \mid \alpha \in L_{An}, \beta \in A\},$$
$$L_A = L_{A0} \cup L_{A1} \cup L_{A2} \cup \ldots.$$

⑦ Calcule $L_{\{2,3\}2}$. (0,5 pts)

⑧ Vamos definir: (1,0 pts)

$$\mathrm{add} : L_{\mathbb{N}} \to L_{\mathbb{N}}$$
$$\alpha \mapsto \begin{cases} () & \text{se } \alpha = (), \\ () & \text{se } \alpha = (x), \\ \beta + (x+y) & \text{se } \alpha = \beta + (x,y), \end{cases}$$

$$\mathrm{sub} : L_{\mathbb{N}} \to L_{\mathbb{N}}$$
$$\alpha \mapsto \begin{cases} () & \text{se } \alpha = () \text{ ou } \alpha = (x), \\ \beta + (x-y) & \text{se } \alpha = \beta + (x,y), \end{cases}$$

$$\mathrm{push} : L_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to L_{\mathbb{N}}$$
$$(\alpha, x) \mapsto \alpha + (x).$$

Calcule:

$\alpha_0 = ()$,
$\alpha_1 = \mathrm{push}(\alpha_0, 2)$,
$\alpha_2 = \mathrm{push}(\alpha_1, 3)$,
$\alpha_3 = \mathrm{push}(\alpha_2, 4)$,
$\alpha_4 = \mathrm{sub}(\alpha_3)$,
$\alpha_5 = \mathrm{add}(\alpha_4)$,
$\alpha_6 = \mathrm{sub}(\alpha_5)$.

Continua

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PROVA SUPLEMENTAR ("VS")
15/JULHO/2011
(CONTINUAÇÃO)

(9) PODEMOS FAZER DEFINIÇÕES "RECURSIVAS EM LISTAS" COMEÇANDO PELA ESQUERDA (OU PELA DIREITA). POR EXEMPLO, PODEMOS DEFINIR UMA FUNÇÃO QUE SOMA TODOS OS ELEMENTOS DE UMA LISTA $\alpha \in L_{\mathbb{N}}$ QUE FUNCIONE DA SEGUINTE FORMA: ⇐ 1,5 PTS

$$\begin{aligned}
\text{soma}(()) &= 0 \\
\text{soma}((2)) &= \text{soma}(()) + 2 \\
\text{soma}((2,3)) &= \text{soma}((2)) + 3 \\
\text{soma}((2,3,4)) &= \text{soma}((2,3)) + 4
\end{aligned}$$

DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA ESTA FUNÇÃO E TESTE-A.

(10) SEJA $Ops = \{"+", "-"\}$ E $\mathbb{N}_\pm = \mathbb{N} \cup Ops$. ⇐ 2,0 PTS
ENTÃO TEMOS, POR EXEMPLO, $(2,3,4,"-","+") \in L_{\mathbb{N}_\pm}$.
A CALCULADORA DA GABRIELA "CALCULA O VALOR" DE LISTAS DE $L_{\mathbb{N}_\pm}$, E ELA É DEFINIDA EM DUAS PARTES: A FUNÇÃO gab1, QUE EXECUTA UMA OPERAÇÃO DE CADA VEZ, E A FUNÇÃO gab, QUE EXECUTA UMA LISTA DE OPERAÇÕES. POR EXEMPLO:

$$\begin{aligned}
\text{gab1}((), 2) &= (2), \\
\text{gab1}((2), 3) &= (2,3), \\
\text{gab1}((2,3,4), "-") &= (2,-1)
\end{aligned}$$

E
$$\begin{aligned}
&\text{gab}((2), (3, "-")) = \\
&\text{gab}((2,3), ("-")) = \\
&\text{gab}((-1), ()) = \\
&\quad (-1).
\end{aligned}$$

DEFINA FORMALMENTE gab1 E gab E TESTE AS SUAS DEFINIÇÕES.

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.1
PROF: EDUARDO OCHS
PROVA SUPLEMENTAR ("VS")
15/JULHO/2011
GABARITO

(1) $T_{A0} = \{2\}$

$T_{A1} = \{2\} \cup \{2\} \times \{2\}$
$= \{2, (2,2)\}$

$T_{A2} = \{2, \widehat{2\,2}\} \cup \{2, \widehat{2\,2}\} \times \{2, \widehat{2\,2}\}$
$= \{2, \widehat{2\,2}\} \cup \{\widehat{2\,2}, \widehat{2\,\widehat{2\,2}}, \widehat{\widehat{2\,2}\,2}, \widehat{\widehat{2\,2}\,\widehat{2\,2}}\}$
$= \{2, \widehat{2\,2}, \widehat{2\,\widehat{2\,2}}, \widehat{\widehat{2\,2}\,2}, \widehat{\widehat{2\,2}\,\widehat{2\,2}}\}$

$(2,(2,2)) = \widehat{2\,\widehat{2\,2}} \in T_{A2} \subset T_A$,

PORTANTO $(2,(2,2))$ É UMA ÁRVORE BINÁRIA COM ELEMENTOS DE $\{2\}$ NAS FOLHAS.

