Matemática Discreta
Segunda Prova ("P2") - 2010.2
PURO/UFF - Prof: Eduardo Ochs
29/nov/2010

(1) (Esta questão serve como uma introdução à terceira parte do curso.)

Lembre que uma <u>função</u> $f: A \to B$ está definida sobre o seu domínio, A, e mais em lugar nenhum (isto é, se $x \notin A$ então $f(x)$ não está definida)... Mas <u>operações</u> são mais livres que funções, e podemos "aumentar o domínio" de operações - por exemplo, começamos aprendendo que o "+" é uma operação sobre números, mas depois definimos como somar vetores e matrizes.

Vamos definir o "produto" e a "inversa" de vetores de $\mathbb{R}^2$ desta forma:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$(a_1, a_2)^{-1} = (-a_1, -a_2)$$

Então, por exemplo,

$$(3,4) \cdot (5,6) = (3+5, 4+6) = (8, 10),$$
e:
$$(1,2)^{-1} = (-1,-2).$$

Dizemos que um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é <u>fechado pelo produto</u> quando

$$\forall \alpha, \beta \in C.\ \alpha \cdot \beta \in C,$$

e dizemos que um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é <u>fechado pela inversa</u> quando:

$$\forall \alpha \in C.\ \alpha^{-1} \in C.$$

Digamos que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que é fechado pelo produto e pela inversa. Podemos representar estas propriedades de D por estas regras de dedução:

$$\frac{(a_1,a_2) \in D \quad (b_1,b_2) \in D}{(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2) \in D}\,\text{FP}$$

$$\frac{(a_1,a_2) \in D}{(a_1,a_2)^{-1} \in D}\,\text{FI}$$

Vamos tentar entender quais são as conseqüências de D ser fechado por produto e inversa.

$\boxed{2.0\text{ pts}}$ (1a) Prove os seguintes lemas:

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(3,3) \in D}\,\text{La}$$

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-1,1) \in D}\,\text{Lb}$$

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-2,2) \in D}\,\text{Lc}$$

$$\frac{(1,2) \in D \quad (2,1) \in D}{(-5,5) \in D}\,\text{Ld}$$

$\boxed{2.0\text{ pts}}$ (1b) Transforme a prova em árvore que você obteve para o lema Ld numa prova linha-a-linha.

$\boxed{2.0\text{ pts}}$ (1c) Prove os seguintes lemas:

$$\frac{(a_1,a_2) \in D}{(2a_1, 2a_2) \in D}\,L_2$$

$$\frac{(a_1,a_2) \in D}{(4a_1, 4a_2) \in D}\,L_4$$

$$\frac{(a_1,a_2) \in D}{(-10a_1, -10a_2) \in D}\,L_{-10}$$

$$\frac{(a_1,a_2) \in D \quad (b_1,b_2) \in D}{(3a_1 - 4b_1, 3a_2 - 4b_2) \in D}\,L_{3,4}$$

$\boxed{1.0\text{ pts}}$ (1d) Mostre que o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ não é fechado por produto e inversa.

(2) Sejam $(a_0, a_1, \ldots)$, $(b_0, b_1, \ldots)$ e $(c_0, c_1, \ldots)$ as seqüências definidas por:

$a_0 = 1,$
$\forall n \in \mathbb{N}.\ a_{n+1} = a_n + 3,$
$\forall n \in \mathbb{N}.\ b_n = (n+1)(3n+2)$
$c_0 = a_0,$
$\forall n \in \mathbb{N}.\ c_{n+1} = c_n + a_{n+1}$

Prove que:

$\boxed{0.2\text{ pts}}$ (2a) $a_0 = 1 + 3 \cdot 0$

$\boxed{2.0\text{ pts}}$ (2b) $(a_n = 1 + 3n) \to (a_{n+1} = 1 + 3(n+1))$

(Uma regra que não tivemos tempo de ver direito em aula nos permite deduzir a partir de 2a e 2b que $\forall n \in \mathbb{N}.\ a_n = 1 + 3n$).

$\boxed{0.3\text{ pts}}$ (2c) $b_0 = 2c_0$

$\boxed{2.5\text{ pts}}$ (2d) $b_n = 2c_n \to b_{n+1} = 2c_{n+1}$

A correção será feita pela tia Stephania.
Passe a limpo as suas respostas!
As outras regras são as mesmas de sempre.
Boa prova!

