MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
3/NOVEMBRO/2011

UM MODO DE DEFINIR LISTAS FORMALMENTE É ESPECIFICANDO O <u>COMPRIMENTO</u> DA LISTA E <u>COMO CALCULAR</u> CADA ELEMENTO DA LISTA — E NA PARTE DO "COMO CALCULAR" PODEMOS USAR A NOTAÇÃO QUE USAMOS PARA DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES - INCLUINDO DEFINIÇÕES POR CASOS. POR EXEMPLO:

$$\mathrm{compr}(a) = 5$$
$$a_i = \begin{cases} 99 & \text{QUANDO } i=1, \\ 10; & \text{NOS OUTROS CASOS.} \end{cases}$$

ESTA DEFINIÇÃO DIZ QUE
$$a = (99, 20, 30, 40, 50).$$

PODEMOS USAR ESTA MESMA IDÉIA PARA DEFINIR FORMALMENTE <u>OPERAÇÕES CUJOS RESULTADOS SÃO LISTAS</u>. A OPERAÇÃO QUE INVERTE A ORDEM DOS ELEMENTOS DE UMA LISTA, rev, LEVA (99, 20, 30, 40, 50) EM (50, 40, 30, 20, 99) E UMA PRIMEIRA TENTATIVA DE DEFINÍ-LA FORMALMENTE PODERIA SER:

$$\mathrm{compr}(\mathrm{rev}_1(a)) = \mathrm{compr}(a)$$
$$(\mathrm{rev}_1(a))_i = a_{(\mathrm{compr}(a)-i)}$$

① TENTE CALCULAR $\mathrm{rev}_1(a)$ PARA $a=(99, 20, 30, 40, 50)$ & MOSTRE O QUE ACONTECE DE ERRADO — OU SEJA, PORQUE NÃO TEMOS $\mathrm{rev}_1(a)=\mathrm{rev}(a)$. **1.0 PTS**

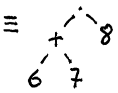
② TENTE CONSERTAR ESTA DEFINIÇÃO FORMAL DA rev. CHAME AS SUAS DEFINIÇÕES DE rev_2, rev_3, ..., DEFINA FORMALMENTE CADA UMA DELAS E TESTE-AS (ATÉ CHEGAR A UMA QUE VOCÊ ACREDITA QUE FUNCIONE COMO A rev). **1.0 PTS**

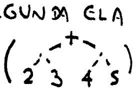
③ DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA A OPERAÇÃO DE CONCATENAÇÃO DE LISTAS, "$+\!\!+$"; CHAME AS OPERAÇÕES QUE VOCÊ DEFINIR DE $+\!\!+_1$, $+\!\!+_2$, ETC E TESTE-AS. QUANDO VOCÊ CHEGAR A ALGUMA QUE VOCÊ ACHE QUE ESTÁ BOA, "$+\!\!+_n$", USE-A PARA CALCULAR
$$((b +\!\!+_n c) +\!\!+_n d)_{12}$$
E
$$(b +\!\!+_n (c +\!\!+_n d))_{12},$$
ONDE:
$$\mathrm{compr}(b) = 10, \quad b_i = 10i,$$
$$\mathrm{compr}(c) = 20, \quad c_i = 100i,$$
$$\mathrm{compr}(d) = 40, \quad d_i = 1000i.$$
2.0 PTS

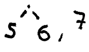
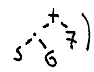
④ AS CALCULADORAS QUE A GABRIELA ESTÁ IMPLEMENTANDO OPERAM SOBRE <u>PILHAS</u>, QUE SÃO LISTAS NAS QUAIS A GENTE CONSIDERA QUE O PRIMEIRO ELEMENTO ESTÁ "EMBAIXO" E O ÚLTIMO ELEMENTO ESTÁ "NO TOPO". POR EXEMPLO, ALGUNS DOS PASSOS QUE ELA FAZ PRA CALCULAR O VALOR DE $2\cdot3+4\cdot5$ SÃO: **2.0 PTS**

(6, 4)
↓ PÕE O 5 NO TOPO DA PILHA
(6, 4, 5)
↓ MULTIPLICA OS DOIS ELEMENTOS NO TOPO DA PILHA
(6, 20)
↓ SOMA OS DOIS ELEMENTOS NO TOPO DA PILHA
(26)

UMA DAS VERSÕES DA CALCULADORA OPERA SOBRE UMA PILHA DE "ÁRVORES BINÁRIAS" AO INVÉS DE SOBRE UMA PILHA DE NÚMEROS. UMA <u>ÁRVORE BINÁRIA</u>, NESTE CASO, É OU UM NÚMERO OU UMA LISTA DA FORMA
(string, arvore$_{esq}$, arvore$_{dir}$),
E PODEMOS USAR UMA NOTAÇÃO MAIS CONVENIENTE PARA ESTAS ÁRVORES:

("*", ("+", 6, 7), 8) ≡ 

A SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES PARA CALCULAR $2\cdot3+4\cdot5$ É "2 3 · 4 5 · +", E NA PRIMEIRA CALCULADORA ESTA SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES FAZ
$$() \mapsto (26),$$
E NA SEGUNDA ELA FAZ
() ↦ ().

