

MATEMÁTICA DISCRETA
 PURO/UFF - 2011.1
 PROF: EDUARDO OCHS
 PRIMEIRA PROVA ("P1")
 3/JUNHO/2011

Nim

AO CONTRÁRIO DE JOGOS COMO O JOGO DA VELHA, EM QUE UM JOGADOR MARCA "O"s E OUTRO MARCA "X"s, O NIM É UM JOGO SIMÉTRICO: OS DOIS JOGADORES SE ALTERNAM FAZENDO JOGADAS DO MESMO TIPO. INICIALMENTE OS DOIS JOGADORES DECIDEM DE COMUM ACORDO QUANTOS PALITOS ELES VÃO PÔR EM CIMA DA MESA, DEPOIS EM CADA JOGADA CADA UM DELES TIRA OU UM OU DOIS PALITOS. QUEM NÃO PUDE MAIS JOGAR - PORQUE NÃO SOBROU MAIS PALITO NENHUM - PERDEU.

FATO: SE O JOGO COMEÇAR COM 10 PALITOS SOBRE A MESA O PRIMEIRO JOGADOR TEM UMA ESTRATÉGIA QUE LHE PERMITE GANHAR SEMPRE.

VAMOS VER COMO DEFINIR ESTA ESTRATÉGIA MATEMATICAMENTE.

SEJA $P_0 = 10$ A POSIÇÃO INICIAL.

SEJA $jogs: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$n \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{se } n=0 \\ \{0\} & \text{se } n=1 \\ \{n-2, n-1\} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

A FUNÇÃO QUE DIZ O CONJUNTO DAS JOGADAS POSSÍVEIS (ISTO É, DAS POSIÇÕES SEGUINTESS POSSÍVEIS) A PARTIR DE CADA POSIÇÃO.

AGORA VAMOS DEFINIR INDUTIVAMENTE O CONJUNTO DAS POSIÇÕES ACESSÍVEIS A PARTIR DA POSIÇÃO INICIAL, P .

A SEQUÊNCIA (P_0, P_1, P_2, \dots) É DEFINIDA POR:

$$P_0 = \{P_0\} \wedge$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. P_{n+1} = P_n \cup \bigcup_{P' \in jogs(P)} P'$$

E DEFINIMOS:

$$P = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots$$

AGORA DEFINIMOS:

$$venc: P \rightarrow \{V, F\}$$

$$P \mapsto (\exists Q \in jogs(P). venc(Q) = F)$$

E UMA ESTRATÉGIA VENCEDORA É UMA FUNÇÃO

$$estr: \{P \in P \mid venc(P) = F\} \rightarrow \{P' \in P \mid venc(P') = V\}$$

QUE OBEDECE:

$$\forall P \in \{P \in P \mid venc(P) = F\}$$

$$\exists P' \in \{P' \in P \mid venc(P') = V\}. estr(P) \in jogs(P).$$

① MOSTRE QUE $P_5 = P_6$. 1.0 PONTOS

② CALCULE P . 1.0 PONTOS

③ CALCULE $venc(0), venc(1), venc(2),$ 2.0 PONTOS
 $venc(3)$ E $venc$.

④ PARA REPRESENTAR O NIM COMO UM GRAFO DIRECIONADO, FAZEMOS:

$$R = \{(P, Q) \in P \mid Q \in jogs(P)\}.$$

REPRESENTA GRAFICAMENTE (P, R) . 1.0 PONTOS

⑤ NO CASO DO NIM EXISTE UMA ÚNICA 2.0 PONTOS
 ESTRATÉGIA VENCEDORA estr.
 EXIBA-A EXPLICITAMENTE.

O JOGO DOS DIVISORES DE 12

VAMOS DENOTAR POR \mathcal{D}_n O CONJUNTO DOS DIVISORES DE n . NESTE JOGO A POSIÇÃO INICIAL VAI SER

$$P_0 = \mathcal{D}_{12} = \{1, 2, 4, 3, 6, 12\}$$

E AS JOGADAS VÁLIDAS SÃO DA SEGUINTE FORMA: SE A POSIÇÃO ATUAL É UM CONJUNTO A ENTÃO PODEMOS ESCOLHER QUALQUER $a \in A$, DESDE QUE

$a \neq 1$; AÍ A POSIÇÃO SEGUINTE VAI

SER O CONJUNTO A MENOS TODOS OS MÚLTIPLOS DE a . POR EXEMPLO,

SE $A = \{1, 2, 4, 3\}$ ENTÃO

$$jogs(A) = \{\{1, 2, 3\},$$

$$\{1, 2, 4\},$$

$$\{1, 3\}\}.$$

← AQUI, TIRAMOS OS MÚLTIPLOS DE 4,

← AQUI OS DE 3,

← AQUI OS DE 2.