Matemática Discreta
Segunda Prova ("P2") - 2010.2
PURO/UFF - Prof: Eduardo Ochs
1º/dez/2010

Gabarito da P2

(1a) Lema:

$$\dfrac{(1,2)\in D \quad (2,1)\in D}{(3,3)\in D}\,La$$

Demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(1,2)\in D \quad (2,1)\in D}{(1,2)\cdot(2,1)\in D}\,FP}{(1+2,2+1)\in D}\,\text{DEF}}{(3,3)\in D}$$

Lema:

$$\dfrac{(1,2)\in D \quad (2,1)\in D}{(-1,1)\in D}\,Lb$$

Demonstração:

$$\dfrac{(1,2)\in D \quad \dfrac{\dfrac{(2,1)\in D}{(2,1)^{-1}\in D}\,FI}{(-2,-1)\in D}\,\text{DEF}}{(-1,1)\in D}\,FP$$

Lema:

$$\dfrac{(1,2)\in D \quad (2,1)\in D}{(-2,2)\in D}\,Lc$$

Demonstração:
Podemos provar primeiro o lema L_2, e aí:

$$\dfrac{\dfrac{(1,2)\in D \quad (2,1)\in D}{(-1,1)\in D}\,Lb}{(-2,2)\in D}\,L_2$$

Lema:

$$\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(5a_1,5a_2)\in D}\,L_5$$

Demonstração:
Provamos L_4, e aí:

$$\dfrac{\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(4a_1,4a_2)\in D}\,L_4 \quad (a_1,a_2)\in D}{(5a_1,5a_2)}\,FP$$

Lema:

$$\dfrac{(1,2)\in D \quad (2,1)\in D}{(-5,5)\in D}\,Ld$$

Demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{(1,2)\in D \quad (2,1)\in D}{(-1,1)\in D}\,Lb}{(-5,5)\in D}\,L_5$$

(1b)
1) Suponha que $(1,2)\in D$.
2) Suponha que $(2,1)\in D$.
3) Então $(-1,1)\in D$ (por (1), (2) e por Lb),
4) e $(-5,5)\in D$ (por (3) e L_5, com $a_1=-1$ e $a_2=1$).

(1c) Lema:

$$\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(2a_1,2a_2)\in D}\,L_2$$

Demonstração:

$$\dfrac{(a_1,a_2)\in D \quad (a_1,a_2)\in D}{(2a_1,2a_2)\in D}\,FP$$

Lema:

$$\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(4a_1,4a_2)\in D}\,L_4$$

Demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(2a_1,2a_2)\in D}\,L_2}{(4a_1,4a_2)\in D}\,L_2$$

Lema:

$$\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(-10a_1,-10a_2)\in D}\,L_{-10}$$

Demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(4a_1,4a_2)\in D}\,L_4}{(8a_1,8a_2)\in D}\,L_2 \quad \dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(2a_1,2a_2)\in D}\,L_2}{(10a_1,10a_2)\in D}\,FP}{(-10a_1,-10a_2)\in D}\,FI$$

Lema:

$$\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(3a_1,3a_2)}\,L_3$$

Demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(2a_1,2a_2)\in D}\,L_2 \quad (a_1,a_2)\in D}{(3a_1,3a_2)\in D}\,FP$$

Lema:

$$\dfrac{(a_1,a_2)\in D \quad (b_1,b_2)\in D}{(3a_1-4b_1,3a_2-4b_2)\in D}\,L_{3,-4}$$

Demonstração:

$$\dfrac{\dfrac{(a_1,a_2)\in D}{(3a_1,3a_2)\in D}\,L_3 \quad \dfrac{\dfrac{(b_1,b_2)\in D}{(4b_1,4b_2)\in D}\,L_4}{(-4b_1,-4b_2)\in D}\,FI}{(3a_1-4b_1,3a_2-4b_2)\in D}\,FP$$

(1d) Sabemos que $(2,3)\in E$.
Seja $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$.
Se E for fechado por inversa, então $(2,3)^{-1}=(-2,-3)$ também tem que pertencer a E. Mas $(-2,-3)$ não pertence a E, então E não é fechado por inversa.

(2a) $a_0 = 1 = 1+3\cdot 0$

(2b)
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n+3 \\ &= (1+3n)+3 \\ &= 1+3(n+1) \end{aligned}$$

(2c)
$$\begin{aligned} b_0 &= (0+1)(3\cdot 0+2) \\ &= 2 \\ &= 2a_0 \\ &= 2c_0 \end{aligned}$$

(2d)
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= ((n+1)+1)(3(n+1)+2) \\ &= (n+2)(3n+5) \\ &= 3n^2+11n+10 \\ &= (3n^2+5n+2)+6n+8 \\ &= b_n+6n+8 \\ &= 2c_n+6n+8 \\ &= 2(c_n+3n+4) \\ &= 2(c_n+1+3(n+1)) \\ &= 2(c_n+a_{n+1}) \\ &= 2c_{n+1} \end{aligned}$$