DEFINA FORMALMENTE A AÇÃO DO "+" NA SEGUNDA CALCULADORA, E TESTE A SUA DEFINIÇÃO NESTE CASO:
(4, ) ↦ (4, ).

CONTINUA...

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
3/NOVEMBRO/2011
(CONTINUAÇÃO...)

VAMOS USAR A DEFINIÇÃO:

$a \text{ div } b \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}.\ ak = b$

CONSIDERE AS SEGUINTES PROVAS EM FITCH:

ⓐ

1	$a \in \mathbb{Z}$	(HIPÓTESE TEMPORÁRIA)
2	$5a = 5a$	(POR 1 E ÁLGEBRA)
3	$\exists k \in \mathbb{Z}.\ 5k = 5a$	(POR 2 E $\exists$-INTRO, COM $k=a$)
4	$5 \text{ div } 5a$	(POR 3 E PELA DEF DE div)
5	$a \in \mathbb{Z} \to 5 \text{ div } 5a$	(POR 1-4 E $\to$-INTRO)

ⓑ

1	$0 \text{ div } a$	(HIP. TEMPORÁRIA)
2	$\exists k \in \mathbb{Z}.\ 0k = a$	(POR 1 E PELA DEF DE DIV)
3	$k \in \mathbb{Z}$	(HIP TEMPORÁRIA)
4	$0k = a$	(HIP TEMPORÁRIA)
5	$0 = a$	(POR 4 E ÁLGEBRA)
6	$a = 0$	(POR 5 E ÁLGEBRA)
7	$a = 0$	(POR 2, 3-6 E $\exists$-ELIM)
8	$0 \text{ div } a \to a = 0$	(POR 1-7 E $\to$-INTRO)

E A SEGUINTE PROVA EM PORTUGUÊS FORMALIZÁVEL:

ⓒ DIGAMOS QUE a E b SÃO INTEIROS. QUEREMOS MOSTRAR QUE SE $5 \text{ div } a$ OU $5 \text{ div } b$ ENTÃO $5 \text{ div } ab$. VAMOS DIVIDIR A PROVA EM DOIS CASOS. SE $5 \text{ div } a$, ENTÃO EXISTE UM INTEIRO k TAL QUE $5k = a$. DAÍ $5kb = ab$, E COMO b É INTEIRO ENTÃO kb É INTEIRO, E $5 \text{ div } ab$. NO CASO EM QUE $5 \text{ div } b$ A PROVA É ANALOGA - BASTA TROCAR a POR b E b POR a. PORTANTO QUANDO $a, b \in \mathbb{Z}$ VALE $(5 \text{ div } a \lor 5 \text{ div } b) \to 5 \text{ div } ab$.

AGORA:

⑤ TRADUZA A PROVA ⓒ PARA FITCH. **4.0 PTS**
AS PROVAS ⓐ E ⓑ TÊM VÁRIOS EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DE REGRAS QUE VOCÊ DEVE PRECISAR USAR, E VOCÊ PROVAVELMENTE VAI PRECISAR DESTA TAMBÉM:

1	$P \lor Q$	
2	P	
	⋮	
10	R	
11	Q	
	⋮	
20	R	
21	R	(POR 1, 2-10, 11-20 E $\lor$-ELIM)

A QUESTÃO 5 É BEM DIFÍCIL, ENTÃO VOCÊ PROVAVELMENTE VAI PREFERIR FAZER ESTAS PRIMEIRO:

⑥ DENTRO DA PROVA ⓒ HÁ UMA PROVA DE QUE $(a, b \in \mathbb{Z} \land 5 \text{ div } a) \to 5 \text{ div } ab$. FORMALIZE-A EM FITCH. **3.0 PTS**

⑦ TRADUZA ESTA PROVA PARA FITCH: **1.0 PTS**

$$\dfrac{\dfrac{P \land Q}{P} \qquad \dfrac{\dfrac{P \land Q}{Q} \quad Q \to R}{R}}{P \land R}$$

MAIS PRECISAMENTE, FAÇA UMA PROVA EM FITCH DE $(P \land Q) \land (Q \to R) \to (P \land R)$.
AS DICAS PARA DEDUZIR $P \land R$ A PARTIR DE $P \land Q$ E $Q \to R$ ESTÃO NA ÁRVORE ACIMA, QUE ESTÁ NUM OUTRO FORMALISMO, CHAMADO "DEDUÇÃO NATURAL", NO QUAL ACIMA DE CADA BARRA ESTÃO AS HIPÓTESES, ABAIXO ESTÁ A CONCLUSÃO, E AS REGRAS NÃO ESTÃO SENDO NOMEADAS. POR EXEMPLO,

$$\dfrac{Q \quad Q \to R}{R}$$

HIPÓTESE 1
HIPÓTESE 2
CONCLUSÃO

É O MODUS PONENS.

BOA PROVA! :-)

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2011.2
PROF: EDUARDO OCHS
PRIMEIRA PROVA ("P1")
3/NOVEMBRO/2011

GABARITO

1) $(rev_1(a))_1 = a_{5-1} = a_4 = 40$
$(rev_1(a))_2 = a_{5-2} = a_3 = 30$
$(rev_1(a))_3 = a_{5-3} = a_2 = 20$
$(rev_1(a))_4 = a_{5-4} = a_1 = 10$
$(rev_1(a))_5 = a_{5-5} = a_0 =$ ERRO
(PORQUE 0 NÃO É UM ÍNDICE VÁLIDO)

DAÍ $rev_1(a)$ NÃO É UMA LISTA - PORQUE
$compr(rev_1(a)) = 5$
MAS $(rev_1(a))_5$ NÃO ESTÁ DEFINIDO, E ALÉM DISTO SEUS ELEMENTOS ESTÃO NA POSIÇÃO ERRADA EM COMPARAÇÃO COM OS DE $rev(a)$:
$rev(a) = (50, 40, 30, 20, 99)$
$rev_1(a) = (40, 30, 20, 99, \text{ERRO})$.

2) $compr(rev_2(a)) = compr(a)$
$(rev_2(a))_i = a_{(compr(a)+1-i)}$
(NÃO VOU ESCREVER O TESTE AQUI).

3) $compr(a +\!\!+_1 b) = compr(a) + compr(b)$
$$(a +\!\!+_1 b)_i = \begin{cases} a_i & \text{QUANDO } i \leq compr(a) \\ b_{(i - compr(a))} & \text{QUANDO } i > compr(a) \end{cases}$$

AS LISTAS ~~a~~ b, c, d DADAS SÃO:
$b = (10, 20, 30, \ldots, 100)$, com $b_1 = 10$, $b_2 = 20$, …, $b_{10} = 100$,
$c = (100, 200, 300, \ldots, 2000)$, com $c_1 = 100$, $c_2 = 200$, …, $c_{20} = 2000$,
$d = (1000, 2000, 3000, \ldots, 40000)$, com $d_1 = 1000$, $d_2 = 2000$, …, $d_{40} = 40000$, E:
$compr(b +\!\!+_1 c) = 30$,
$compr(c +\!\!+_1 d) = 60$,
$((b +\!\!+_1 c) +\!\!+_1 d)_{12} = (b +\!\!+_1 c)_{12} = c_2 = 200$,
$(b +\!\!+_1 (c +\!\!+_1 d))_{12} = (c +\!\!+_1 d)_2 = c_2 = 200$.

4) VOU CHAMAR DE f A FUNÇÃO CUJA AÇÃO CORRESPONDE À AÇÃO DO "+" NA SEGUNDA CALCULADORA; POR EXEMPLO, TEMOS
$$f((4, 5, 6, 7)) = (4, 5, \overset{+}{6\;\;7})$$
PODEMOS DEFINIR A f USANDO SÓ NOTAÇÕES QUE JÁ VIMOS DESTA FORMA:
$$compr(f(a)) = compr(a) - 1$$
$$(f(a))_i = \begin{cases} a_i & \text{SE } i \leq compr(a) - 2 \\ (\text{"+"}, a_{(compr(a)-1)}, a_{compr(a)}) & \text{SE } i = compr(a) - 1 \end{cases}$$

5) (ABAIXO)

6)

1	$a, b \in \mathbb{Z} \wedge 5 \text{ div } a$	(HIP. TEMPORÁRIA)
2	$a, b \in \mathbb{Z}$	(POR 1 E $SIMP_1$)
3	$5 \text{ div } a$	(POR 1 E $SIMP_2$)
4	$\exists k \in \mathbb{Z}.\ 5k = a$	(POR 3 E PELA DEF DE div)
5	$k \in \mathbb{Z}$	(HIP. TEMP.)
6	$5k = a$	(HIP TEMP.)
7	$b \in \mathbb{Z}$	(POR 2 E $SIMP_2$)
8	$5kb = ab$	(POR 6,7 E ÁLGEBRA)
9	$kb \in \mathbb{Z}$	(POR 5,7 E ÁLGEBRA)
10	$\exists m \in \mathbb{Z}.\ 5m = ab$	(POR 8,9 E $\exists$-INTRO, COM $m = kb$)
11	$5 \text{ div } ab$	(POR 10 E PELA DEF DE div)
12	$5 \text{ div } ab$	(POR 4, 5-11 E $\exists$-ELIM)
13	$(a, b \in \mathbb{Z} \wedge 5 \text{ div } a) \to 5 \text{ div } ab$	(POR 1-12 E $\to$-INTRO)

