MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
6/OUTUBRO/2010

PRIMEIRA PROVA ("P1")

(1) ENCONTRE UMA DEFINIÇÃO INDUTIVA PARA A FUNÇÃO "RESTO":

$$\begin{array}{rrcl} r: & \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ & \to & \mathbb{N} \\ & (n,d) & \mapsto & \text{o resto da divisão de } n \text{ por } d \end{array}$$

E TESTE A SUA DEFINIÇÃO MOSTRANDO QUE $r(20,6) = 2$.

3.5 PONTOS

(2) SUPONHA QUE $A = \{a_1, a_2, c_1, c_2\}$,
$B = \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$,
ONDE $a_1, a_2 \notin B$
E $b_1, b_2 \notin A$.
MOSTRE QUE:

$$\forall x \in A. (x \in B \to P(x)) \leftrightarrow \forall x \in A \cap B. P(x).$$

2.0 PONTOS

(3) MOSTRE QUE SE AS REGRAS DE REDUÇÃO "(α)" E "(β)" ABAIXO VALEM,

$$\forall x \in A. (x \in B \to P(x)) \overset{(\alpha)}{\rightsquigarrow} \forall x \in A \cap B. P(x)$$

$$\forall x \in \emptyset. P(x) \overset{(\beta)}{\rightsquigarrow} \mathbf{F}$$

ENTÃO TEMOS UMA SEQÜÊNCIA DE REDUÇÃO QUE PROVA QUE $\forall x \in A. (x \in B \to P(x))$ É VERDADEIRO E OUTRA QUE PROVA QUE $\forall x \in A. (x \in B \to P(x))$ É FALSO.

3.0 PONTOS

(4) UMA RELAÇÃO $R \subseteq A \times A$ É TRANSITIVA SE $\forall a,b,c \in A. (aRb \land bRc \to aRc)$.
SEJA $A = \{0,1,2,3\}$ E

$$R = \{(x,y) \in \{0,1,2,3\}^2 \mid x+1=y \lor x+2=y\}.$$

MOSTRE QUE $(R \text{ é transitiva}) \rightsquigarrow \mathbf{F}$.

3.0 PONTOS

(5) MOSTRE QUE $\{2\} = \{\{2\}\} \rightsquigarrow \mathbf{F}$.
(LEMBRE QUE QUANDO a E b SÃO DE "TIPOS DIFERENTES" – POR EXEMPLO, QUANDO a É UM NÚMERO E b É UMA LISTA – TEMOS $a=b \rightsquigarrow \mathbf{F}$).

1.5 PONTOS

(6) DIGAMOS QUE A SEQÜÊNCIA $(A_0, A_1, \ldots)$ É DADA POR:

$$A_n = \begin{cases} \emptyset & \text{quando } n=0, \\ \{1\} & \text{quando } n=1, \\ \{A_{n-1}\} \cup \{n\} & \text{quando } n \geq 2. \end{cases}$$

CALCULE A_4.

1.0 PONTOS

NA QUESTÃO 3 FALTOU UMA COISA NO ENUNCIADO: SUPONHA QUE $A = \{a_1, a_2\}$,
$B = \{b_1, b_2\}$,
$a_1, a_2 \notin B$,
$b_1, b_2 \notin A$.

A PROVA VALE BEM MAIS DE 10 PONTOS, ENTÃO ESCOLHA AS QUESTÕES QUE VOCÊ QUER FAZER E FAÇA-AS COM MUITO CUIDADO.
A CORREÇÃO IRÁ SE BASEAR NO QUE VOCÊ ESCREVEU, E É IMPOSSÍVEL LER O QUE VOCÊ PENSOU E NÃO ESCREVEU.
VOCÊ NÃO PRECISA APAGAR OU RISCAR OS SEUS RASCUNHOS - SÓ INDIQUE ONDE ESTÁ A RESPOSTA FINAL.
LEMBRE QUE A "RESPOSTA CERTA" PARA CADA PERGUNTA NÃO É UMA CONTINHA, EM GERAL... É UM RACIOCÍNIO CLARO E CONVINCENTE, COM TODOS OS DETALHES CERTOS NA PARTE EM MATEMATIQUÊS - INCLUSIVE A SINTAXE DAS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS, E COM EXPLICAÇÕES CLARAS EM PORTUGUÊS E DIAGRAMAS, MOSTRANDO QUE VOCÊ SABE USAR BEM CADA UMA DESSAS "LINGUAGENS".

A PROVA É PRA SER FEITA SEM CONSULTA A NADA ALÉM DA FOLHA MANUSCRITA COM ANOTAÇÕES QUE VOCÊ DEVE TER TRAZIDO DE CASA E QUE DEVERÁ SER ANEXADA À PROVA.
IDAS AO BANHEIRO SÓ SÃO PERMITIDAS NOS PRIMEIROS 30 MINUTOS DA PROVA.
VOCÊ PODE PERGUNTAR COISAS AO PROFESSOR DURANTE A PROVA, MAS NÃO PODE CONFIAR NAS RESPOSTAS.

RESPOSTAS PARECIDAS DEMAIS COM AS DE COLEGAS PODEM FAZER COM QUE A SUA PROVA SEJA ANULADA... PORTANTO NÃO COLE DE JEITO NENHUM E SEMPRE ESCREVA PELO MENOS UM POUCO DE PORTUGUÊS EM CADA RESPOSTA!

BOA PROVA!

(AH, E POR FAVOR NÃO ESCREVA NO CANTO SUPERIOR ESQUERDO DE CADA FOLHA - AS FOLHAS SERÃO GRAMPEADAS).