⑥ CALCULE $venc(\{1, 2, 3, 6\})$. 1.0 PONTOS

⑦ DEFINA \mathcal{D}_n EM MATEMÁTICINHAS PURO. 1.0 PONTOS

⑧ DEFINA $jogs(A)$ — PARA O JOGO 3.0 PONTOS
 DOS DIVISORES DE 12 — EM MATEMÁTICINHAS PURO. NESTA QUESTÃO E NA ANTERIOR NÃO SE ESQUEÇA DE TESTAR AS SUAS DEFINIÇÕES!

(PRA CASA: CALCULE P, R E $venc$ PARA O JOGO DOS DIVISORES DE 12; REPRESENTA (P, R) GRAFICAMENTE, ENCONTRE UMA ESTRATÉGIA VENCEDORA E USE-A PARA GANHAR DOS SEUS COLEGAS QUE OU NÃO CONSEGUIRAM DESCOBRIR A ESTRATÉGIA OU CALCULARAM ELA ERRADO.)

GABARITO

① SABEMOS QUE:

$$P_0 = \{P_0\} = \{10\},$$

$$P_1 = P_0 \cup \bigcup_{P \in P_0} \text{jogs}(P),$$

$$P_2 = P_1 \cup \bigcup_{P \in P_1} \text{jogs}(P),$$

ETC; ENTÃO

$$P_1 = \{10\} \cup \bigcup_{P \in \{10\}} \text{jogs}(P)$$

$$= \{10\} \cup \text{jogs}(10)$$

$$= \{10\} \cup \{10-2, 10-1\}$$

$$= \{10, 9, 8\},$$

$$P_2 = \{10, 9, 8\} \cup \bigcup_{P \in \{10, 9, 8\}} \text{jogs}(P)$$

$$= \{10, 9, 8\} \cup \text{jogs}(10) \cup \text{jogs}(9) \cup \text{jogs}(8)$$

$$= \{10, 9, 8\} \cup \{8, 7\} \cup \{7, 6\}$$

$$= \{10, 9, 8, 7, 6\},$$

$$P_3 = \{10, \dots, 6\} \cup \text{jogs}(10) \cup \dots \cup \text{jogs}(6)$$

$$= \{10, \dots, 4\}$$

$$P_4 = \{10, \dots, 4\} \cup \text{jogs}(10) \cup \dots \cup \text{jogs}(4)$$

$$= \{10, \dots, 2\}$$

$$P_5 = \{10, \dots, 2\} \cup \text{jogs}(10) \cup \dots \cup \text{jogs}(2)$$

$$= \{10, \dots, 0\}$$

$$P_6 = \{10, \dots, 0\} \cup \text{jogs}(10) \cup \dots \cup \text{jogs}(2) \cup \text{jogs}(1) \cup \text{jogs}(0)$$

$$= \{10, \dots, 0\} \cup \{9, 8\} \cup \{8, 7\} \cup \dots \cup \{1, 0\} \cup \{0\} \cup \emptyset$$

$$= \{10, \dots, 0\}$$

$$\text{DAÍ } P_5 = P_6 = \{10, \dots, 0\}.$$

② O MESMO ARGUMENTO QUE USAMOS PRA CALCULAR P_6 E VER QUE $P_6 = P_5$ VALE PARA P_7, P_8, \dots POR EXEMPLO:

$$P_7 = \{10, \dots, 0\} \cup \text{jogs}(10) \cup \dots \cup \text{jogs}(0)$$

$$= \{10, \dots, 0\}.$$

ENTÃO:

$$P = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots$$

$$= \{10\} \cup \{10, \dots, 8\} \cup \{10, \dots, 6\} \cup \{10, \dots, 4\} \cup \dots$$

$$= \{10, \dots, 0\}.$$

$$\textcircled{3} \text{ venc}(0) = (\exists Q \in \text{jogs}(0). \text{venc}(Q) = F)$$