(2) $T_{\{3\}2} = \{3, \widehat{3\,3}, \widehat{3\,\widehat{3\,3}}, \widehat{\widehat{3\,3}\,3}, \widehat{\widehat{3\,3}\,\widehat{3\,3}}\}$

(O DESENVOLVIMENTO É IGUAL AO DA QUESTÃO 1).

(3) SEJA $B = \{2,3,4\}$
ENTÃO $\mathrm{earv}_B(\underbrace{\widehat{\underbrace{\widehat{2\,4}}_{a}\;\underbrace{\widehat{2\,\widehat{3\,5}}}_{b}}}_{t}) =$

$= \mathrm{earv}_B(\widehat{2\,4}) \wedge \mathrm{earv}_B(\widehat{2\,\widehat{3\,5}})$
$= \mathrm{earv}_B(\widehat{2\,4}) \wedge \mathrm{earv}_B(2) \wedge \mathrm{earv}_B(\widehat{3\,5})$
$= \mathrm{earv}_B(\widehat{2\,4}) \wedge (2 \in B) \wedge \mathrm{earv}_B(3) \wedge \mathrm{earv}_B(5)$
$= \mathrm{earv}_B(\widehat{2\,4}) \wedge V \wedge V \wedge F$
$= F$

(4) $\mathrm{larg}(\widehat{\widehat{2\,4}\;\widehat{2\,\widehat{3\,5}}}) =$
$= \mathrm{larg}(\widehat{2\,4}) + \mathrm{larg}(\widehat{2\,\widehat{3\,5}})$
$= \mathrm{larg}(2) + \mathrm{larg}(4) + \mathrm{larg}(2) + \mathrm{larg}(\widehat{3\,5})$
$= 1 + 1 + 1 + \mathrm{larg}(3) + \mathrm{larg}(5)$
$= 1+1+1+1+1$
$= 5$

[redacted] $\mathrm{alt}(\widehat{\widehat{2\,4}\;\widehat{2\,\widehat{3\,5}}}) =$
$= \max(\mathrm{alt}(\widehat{2\,4}), \mathrm{alt}(\widehat{2\,\widehat{3\,5}})) + 1$
$= \max(\max(\mathrm{alt}(2), \mathrm{alt}(4)) + 1, \mathrm{alt}(\widehat{2\,\widehat{3\,5}})) + 1$
$\overset{(*)}{=} \max(\max(0,0)+1, 2) + 1$
$= \max(0+1, 2) + 1$
$= 2+1$
$= 3$,

ONDE NO PASSO (*) USAMOS QUE
$\mathrm{alt}(\widehat{2\,\widehat{3\,5}}) = \max(\mathrm{alt}(2), \mathrm{alt}(\widehat{3\,5})) + 1$
$= \max(0, 1) + 1$
$= 2$.

(5) $\mathrm{soma}: T_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$

$$t \mapsto \begin{cases} t & \text{se } t \in \mathbb{N}, \\ \mathrm{soma}(a) + \mathrm{soma}(b) & \text{se } t = (a,b). \end{cases}$$

TESTE:
$\mathrm{soma}(2) = 2$
$\mathrm{soma}(3) = 3$
$\mathrm{soma}(4) = 4$
$\mathrm{soma}(5) = 5$
$\mathrm{soma}(\widehat{2\,4}) = \mathrm{soma}(2) + \mathrm{soma}(4) = 6$
$\mathrm{soma}(\widehat{3\,5}) = \mathrm{soma}(3) + \mathrm{soma}(5) = 8$
$\mathrm{soma}(\widehat{2\,\widehat{3\,5}}) = \mathrm{soma}(2) + \mathrm{soma}(\widehat{3\,5}) = 10$
$\mathrm{soma}(\widehat{\widehat{2\,4}\;\widehat{2\,\widehat{3\,5}}}) = \mathrm{soma}(\widehat{2\,4}) + \mathrm{soma}(\widehat{2\,\widehat{3\,5}}) = 16$

(6) $\mathrm{esp}: T_{\mathbb{N}} \to T_{\mathbb{N}}$

$$t \mapsto \begin{cases} t & \text{se } t \in \mathbb{N}, \\ (\mathrm{esp}(b), \text{[redacted]}\ \mathrm{esp}(a)) & \text{se } t = (a,b). \end{cases}$$

