

① SEJA  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  A FUNÇÃO QUE OBEDECE:

$$\forall k \in \mathbb{N}. f(2k) = k$$

$$\wedge \forall k \in \mathbb{N}. f(2k+1) = 3(2k+1) + 1.$$

(a) CALCULE  $f(1), f(2), \dots, f(10)$  E  $f(0)$ . 1.0 PTS

(b) CALCULE  $f^{-1}(6), f^{-2}(6), \dots, f^{-12}(6)$ , ONDE:  $f^0(a) = a$ ,  $f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$ . 1.0 PTS

(c) DEFINA FORMALMENTE UMA FUNÇÃO  $C$  QUE RECEBE UM  $k \in \mathbb{N}$  E RETORNA A LISTA  $(k, f(k), f^2(k), \dots, 1)$ . 2.0 PTS

② CALCULE PASSO A PASSO O VALOR DE  $\{3, 4\} = \{4, 3, 4\}$ . 1.0 PTS

LEMBRANDO QUE A IGUALDADE ENTRE CONJUNTOS É DEFINIDA POR:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

E QUE:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x \in X. x \in Y$$

E QUE QUANDO  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ , TEMOS:

$$c \in D \Leftrightarrow c = d_1 \vee \dots \vee c = d_n.$$

③ UM DOS PROBLEMAS DE INDUÇÃO DO LIVRO DA JUDITH É: 4.0 PTS

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

DEFINA FORMALMENTE AS SEQUÊNCIAS

$A(1), A(2), \dots$  E  $B(1), B(2), \dots$

PARA TRANSFORMAR ESTE PROBLEMA NUM PROBLEMA DA FORMA

$$\forall n \in \mathbb{N}. A(n) = B(n)$$

E PROVE O PASSO DE INDUÇÃO,

$$\forall n \in \mathbb{N}. A(n) = B(n) \rightarrow A(n+1) = B(n+1)$$

DE FORMA QUE CADA UMA DAS SUAS IGUALDADES SEJA MUITO FÁCIL DE JUSTIFICAR.

④ SEJA  $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  2.0 PTS

$$(a, b) \mapsto a \# b,$$

ONDE O "#" É A OPERAÇÃO DE CONCATENAÇÃO QUE VIMOS EM

SALA. SEJA

$$G: (\mathbb{N} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N})) \times (\mathbb{N} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow (\mathbb{N} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

A FUNÇÃO DEFINIDA POR:

I  $G(a, b) = g(a, b)$  QUANDO  $a, b \in \mathbb{N}$ ,

II  $G(a, B) = \{g(a, b) \mid b \in B\}$  QUANDO  $a \in \mathbb{N}$  E  $B \subseteq \mathbb{N}$ ,

III  $G(A, b) = \{g(a, b) \mid a \in A\}$  QUANDO  $A \subseteq \mathbb{N}$  E  $b \in \mathbb{N}$ ,

IV  $G(A, B) = \{g(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  QUANDO  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ .

CALCULE PASSO A PASSO

$$G(\{12, 3\}, G(4, \{5, 67\})).$$