$$= (\exists Q \in \emptyset. \text{venc}(Q) = F)$$

$$= F$$

$$\text{venc}(1) = (\exists Q \in \text{jogs}(1). \text{venc}(Q) = F)$$

$$= (\exists Q \in \{0\}. \text{venc}(Q) = F)$$

$$= (\text{venc}(0) = F)$$

$$= (F = F)$$

$$= V$$

③ (CONT)

$$\text{venc}(2) = (\exists Q \in \text{jogs}(2). \text{venc}(Q) = F)$$

$$= (\exists Q \in \{0, 1\}. \text{venc}(Q) = F)$$

$$= (\text{venc}(0) = F \vee \text{venc}(1) = F)$$

$$= (F = F \vee V = F)$$

$$= (V \vee F)$$

$$= V$$

$$\text{venc}(3) = (\text{venc}(1) = F \vee \text{venc}(2) = F)$$

$$= (V = F \vee V = F)$$

$$= F \vee F$$

$$= F$$

$$\text{venc}(4) = (\text{venc}(2) = F \vee \text{venc}(3) = F)$$

$$= (V = F \vee F = F)$$

$$= F \vee V$$

$$= V$$

$$\text{venc}(5) = (\text{venc}(3) = F \vee \text{venc}(4) = F)$$

$$= (F = F \vee V = F)$$

$$= V$$

$$\text{venc}(6) = (\text{venc}(4) = F \vee \text{venc}(5) = F)$$

$$= (V = F \vee V = F)$$

$$= F$$

$$\text{venc}(7) = (V = F \vee F = F) = V$$

$$\text{venc}(8) = (F = F \vee V = F) = V$$

$$\text{venc}(9) = (V = F \vee V = F) = F$$

$$\text{venc}(10) = (V = F \vee F = V) = V$$

PODEMOS DAR UMA DEFINIÇÃO EXPLÍCITA DA FUNÇÃO venc USANDO UMA DEFINIÇÃO POR CASOS,

$$\text{venc}: P \rightarrow \{V, F\}$$

$$P \mapsto F \text{ QUANDO } P \in \{0, 3, 6, 9\},$$

$$V \text{ QUANDO } P \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$$

OU:

$$\text{venc} = \{(0, F), (1, V), (2, V),$$

$$(3, F), (4, V), (5, V),$$

$$(6, F), (7, V), (8, V),$$

$$(9, F), (10, V)\}$$

JÁ QUE FUNÇÕES SÃO RELAÇÕES

E RELAÇÕES SÃO CONJUNTOS DE PARES.

$$\textcircled{4} R = \{(P, Q) \mid P \in P, Q \in \text{jogs}(P)\}$$

$$= \{(10, 9), (10, 8), (9, 8), (9, 7), (8, 7), (8, 6),$$

$$(7, 6), (7, 5), (6, 5), (6, 4), (5, 4), (5, 3),$$

$$(4, 3), (4, 2), (3, 2), (3, 1), (2, 1), (2, 0),$$

$$(1, 0)\}$$

$$(P, R) = 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

$$\textcircled{5} \text{ Como } \{P \in P \mid \text{venc}(P) = F\} = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$\text{E } \{P \in P \mid \text{venc}(P) = V\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$$

ESTAMOS PROCURANDO UMA FUNÇÃO

$$\text{estr}: \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} \rightarrow \{0, 3, 6, 9\}$$

QUE OBEDEÇA

$$\forall P \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}. \text{estr}(P) \in \text{jogs}(P),$$

ISTO É, QUE OBEDEÇA

$$\text{estr}(1) \in \{0\} \wedge \text{estr}(2) \in \{1, 0\} \wedge$$

$$\text{estr}(4) \in \{3, 2\} \wedge \text{estr}(5) \in \{4, 3\} \wedge$$

$$\text{estr}(7) \in \{6, 5\} \wedge \text{estr}(8) \in \{7, 6\} \wedge \text{estr}(10) \in \{9, 8\}.$$

A ÚNICA SOLUÇÃO POSSÍVEL É:

$$\text{estr} = \{(1, 0), (2, 0), (4, 3), (5, 3), (7, 6), (8, 6), (10, 9)\}.$$

GABARITO (CONT.)