TESTE:
$\mathrm{esp}(\widehat{2\,4}) = (\mathrm{esp}(4), \mathrm{esp}(2))$
$= (4,2)$
$= \widehat{4\,2}$

$\mathrm{esp}(\widehat{2\,\widehat{3\,5}}) = (\mathrm{esp}(\widehat{3\,5}), \mathrm{esp}(2))$
$= (\widehat{5\,3}, 2)$
$= \widehat{\widehat{5\,3}\,2}$

$\mathrm{esp}(\widehat{\widehat{2\,4}\;\widehat{2\,\widehat{3\,5}}}) = (\widehat{\widehat{5\,3}\,2}, \widehat{4\,2})$
$= \widehat{\widehat{\widehat{5\,3}\,2}\;\widehat{4\,2}}$

(7) SEJA $C = \{2,3\}$.
$L_{C0} = \{()\}$
$L_{C1} = \{()\} \cup \{\alpha +\!\!+ (\beta) \mid \alpha \in \{()\}, \beta \in \{2,3\}\}$
$= \{()\} \cup \{() +\!\!+ (2), () +\!\!+ (3)\}$
$= \{(), (2), (3)\}$
$L_{C2} = L_{C1} \cup \{\alpha +\!\!+ (\beta) \mid \alpha \in L_{C1}, \beta \in \{2,3\}\}$
$= \{(), (2), (3),$
$() +\!\!+ (2), () +\!\!+ (3),$
$(2) +\!\!+ (2), (2) +\!\!+ (3),$
$(3) +\!\!+ (2), (3) +\!\!+ (3)\}$
$= \{(), (2), (3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

CONTINUA

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Prova suplementar ("VS")
15/julho/2011
Gabarito (cont.)

(8) $\alpha_0 = ()$

$\alpha_1 = \mathrm{push}((), 2)$
$= () \mathbin{+\!\!+} (2)$
$= (2)$

$\alpha_2 = \mathrm{push}((2), 3)$
$= (2, 3)$

$\alpha_3 = \mathrm{push}((2,3), 4)$
$= (2, 3, 4)$

$\alpha_4 = \mathrm{sub}((2,3,4))$
$= (2) \mathbin{+\!\!+} (3-4)$
$= (2, -1)$

$\alpha_5 = \mathrm{add}((2,-1))$
$= () \mathbin{+\!\!+} (2+(-1))$
$= (1)$

$\alpha_6 = \mathrm{sub}((1))$
$= ()$.

(9) $\mathrm{soma}: L_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$

$$\alpha \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = (), \\ \mathrm{soma}(\beta) + x & \text{se } \alpha = \beta \mathbin{+\!\!+} (x). \end{cases}$$

$\mathrm{soma}((2,3,4)) = \mathrm{soma}((2,3)) + 4$
$= \mathrm{soma}((2)) + 3 + 4$
$= \mathrm{soma}(()) + 2 + 3 + 4$
$= 0 + 2 + 3 + 4$
$= 9$

(10) $\mathrm{gab1}: L_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}_{\pm} \to L_{\mathbb{N}}$

$$(\alpha, op) \mapsto \begin{cases} \mathrm{push}(\alpha, op) & \text{se } op \in \mathbb{N}, \\ \mathrm{add}(\alpha) & \text{se } op = \text{"+"}, \\ \mathrm{sub}(\alpha) & \text{se } op = \text{"-"} \end{cases}$$

$\mathrm{gab}: L_{\mathbb{N}} \times L_{\mathbb{N}_{\pm}} \to L_{\mathbb{N}}$

$$(\alpha, ops) \mapsto \begin{cases} \alpha & \text{se } ops = (), \\ \mathrm{gab}(\mathrm{gab1}(\alpha, op), ops') & \text{se } ops = (op) \mathbin{+\!\!+} ops' \end{cases}$$

Daí: $\mathrm{gab}((), (2, 3, \text{"-"}, 4, \text{"+"}, \text{"+"})) =$
$= \mathrm{gab}(\mathrm{gab1}((), 2), (3, \text{"-"}, 4, \text{"+"}, \text{"+"}))$
$= \mathrm{gab}((2), (3, \text{"-"}, 4, \text{"+"}, \text{"+"}))$
$= \mathrm{gab}((2,3), (\text{"-"}, 4, \text{"+"}, \text{"+"}))$
$= \mathrm{gab}((-1), (4, \text{"+"}, \text{"+"}))$
$= \mathrm{gab}((-1, 4), (\text{"+"}, \text{"+"}))$
$= \mathrm{gab}((5), (\text{"+"}))$,
$= \mathrm{gab}((), ())$
$= ()$