5)

1	$a, b \in \mathbb{Z}$	
2	$5 \text{ div } a \vee 5 \text{ div } b$	(HIP. TEMPORÁRIA)
3	$5 \text{ div } a$	(HIP. TEMP.)
⋮	⋮	(COMO NA QUESTÃO 6)
20	$5 \text{ div } ab$	
21	$5 \text{ div } b$	(HIP. TEMP.)
⋮	⋮	(COMO NA QUESTÃO 6, TROCANDO a POR b)
40	$5 \text{ div } ab$	
41	$5 \text{ div } ab$	(POR 2, 3-20, 21-40 E $\vee$-ELIM)
42	$(5 \text{ div } a \vee 5 \text{ div } b) \to 5 \text{ div } ab$	(POR 2-41 E $\to$-INTRO)

7)

1	$(P \wedge Q) \wedge (Q \to R)$	(HIP. TEMP.)
2	$P \wedge Q$	(POR 1 E $SIMP_1$)
3	P	(POR 2 E $SIMP_1$)
4	Q	(POR 2 E $SIMP_2$)
5	$Q \to R$	(POR 1 E $SIMP_2$)
6	R	(POR 4,5 E MP)
7	$P \wedge R$	(POR 3,6 E CONJ)
8	$(P \wedge Q) \wedge (Q \to R) \to P \wedge R$	(POR 1-7 E $\to$-INTRO)

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Segunda prova ("P2")
7/dezembro/2011

Tipos implícitos

Convenção: as letras a, b, c, k, x, y vão sempre denotar reais positivos ($a, b, \ldots \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$), e f, g, h vão ser funções de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$.

Funções de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$

Expressões entre colchetes como $[5]$, $[x]$, $[2x^3+4]$ vão denotar funções:

$$\begin{array}{rl} [5]: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} [x]: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} [2x^3+4]: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto 2x^3+4 \end{array}$$

Além disto, se $a \in \mathbb{R}^+$, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, então af, fg, $f+g$ e $f \circ g$ vão ser estas funções:

$$\begin{array}{rl} af: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto a \cdot f(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} fg: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f+g: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto f(x) + g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f \circ g: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto f(g(x)) \end{array}$$

As regras de redução são estas:

$$(af)(x) \rightsquigarrow a \cdot f(x)$$
$$(fg)(x) \rightsquigarrow f(x) \cdot g(x)$$
$$(f+g)(x) \rightsquigarrow f(x) + g(x)$$
$$(f \circ g)(x) \rightsquigarrow f(g(x))$$

E vamos definir as seguintes relações entre funções de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$:

$$f \leq g \leftrightarrow \forall x.\ f(x) \leq g(x)$$
$$f \underset{a}{\leq} g \leftrightarrow \forall x.\ a \leq x \to f(x) \leq g(x)$$
$$f \underset{\exists}{\leq} g \leftrightarrow \exists a.\ \forall x.\ a \leq x \to f(x) \leq g(x)$$
$$f \underset{\exists\exists}{\leq} g \leftrightarrow \exists a, k.\ \forall x.\ a \leq x \to f(x) \leq k \cdot g(x)$$

Obs: já estamos usando a convenção dos tipos implícitos pra abreviar - por exemplo, "$\exists a, k.\ \forall x$" quer dizer "$\exists a \in \mathbb{R}^+.\ \exists k \in \mathbb{R}^+.\ \forall x \in \mathbb{R}^+$".

Obs 2: a notação usual para "$f \underset{\exists\exists}{\leq} g$" é "$f = O(g)$", mas no contexto desta prova a notação "$f \underset{\exists\exists}{\leq} g$" vai ser um pouco mais clara - e ela nos permite escrever "$f \underset{\exists\exists}{\leq} g \underset{\exists\exists}{\leq} h$" ao invés de "$f = O(g)$ e $g = O(h)$".

As regras para o "$\forall$"

Neste exemplo - uma prova de que a relação "$\leq$" entre funções de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$ é transitiva - as duas regras para o "$\forall$" aparecem:

1	$f \leq g \land g \leq h$	(hip. temp.)
2	$f \leq g$	(por 1 e simp_1)
3	$g \leq h$	(por 1 e simp_2)
4	$\forall x \in \mathbb{R}^+.\ f(x) \leq g(x)$	(por 2 e pela def de $\leq$)
5	$\forall x \in \mathbb{R}^+.\ g(x) \leq h(x)$	(por 3 e pela def de $\leq$)
6	$a \in \mathbb{R}^+$	(hip. temp.)
7	$f(a) \leq g(a)$	(por 4,6 e $\forall$-elim)
8	$g(a) \leq h(a)$	(por 5,6 e $\forall$-elim)
9	$f(a) \leq h(a)$	(por 7,8 e a transitividade do "$\leq$" em $\mathbb{R}$)
10	$\forall x \in \mathbb{R}^+.\ f(x) \leq h(x)$	(por 6-9 e $\forall$-intro)
11	$f \leq h$	(por 10 e pela def de $\leq$)
12	$f \leq g \land g \leq h \to f \leq h$	(por 1-11 e $\to$-intro)