⑥ $\text{venc}(\{1,2,3,6\}) =$
 $= (\exists Q \in \text{jogs}(\{1,2,3,6\}). \text{venc}(Q) = F)$
 $= (\exists Q \in \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}. \text{venc}(Q) = F)$
 $= (\text{venc}(\{1,2\}) = F) \vee (\text{venc}(\{1,3\}) = F) \vee (\text{venc}(\{1,2,3\}) = F)$
 $\text{venc}(\{1,2\}) =$
 $= (\exists Q \in \text{jogs}(\{1,2\}). \text{venc}(Q) = F)$
 $= (\text{venc}(\{1\}) = F)$
 $\text{venc}(\{1,3\}) =$
 $= (\text{venc}(\{1\}) = F)$
 $\text{venc}(\{1,2,3\}) =$
 $= (\text{venc}(\{1,2\}) = F) \vee (\text{venc}(\{1,3\}) = F)$
 $\text{venc}(\{1\}) =$
 $= (\exists Q \in \text{jogs}(\{1\}). \text{venc}(Q) = F)$
 $= (\exists Q \in \emptyset. \text{venc}(Q) = F)$
 $= F$
 $\text{venc}(\{1,2\}) = (F = F) = V$
 $\text{venc}(\{1,3\}) = (F = F) = V$
 $\text{venc}(\{1,2,3\}) = (V = F) \vee (V = F) = F$
 $\text{venc}(\{1,2,3,6\}) = (V = F) \vee (V = F) \vee (F = V) = V$

⑦ Uma possibilidade:
 $\downarrow n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid n\}$
 OUTRA:
 $\downarrow n = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid k \mid n\}$
 OUTRA:
 $\downarrow n = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid \exists a \in \{1, \dots, n\}. ak = n\}$

⑧ Aqui é melhor usar uma definição intermediária:
 $\text{mults}(a, n) = \{m \in \{1, \dots, n\} \mid a \mid m\}$
 Por exemplo, $\text{mults}(2, 6) = \{2, 4, 6\}$ -
 Note que $\text{mults}(a, n)$ pode incluir elementos que não pertencem a $\downarrow n$.
 Agora:

$$\text{jogs}(A) = \{A \setminus \text{mults}(a, 12) \mid a \in A, a \neq 1\}$$

Um teste: se $A = \{1, 2, 4, 3, 6, 12\}$ então

$$\begin{aligned} \text{jogs}(\{1, 2, 4, 3, 6, 12\}) &= \\ &= \{A \setminus \text{mults}(2, 12), \\ &\quad A \setminus \text{mults}(3, 12), \\ &\quad A \setminus \text{mults}(4, 12), \\ &\quad A \setminus \text{mults}(6, 12), \\ &\quad A \setminus \text{mults}(12, 12)\} \\ &= \{\{1, 3\}, \\ &\quad \{1, 2, 4\}, \\ &\quad \{1, 2, 3, 6\}, \\ &\quad \{1, 2, 3, 4\}, \\ &\quad \{1, 2, 3, 4, 6\}\} \end{aligned}$$

Aqui, vão algumas dicas pra quem for tentar entender em casa a estratégia pro jogo dos divisores de 12.

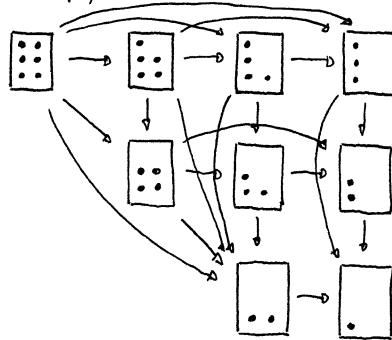
Se escrevermos $\downarrow 12 = \{4, 12, 2, 6, 1, 3\}$

E escrevermos subconjuntos de $\downarrow 12$ mantendo sempre esta convenção para a posição dos elementos - por exemplo, escreveremos $\{1, 2, 3, 4\}$ como $\begin{bmatrix} 4, \\ 2, \\ 1, 3 \end{bmatrix}$

E além disto representarmos subconjuntos de $\downarrow 12$ como retângulos 2×3 com bolinhas pretas indicando os elementos presentes, por exemplo,

$$\{1, 2, 3, 4\} = \begin{bmatrix} 4, \\ 2, \\ 1, 3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}$$

Então (P, R) vai ser esta figura:



E o diagrama abaixo mostra as posições vencedoras e perdedoras (i.e., a função venc) e a única estratégia vencedora possível:

