

PROVE POR EXAUSTÃO QUE:

①  $\forall P, Q \in \{V, F\}. ((P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P)$

ISTO É "P".

1,0  
PONTOS

②  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow x^2 < 100$

1,0  
PONTOS

CONSIDERE A SEGUINTE DEMONSTRAÇÃO, EM "PORTUGUÊS FORMALIZÁVEL":

SUPONHA QUE  $a$  É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO. ENTÃO EXISTEM INTEIROS  $x$  E  $y$  TAIS QUE  $a = 2x$  E  $a = 2y + 1$ , E TEMOS  $2x = 2y + 1$  E  $1 = 2x - 2y = 2(x - y)$ ; PORTANTO  $x - y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , MAS COMO  $x, y \in \mathbb{Z}$  TEMOS  $x - y \in \mathbb{Z}$ , UMA CONTRADIÇÃO.

ELA USA AS SEGUINTE DEFINIÇÕES:

$a$  É PAR  $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}. a = 2x$

$a$  É ÍMPAR  $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z}. a = 2y + 1$

③ TRADUZA PARA MATEMÁTICQVÊS PURO "a É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO" E TESTE A SUA DEFINIÇÃO CALCULANDO:

2,0  
PONTOS

"42 É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO",

"-43 É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO" E

"3.14 É UM INTEIRO QUE É PAR E ÍMPAR AO MESMO TEMPO".

④ PARA ENCURTAR A SOLUÇÃO DOS PRÓXIMOS ITENS DÊ UMA (BOA) DEFINIÇÃO FORMAL PARA "a É PAR-E-ÍMPAR".

1,0  
PONTOS

⑤ NÓS USAMOS SEQUENTES EM SALA DE AULA PRA ENTENDER CERTAS DEMONSTRAÇÕES DO LIVRO; POR EXEMPLO,

1,0  
PONTOS

$x > 0, y > 0 \vdash xy > 0$

E LIDO COMO:

"SEMPRE QUE AS HIPÓTESES  $x > 0$  E  $y > 0$  FOREM VERDADEIRAS A CONCLUSÃO  $xy > 0$  TAMBÉM VAI SER VERDADEIRA". A DEMONSTRAÇÃO ACIMA TEM A FORMA  $P \vdash Q \wedge R$ , PARA ALGUMA SENTENÇA  $P$  E ALGUMA SENTENÇA  $Q$ ; QUAIS?

⑥ SEJAM  $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  OS SEGUINTE PREDICADOS SOBRE NÚMEROS REAIS:

2,0  
PONTOS

$S_0: \mathbb{R} \rightarrow \{V, F\}$

$a \mapsto (\exists x \in \mathbb{Z}. a = 7x + 0),$

$S_1: \mathbb{R} \rightarrow \{V, F\}$

$a \mapsto (\exists x \in \mathbb{Z}. a = 7x + 1),$

...

$S_6: \mathbb{R} \rightarrow \{V, F\}$

$a \mapsto (\exists x \in \mathbb{Z}. a = 7x + 6).$

MOSTRE - ADAPTANDO AS IDÉIAS DA DEMONSTRAÇÃO ACIMA - QUE  $S_2(a) \wedge S_3(a)$  LEVA A UMA CONTRADIÇÃO.

⑦ PROVE POR INDUÇÃO QUE

$\forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}. 1 + 2 + \dots + n \leq n^2.$

DICAS: DEFINA  $P(0), P(1), P(2), P(3), P(k)$ ;

PROVE QUE  $P(k) \rightarrow P(k+1)$ ; O PRIMEIRO

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO DIZ QUE

$P(0), \forall k \in \mathbb{N}. P(k) \rightarrow P(k+1) \vdash \forall k \in \mathbb{N}. P(k).$

3,0  
PONTOS

⑧ TENTE PROVAR POR INDUÇÃO QUE

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2$  PARA  $n \geq 1.$

O QUE NÃO FUNCIONA?

3,0  
PONTOS