Note que o "$\forall$-intro", na linha 10, é bem parecido com um "$\to$-intro", mas ao invés de concluirmos "$a \in \mathbb{R}^+ \to f(a) \leq g(a)$" concluímos "$\forall x \in \mathbb{R}^+.\ f(x) \leq g(x)$". Isto só é permitido quando não há hipóteses extras sobre o a.

1) Considere as funções $[1]$, $[x]$, $[1+\frac{x}{2}]$, $[2+x]$ de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$. Trace os gráficos de todas elas e diga se cada uma das afirmações abaixo é verdade. Justifique as suas respostas (em português). **1,5 pontos**

a) $[1] \leq [x]$
b) $[x] \leq [1+\frac{x}{2}]$
c) $[1+\frac{x}{2}] \leq [2+x]$
d) $[1] \underset{3}{\leq} [x]$
e) $[x] \underset{1}{\leq} [1+\frac{x}{2}]$ e') $[1+\frac{x}{2}] \underset{1}{\leq} [x]$
f) $[x] \underset{3}{\leq} [1+\frac{x}{2}]$ f') $[1+\frac{x}{2}] \underset{3}{\leq} [x]$
g) $[x] \leq [2+x]$
h) $[x] \underset{\exists}{\leq} [1+\frac{x}{2}]$ h') $[1+\frac{x}{2}] \underset{\exists}{\leq} [x]$
i) $[x] \underset{\exists\exists}{\leq} [1+\frac{x}{2}]$ i') $[1+\frac{x}{2}] \underset{\exists\exists}{\leq} [x]$

Obs: os últimos itens são bem mais importantes que os primeiros - mas você vai ter que entender bem os primeiros pra conseguir fazer os últimos.

2) Prove formalmente que $f \underset{4}{\leq} g \land g \underset{4}{\leq} h \to f \underset{4}{\leq} h$. **1,5 pontos**
A generalização ("Teorema 2") é: se $a \in \mathbb{R}^+$, $f \underset{a}{\leq} g \land g \underset{a}{\leq} h \to f \underset{a}{\leq} h$.

3) Prove formalmente que se $a \in \mathbb{R}^+$ então $f \underset{a}{\leq} g \to f \underset{a+3}{\leq} g$. **2,5 pontos**
A generalização ("Teorema 3") é: se $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a \leq b$, $f \underset{a}{\leq} g \to f \underset{b}{\leq} g$.

Continua

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Segunda prova ("P2")
7/dezembro/2011

[Continuação]

(4) Prove, em "português formalizável", que se $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, $a \leq c$ e $b \leq c$, então $f \underset{a}{\leq} g \wedge g \underset{b}{\leq} h \to f \underset{c}{\leq} h$. (1,0 pontos)

(5) Prove, em português formalizável, que $f \underset{\exists}{\leq} g \wedge g \underset{\exists}{\leq} h \to f \underset{\exists}{\leq} h$. (1,0 pontos)

(6) Prove, em português formalizável, que se $a', b' \in \mathbb{R}^+$ então
$$f \underset{\exists}{\leq} a'g \wedge g \underset{\exists}{\leq} b'h \to f \underset{\exists}{\leq} a'b'h.$$
(1,0 pontos)

(7) Prove, em português formalizável, que
$$f \underset{\exists\exists}{\leq} g \wedge g \underset{\exists\exists}{\leq} h \to f \underset{\exists\exists}{\leq} h.$$
(1,0 pontos)

(8) As figuras que usamos em sala pra entender o mergesort formam uma seqüência: (3,0 pontos)

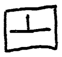
$F_0 =$ ,

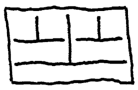
$F_1 =$ ,

$F_2 =$ , ...

Elas podem ser desenhadas com segmentos horizontais e verticais sem nunca atravessarmos segmentos que já foram desenhados. Isto fica mais claro se desenhamos cada uma destas figuras usando um "□" e vários "⊥"s:

$F_0 =$ 

$F_1 =$ 

$F_2 =$ 

Seja $N_0, N_1, N_2, \ldots$ a seqüência que diz quantos segmentos são necessários para desenhar $F_0, F_1, F_2, \ldots$ com "□"s e "⊥"s; $N_0 = 4$, $N_1 = 6$, $N_2 = 10$.

a) Explique como calcular cada N_{k+1} a partir de $N_0, \ldots, N_k$.