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
<u>GABARITO DA P1</u>
(QUE ACONTECEU EM 6/OUT/2010)

(1) UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO $r(n,d)$:

5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$d=1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0 $=n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

DUAS DEFINIÇÕES POSSÍVEIS PARA $r(n,d)$; E VERIFICAÇÕES DE QUE $r(20,6)=2$:

(I) $r(n,d) = \begin{cases} n & \text{se } n<d, \\ r(n-d,d) & \text{se } n \geq d. \end{cases}$

$r(20,6) = r(20-6,6) = r(14,6)$
$r(14,6) = r(14-6,6) = r(8,6)$
$r(8,6) = r(8-6,6) = r(2,6) = 2.$

(II) $\cancel{r(n,d) = \begin{cases} r(n-1,d)+1 & \text{se } r(n-1,d)+1<d, \\ 0 & \text{se } r(n-1,d)+1=d \end{cases}}$

$\cancel{r(0,6)} =$

$r(n,d) = \begin{cases} 0 & \text{se } n=0, \\ r(n-1,d)+1 & \text{se } n>0 \text{ e } r(n-1,d)+1<d, \\ 0 & \text{se } n>0 \text{ e } r(n-1,d)+1 \geq d. \end{cases}$

Aí: $r(0,6)=0$
$r(1,6) = r(0,6)+1 = 1$
$r(2,6) = 2$
$\vdots$
$r(5,6) = 5$
$r(6,6) = 0$
$r(7,6) = 1$
$\vdots$
$r(11,6) = 5$
$r(12,6) = 0$
$\vdots$
$r(18,6) = 0$
$r(19,6) = 1$
$r(20,6) = 2$

(2) $\forall x \in A.\,(x \in B \to P(x))$ $\quad$ $\forall x \in A \cap B.\, P(x)$

$\leadsto$

$(a_1 \in B \to P(a_1)) \wedge$
$(a_2 \in B \to P(a_2)) \wedge$
$(c_1 \in B \to P(c_1)) \wedge$
$(c_2 \in B \to P(c_2))$

$\leadsto$

$(\mathbf{F} \to P(a_1)) \wedge$
$(\mathbf{F} \to P(a_2)) \wedge$
$(\mathbf{V} \to P(c_1)) \wedge$
$(\mathbf{V} \to P(c_2))$

$\leadsto$

$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge P(c_1) \wedge P(c_2) \leadsto P(c_1) \wedge P(c_2)$

$\forall x \in A \cap B.\, P(x) \leadsto \forall x \in \{c_1, c_2\}.\, P(x) \leadsto P(c_1) \wedge P(c_2)$

(3) $\forall x \in A.\,(x \in B \to P(x)) \overset{(\alpha)}{\leadsto} \forall x \in A \cap B.\, P(x)$

$\leadsto$

$(a_1 \in B \to P(a_1)) \wedge$
$(a_2 \in B \to P(a_2))$

$\leadsto$

$(\mathbf{F} \to P(a_1)) \wedge$
$(\mathbf{F} \to P(a_2))$

$\leadsto$

$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \leadsto \mathbf{V}$

$\forall x \in A \cap B.\, P(x) \leadsto \forall x \in \{a_1, a_2\} \cap \{b_1, b_2\}.\, P(x) \leadsto \forall x \in \varnothing.\, P(x) \overset{(\beta)}{\leadsto} \mathbf{F}$

(4) $R = \{(x,y) \in \{0,1,2,3\}^2 \mid x+1=y \vee x+2=y\}$
$= \{ (0,1), (0,2), (1,2), (1,3), (2,3) \}.$

GRAFICAMENTE:

$$R = \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & 1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & 2 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

SE $a=0$, $b=1$, $c=3$
ENTÃO $aRb \wedge bRc \to aRc$

$\leadsto$

$0R1 \wedge 1R3 \to 0R3$

$\leadsto$

$\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \to \mathbf{F}$

$\leadsto$

$\mathbf{V} \to \mathbf{F}$

$\leadsto$

$\mathbf{F}$;

ENTÃO (R É TRANSITIVA)

$\leadsto$ (PELA DEF)

$(\forall a,b,c \in \{0,1,2,3\}.\ aRb \wedge bRc \to aRc)$

$\leadsto$ (PORQUE QUANDO $a=0, b=1, c=3$ TEMOS $aRb \wedge bRc \to aRc \leadsto \mathbf{F}$).

$\mathbf{F}.$

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
<u>Gabarito da P1 (cont.)</u>

(5) $\{2\} = \{\{2\}\}$

$$\Updownarrow$$

$$\{2\} \subseteq \{\{2\}\} \wedge \{\{2\}\} \subseteq \{2\}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall a \in \{2\}.\, a \in \{\{2\}\}) \wedge (\forall b \in \{\{2\}\}.\, b \in \{2\})$$

$$\Updownarrow$$

$$(2 \in \{\{2\}\}) \wedge (\{2\} \in \{2\})$$

$$\Updownarrow$$

$$(2 = \{2\}) \wedge (\{2\} = 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$F \wedge F$$

$$\Updownarrow$$

$$F$$

(6) $A_n = \begin{cases} \emptyset & \text{quando } n=0, \\ \{1\} & \text{quando } n=1, \\ \{A_{n-1}\} \cup \{n\} & \text{quando } n \geq 2 \end{cases}$

$A_0 = \emptyset$

$A_1 = \{1\}$

$A_2 = \{A_1\} \cup \{2\} = \{\{1\}\} \cup \{2\} = \{\{1\}, 2\}$

$A_3 = \{A_2\} \cup \{3\}$
$\quad = \{\{\{1\}, 2\}\} \cup \{3\}$
$\quad = \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$

$A_4 = \{A_3\} \cup \{4\}$
$\quad = \{\{\{\{1\}, 2\}, 3\}\} \cup \{4\}$
$\quad = \{\{\{\{1\}, 2\}, 3\}, 4\}$