Matemática Discreta
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
6/dez/2010
Terceira Prova ("P3")

~~(1)~~ Considere as seguintes operações, definidas sobre $\mathbb{R}^2$ (obs: elas são diferentes das operações da P2!):

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac,\ ad+bc)$$
$$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$$

Você deve ter reparado que o Scheinerman define grupos e monóides de um modo bem diferente do que fizemos em sala. Na definição que vimos em sala um monóide era uma estrutura

$$(M, \cdot, e)$$

obedecendo certas condições, e um grupo era uma estrutura

$$(G, \cdot, e, inv)$$

obedecendo certas condições; no Scheinerman monóides e grupos são estruturas $(M,\cdot)$ e $(G,\cdot)$, onde o "$\cdot$" é uma <u>operação</u> (não necessariamente uma função), e as condições são outras.

Mais precisamente: na definição vista em sala um monóide é:

$(M,$
$\quad \cdot : M\times M \to M,$
$\quad e \in M)$

obedecendo:

$\forall a,b,c\in M.\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$
$\forall a\in M.\ a\cdot e = e\cdot a = a$

e um grupo é:

$(G,$
$\quad \cdot : G\times G \to G,$
$\quad e\in G,$
$\quad inv : G\to G)$

obedecendo:

$\forall a,b,c\in G.\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$
$\forall a\in G.\ a\cdot e = e\cdot a = a$
$\forall a\in G.\ a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$

Ou seja: para provar "à moda do Scheinerman" que uma estrutura é um grupo precisamos encontrar a unidade ("e") e definir a função "inversa" ("inv", ou "$()^{-1}$"), e além disso provar que todas as condições são obedecidas.

(1) Calcule: $\boxed{\text{2.0 pontos}}$

$(a,b)\cdot(c,d)$
$(c,d)\cdot(a,b)$
$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)$
$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$
$(1,0)\cdot(a,b)$
$(1,b)\cdot(1,-b)$
$(a,0)\cdot(\frac{1}{a},0)$
$(a,0)\cdot(1,\frac{b}{a})\cdot(1,-\frac{b}{a})\cdot(\frac{1}{a},0)$

Obs: $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$, exceto nos dois últimos itens, em que $a\in\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(2) Sejam: $\boxed{\text{6.0 pontos}}$

$A = \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, $\quad \mathbb{A} = (A,\cdot)$,
$B = (0,\infty)\times\mathbb{R}$, $\quad \mathbb{B} = (B,\cdot)$,
$C = (0,\infty)\times(0,\infty)$, $\quad \mathbb{C} = (C,\cdot)$.

Prove ou que $\mathbb{A}$ é um monóide
ou que $\mathbb{A}$ não é um monóide,
e ou que $\mathbb{A}$ é um grupo
ou que $\mathbb{A}$ não é um grupo;
faça o mesmo para $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$.

Lembre que a notação de função, $\left(\begin{array}{l} f: A\to B \\ \quad a\mapsto \ldots \end{array}\right)$, é sua grande amiga — use-a sempre que for adequado.

(3) Prove que $(\mathbb{R}^2,+)$ é um grupo. $\boxed{\text{2.0 pontos}}$

(4) Seja $\alpha = (2,3)\in\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{1.0 pontos}}$

Usando as operações "$\cdot$" e "$+$" que definimos ali à esquerda, calcule $\alpha^3 - 4\alpha$.

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
6/DEZ/2010
TERCEIRA PROVA ("P3") - GABARITO

(1) $(a,b)\cdot(c,d) = (ac, ad+bc)$

$(c,d)\cdot(a,b) = (ac, ad+bc)$

$((a_0,a_1)\cdot(b_0,b_1))\cdot(c_0,c_1) =$

$(a_0,a_1)\cdot((b_0,b_1)\cdot(c_0,c_1)) =$

$(a_0b_0c_0,\ a_0b_0c_1 + a_0b_1c_0 + a_1b_0c_0)$

$(1,0)\cdot(a,b) = (a,b)$

$(1,b)\cdot(1,-b) = (1,0)$

$(a,0)\cdot(\frac{1}{a},0) = (1,0)$

$$\overbrace{(a,0)\cdot(1,\tfrac{b}{a})}^{(a,b)}\cdot\overbrace{(1,-\tfrac{b}{a})\cdot(\tfrac{1}{a},0)}^{(a,b)^{-1}=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2})} = (1,0)$$

$$\underbrace{(a,0)\cdot\underbrace{(1,\tfrac{b}{a})\cdot(1,-\tfrac{b}{a})}_{(1,0)}}_{(a,0)}\cdot(\tfrac{1}{a},0) = (1,0)$$

(2) PARA PROVAR QUE $\mathbb{A} = (\overbrace{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}}^{A}, \cdot)$ É UM MONÓIDE PRECISAMOS MOSTRAR QUE

$\cdot : A\times A \to A$
$(a,b),(c,d) \mapsto (ac, ad+bc)$

É REALMENTE UMA FUNÇÃO, QUE ELA É ASSOCIATIVA E QUE EXISTE UM ELEMENTO $e\in A$ QUE "SE COMPORTA COMO IDENTIDADE", ISTO É, QUE $\forall \alpha\in A.\ e\alpha = \alpha e = \alpha$.