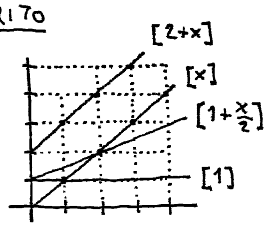
b) Calcule N_8.

c) Dê uma definição formal, indutiva, para a seqüência $N_0, N_1, N_2, \ldots$.

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Segunda Prova ("P2")
7/dezembro/2011

Gabarito

(1)



Daí:

a) $[1] \leq [x]$ é falso, porque $[1](\frac{1}{2}) > [x](\frac{1}{2})$;

b) $[x] \leq [1+\frac{x}{2}]$ é falso, porque $[x](1) \leq [1+\frac{x}{2}](1)$;

c) $[1+\frac{x}{2}] \leq [2+x]$ é verdadeiro;

d) $[1] \leq_3 [x]$ é verdadeiro, porque a parte "$3 \leq x \to$" da definição faz com que só precisemos considerar os valores de x do 3 em diante;

e) $[x] \leq_1 [1+\frac{x}{2}]$ é falso (contra-exemplo: $x=4$),

e') $[1+\frac{x}{2}] \leq_1 [x]$ é falso (contra-exemplo: $x=1.5$),

f) $[x] \leq_3 [1+\frac{x}{2}]$ é falso (contra-exemplo: $x=4$),

f') $[1+\frac{x}{2}] \leq_3 [x]$ é verdadeiro,

g) $[x] \leq [2+x]$ é verdadeiro,

h) $[x] \leq_3 [1+\frac{x}{2}]$ é [redacted] falso,

h') $[1+\frac{x}{2}] \leq_3 [x]$ é verdadeiro porque $[1+\frac{x}{2}] \leq_3 [x]$ é verdadeiro,

i) $[x] \leq_{33} [1+\frac{x}{2}]$ é verdadeiro porque $[x] \leq_3 2[1+\frac{x}{2}]$ é verdadeiro,

i') $[1+\frac{x}{2}] \leq_{33} [x]$ é verdadeiro porque $[1+\frac{x}{2}] \leq_3 [x]$ é verdadeiro.

(2)

1 $f \leq_4 g \land g \leq_4 h$ (hip. temp.)
2 $f \leq_4 g$ (por 1 e simp_1)
3 $g \leq_4 h$ (por 1 e simp_2)
4 $\forall x \in \mathbb{R}^+.\ 4 \leq x \to f(x) \leq g(x)$ (por 2 e pela def de $\leq_a$)
5 $\forall x \in \mathbb{R}^+.\ 4 \leq x \to g(x) \leq h(x)$ (por 3 e pela def de $\leq_a$)
6 $a \in \mathbb{R}^+$ (hip. temp.)
7 $4 \leq a \to f(a) \leq g(a)$ (por 4, 6 e $\forall$-elim)
8 $4 \leq a \to g(a) \leq h(a)$ (por 5, 6 e $\forall$-elim)
9 $4 \leq a$ (hip. temp.)
10 $f(a) \leq g(a)$ (por 9, 7 e MP)
11 $g(a) \leq h(a)$ (por 9, 8 e MP)
12 $f(a) \leq h(a)$ (por 10, 11 e a transitividade do "$\leq$" em $\mathbb{R}$)
13 $4 \leq a \to f(a) \leq h(a)$ (por 9-12 e $\to$-intro)
14 $\forall x \in \mathbb{R}^+.\ 4 \leq x \to f(x) \leq h(x)$ (por 6-13 e $\forall$-intro)
15 $f \leq_4 h$ (por 14 e pela def de $\leq_a$)
16 $f \leq_4 g \land g \leq_4 h \to f \leq_4 h$ (por 1-15 e $\to$-intro)

(3)

1 $f \leq_a g$ (hip. temp.)
2 $\forall x \in \mathbb{R}^+.\ a \leq x \to f(x) \leq g(x)$ (por 1 e pela def de $\leq_a$)
3 $b \in \mathbb{R}^+$ (hip. temp.)
4 $a \leq b \to f(b) \leq g(b)$ (por 3, 2 e $\forall$-elim)
5 $a \leq a+3$ (por álgebra)
6 $a+3 \leq b$ (hip. temp.)
7 $a \leq b$ (por 5, 6 e a transitividade do "$\leq$" em $\mathbb{R}$)
8 $f(b) \leq g(b)$ (por 7, 4 e MP)
9 $a+3 \leq b \to f(b) \leq g(b)$ (por 6-8 e $\to$-intro)
10 $\forall x \in \mathbb{R}^+.\ a+3 \leq x \to f(x) \leq g(x)$ (por 3-9 e $\forall$-intro)
11 $f \leq_{a+3} g$ (por 10 e pela def de $\leq_a$)
12 $f \leq_a g \to f \leq_{a+3} g$ (por 1-11 e $\to$-intro)

(4) Suponha que $f \leq_a g$. Como $a \leq c$, temos $f \leq_c g$ (pelo teorema 3); suponha também que $g \leq_b h$. Como $b \leq c$, sabemos que $g \leq_c h$. E o teorema 2 nos diz que $f \leq_c g \land g \leq_c h \to f \leq_c h$; então $f \leq_c h$ é verdade. Ou seja, $f \leq_a g \land g \leq_b h \to f \leq_c h$.

(5) Se $f \leq_{\exists} g \land g \leq_{\exists} h$ então existem $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $f \leq_a g \land g \leq_b h$. Seja c um real positivo qualquer que seja maior que a e b (por exemplo, $c = \max(a,b)$); então pelo que demonstramos na questão anterior, $f \leq_c h$.

(6) Como $a'>0$, $g \leq_{\exists} b'h \leftrightarrow a'g' \leq_{\exists} a'b'h$; e pelo teorema da questão anterior,
$f \leq_{\exists} a'g \land a'g \leq_{\exists} a'b'h \to f \leq_{\exists} a'b'h$, portanto
$f \leq_{\exists} a'g \land g \leq_{\exists} b'h \to f \leq_{\exists} a'b'h$.

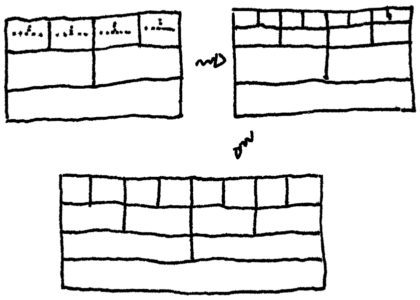
Continua

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.1
Prof: Eduardo Ochs
Segunda Prova ("P2")

Gabarito (cont.)

(7) $f \lesssim_{33} g \wedge g \lesssim_{33} h$ é verdade se e só se existirem reais positivos a' e b' tais que $f \lesssim_3 a'g \wedge g \lesssim_3 b'h$; e usando o teorema da questão anterior podemos concluir disto que $f \lesssim_3 a'b'h$. Como $a'b'$ é um real positivo, $f \lesssim_3 a'b'h$ implica em $f \lesssim_{33} h$; portanto $f \lesssim_{33} g \wedge g \lesssim_{33} h \to f \lesssim_{33} h$.

(8) Podemos obter cada F_{k+1} a partir da figura anterior, F_k, acrescentando à figura F_k um "$\perp$" em cada um dos quadrados da linha de cima do F_k e mudando as proporções um pouquinho; por exemplo:



(a) Cada figura F_k tem 2^k quadrados na sua linha de cima, e as mudanças de proporção não alteram o número de "$\square$"s e "$\perp$"s. Então:

$$F_0 = 1\square + 0\perp$$
$$F_1 = F_0 + 2^0\perp = 1\square + 1\perp$$
$$F_2 = F_1 + 2^1\perp = 1\square + 3\perp,$$
$$\vdots$$
$$F_{k+1} = F_k + 2^k\perp.$$

Como "$\square$" tem quatro segmentos e "$\perp$" tem dois, temos:

$$N_0 = 4,$$
$$N_{k+1} = N_k + 2^k \cdot 2 = N_k + 2^{k+1}.$$

(8b)
$N_0 = 4,$
$N_1 = N_0 + 2^1 = 6,$
$N_2 = N_1 + 2^2 = 10,$
$N_3 = N_2 + 2^3 = 18,$
$N_4 = N_3 + 2^4 = 34,$
$N_5 = N_4 + 2^5 = 66,$
$N_6 = N_5 + 2^6 = 130,$
$N_7 = N_6 + 2^7 = 258,$
$N_8 = N_7 + 2^8 = 514.$

(c) $N_K = \begin{cases} 4 & \text{quando } k=0, \\ N_{K-1} + 2^K & \text{quando } k>0. \end{cases}$

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR")
14/dezembro/2011

Na P2 apareceram as seguintes definições (com tipos implícitos - $a, k, x \in \mathbb{R}^+$, $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$):

$$f \le g \leftrightarrow f(x) \le g(x)$$
$$f \underset{a}{\le} g \leftrightarrow \forall x.\ a \le x \to f(x) \le g(x)$$
$$f \underset{\exists}{\le} g \leftrightarrow \exists a.\ \forall x.\ a \le x \to f(x) \le g(x)$$
$$f \underset{\exists\exists}{\le} g \leftrightarrow \exists a, k.\ \forall x.\ a \le x \to f(x) \le k\, g(x)$$

E "$f \underset{\exists\exists}{\le} g$" é uma outra notação para "$f = O(g)$".