SE $(a,b),(c,d)\in A$ ENTÃO $a,c\in\mathbb{R}^*$, E PORTANTO O SEU PRODUTO, ac, É $\neq 0$, E DAÍ $ac\in\mathbb{R}^*$ E $(a,b)\cdot(c,d)\in A$.

VIMOS NA QUESTÃO 1 QUE A OPERAÇÃO $\cdot : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ É ASSOCIATIVA; A SUA RESTRIÇÃO $\cdot : A\times A\to A$ TAMBÉM VAI SER ASSOCIATIVA (A PROVA É IGUAL), E O ELEMENTO $(1,0)\in A$ "SE COMPORTA COMO IDENTIDADE"... PORTANTO $\mathbb{A}$ É UM MONÓIDE.

A OPERAÇÃO $(a,b)\mapsto(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2})$ PRODUZ A INVERSA DE UM ELEMENTO (a,b); ELA ESTÁ DEFINIDA EXATAMENTE QUANDO $a\neq 0$ — OU SEJA, QUANDO $(a,b)\in A$, E PORTANTO

$\mathrm{inv} : A\to A$
$(a,b)\mapsto(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2})$

É UMA FUNÇÃO, E

$(A,$
$\cdot : A\times A\to A,$
$(1,0)\in A,$
$\mathrm{inv} : A\to A)$

É UM GRUPO.

A PROVA DE QUE $\mathbb{B}$ É UM MONÓIDE É SIMILAR. SE $(a,b),(c,d)\in B$ ENTÃO $a,c\in(0,\infty)$, PORTANTO $ac\in(0,\infty)$, E $(a,b)\cdot(c,d)\in B$; DAÍ A RESTRIÇÃO

$\cdot : B\times B\to B$

É UMA FUNÇÃO, QUE É ASSOCIATIVA, E O ELEMENTO $(1,0)\in B$ "SE COMPORTA COMO IDENTIDADE". A RESTRIÇÃO

$\mathrm{inv} : B\to B$

TAMBÉM É UMA FUNÇÃO, E DAÍ $\mathbb{B}$ TAMBÉM É UM GRUPO.

A PROVA DE QUE $\mathbb{C}$ É UM MONÓIDE É SIMILAR A ESTAS, MAS SE $(a,b)\in C$ A SUA INVERSA $(\frac{1}{a},-\frac{b}{a^2})$ TERIA A SEGUNDA COORDENADA NEGATIVA... PORTANTO NENHUM ELEMENTO DE C TEM INVERSA, E $\mathbb{C}$ NÃO É GRUPO.

(3) AQUI A DIFICULDADE ESTÁ EM QUE A OPERAÇÃO DO GRUPO, QUE NORMALMENTE CHAMAMOS DE "$\cdot$", AGORA É O "$+$" — E ISTO CAUSA CONFUSÃO. A IDENTIDADE É O PONTO $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, A INVERSA É A OPERAÇÃO

$\mathrm{inv} : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
$(a,b)\mapsto(-a,-b)$

E AS VERIFICAÇÕES SÃO TRIVIAIS — POR EXEMPLO,

$$(a,b)\cdot(a,b)^{-1} \rightsquigarrow \underbrace{(a,b)+(-a,-b)}_{(0,0)}.$$

(4) $\alpha^3 = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha = (2,3)\cdot(2,3)\cdot(2,3)$
$= (4,12)\cdot(2,3)$
$= (8,36)$

$4\alpha = \alpha+\alpha+\alpha+\alpha = (8,12)$

E DA MESMA FORMA QUE PODEMOS DEFINIR α/β COMO $\alpha\cdot\beta^{-1}$ PODEMOS DEFINIR $\alpha-\beta$ COMO $\alpha+(-\beta)$, ONDE A OPERAÇÃO $\beta\mapsto -\beta$ É A INVERSA DO GRUPO $(\mathbb{R}^2, +, (0,0), -)$, QUE É:

$- : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
$(a,b)\mapsto(-a,-b)$

ENTÃO $-4\alpha = (-8,-12)$

E $\alpha^3 - 4\alpha = \alpha^3 + (-4\alpha)$
$= (8,36)+(-8,-12)$
$= (0,24)$.