<u>Teoremas:</u> $\forall f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\forall k \in \mathbb{R}^+$,

A) $f \le g \to f \underset{\exists}{\le} g$,

B) $f \underset{\exists}{\le} g \to f \underset{\exists\exists}{\le} g$,

C) $f \le g \land g \le h \to f \le h$,

D) $f \underset{\exists}{\le} g \land g \underset{\exists}{\le} h \to f \underset{\exists}{\le} h$,

E) $f \underset{\exists\exists}{\le} g \land g \underset{\exists\exists}{\le} h \to f \underset{\exists\exists}{\le} h$,

F) $[1] \underset{\exists}{\le} f \to g \underset{\exists}{\le} fg$

G) $f \underset{\exists\exists}{\le} h \land g \underset{\exists\exists}{\le} h \to (f+g) \le h$.

H) $[1] \underset{\exists}{\le} [x]$

I) $[1] \underset{\exists\exists}{\le} [k]$

J) $[k] \underset{\exists\exists}{\le} [1]$

Usando estes teoremas prove, em Fitch, que:

1) $[x] \underset{\exists\exists}{\le} [x^2]$ — 1,0 pontos

2) $[x^2] \underset{\exists\exists}{\le} [x^3]$ — 2,0 pontos

3) $[20x^2] \underset{\exists\exists}{\le} [99x^3]$ — 2,0 pontos

4) $[20x^2 + 99x^3] \underset{\exists\exists}{\le} [x^4]$ — 2,0 pontos

5) Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \ldots)$ a sequência: $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, \ldots)$. Dê uma definição formal, indutiva (ela vai incluir uma definição por casos e não vai ter reticências) para $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. — 3,0 pontos

6) Seja:
$$B_n = \begin{cases} 1 & \text{quando } n = 0, \\ B_{n-1} + 2^{n-1} & \text{quando } n > 0. \end{cases}$$
— 3,0 pontos

Prove (por indução) que $\forall n \in \mathbb{N}.\ B_n = 2^n$.

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR")
14/dezembro/2011

Lema K:

1 | $x \in \mathbb{R}^+$ (hip. temp.)
2 | $f(x) \leq f(x)$ (álgebra)
3 $\forall x \in \mathbb{R}^+ .\ f(x) \leq f(x)$ (por 1-2 e $\forall$-intro)
4 $f \leq f$ (por 3 e pela def de $\leq$)

Lema L:

1 | $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (hip. temp.)
2 | $f \leq f$ (pelo lema K)
3 $\forall f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ .\ f \leq f$ (por 1-2 e $\forall$-intro)

① 1 | $[1] \underset{\exists}{\leq} [x]$ (pelo teorema H)
2 | $[x] \underset{\exists}{\leq} [x][x]$ (por 1 e pelo teo. F, com $f=[x]$ e $g=[x]$)
3 | $[x] \underset{\exists}{\leq} [x^2]$ (por 2 e álgebra - $[x][x]=[x^2]$)
4 | $[x] \underset{\exists\exists}{\leq} [x^2]$ (por 3 e teo. B, com $f=[x]$ e $g=[x^2]$)

② 1 $[1] \underset{\exists}{\leq} [x]$
2 $[x^2] \underset{\exists}{\leq} [x][x^2]$
3 $[x^2] \underset{\exists}{\leq} [x^3]$
4 $[x^2] \underset{\exists\exists}{\leq} [x^3]$

Lema M:

1 | $a,b \in \mathbb{R}^+ \land f \underset{\exists\exists}{\leq} g$
2 | $a,b \in \mathbb{R}^+$
3 | $f \underset{\exists\exists}{\leq} g$
4 | $\exists k \in \mathbb{R}^+ .\ f \underset{\exists}{\leq} kg$
5 | $\exists k \in \mathbb{R}^+ .\ af \underset{\exists}{\leq} akg$
6 | $\exists k \in \mathbb{R}^+ .\ af \underset{\exists}{\leq} \frac{ak}{b} \cdot bg$
7 | $\exists k' \in \mathbb{R}^+ .\ af \underset{\exists}{\leq} k'bg$
8 | $af \underset{\exists\exists}{\leq} bg$
9 $a,b \in \mathbb{R}^+ \land f \underset{\exists\exists}{\leq} g \to af \underset{\exists\exists}{\leq} bg$

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2011.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova suplementar ("VS")
15/dezembro/2011

1) Prove que se $1 \underset{\exists}{\leq} f$ então $f \underset{\exists}{\leq} f^2$.

1,0 pontos

2) Explique porque você não pode deduzir que $f \underset{\exists}{\leq} f^2$ é verdade quando $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função qualquer.

2,0 pontos

3) Prove que se $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $f \underset{\exists}{\leq} g$ então $af \underset{\exists\exists}{\leq} bg$.

3,0 pontos

4) Prove que $[20x^2 + 30x] \underset{\exists\exists}{\leq} [x^2]$.

3,0 pontos

5) Dê uma definição formal, indutiva, para a seqüência

$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, \ldots)$
$= (0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, \ldots)$

3,0 pontos