

A DEFINIÇÃO QUE O SCHEINERMAN USA PARA "GRUPO" É BEM MAIS DIFÍCIL DO QUE PODE PARECER À PRIMEIRA VISTA... O PROBLEMA PRINCIPAL É COM A IDÉIA DE "OPERAÇÃO". POR EXEMPLO, SEJA:

$$/_R = \{((a,b),c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}, a=bc\}$$

PRA FAZER O $"/_R$ SE COMPORTAR COMO UMA OPERAÇÃO NÓS DEFINIMOS (ÉÉÉ!)

UM SIGNIFICADO PARA

$$a/_R b = c,$$

QUE É O SEGUINTE:

$a/_R b = c$ VAI SER VERDADE SE E SÓ SE $((a,b),c) \in /_R$ FOR VERDADE.

USANDO REDUÇÃO ISTO PODE SER VISTO COMO A SEGUINTE REGRA DE REDUÇÃO:

$$a/_R b = c$$

$$((a,b),c) \in /_R$$

$$a,b,c \in \mathbb{R} \wedge a=bc$$

ESTA É A REGRA NOVA

PELA DEFINIÇÃO DO CONJUNTO $/_R$

POR EXEMPLO,

$$6/_R 3 = 2$$

$$((6,3),2) \in /_R$$

$$6,3,2 \in \mathbb{R} \wedge 6=3 \cdot 2$$

$$V \wedge V$$

$$V.$$

AI DIZEMOS QUE $a/_R b$ (SEM O "=c"!)

ESTÁ BEM-DEFINIDO QUANDO EXISTE UM ÚNICO VALOR DE c TAL QUE $a/_R b = c$, E NESTE CASO DEFINIMOS O VALOR DE $a/_R b$ COMO SENDO ESTE c .

1) VAMOS DEFINIR:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\},$$

$$(A \times B) \times C = \{((a,b),c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

a) EXIBA UM ELEMENTO

$$\alpha \in A \times B \times C$$

E UM ELEMENTO

$$p \in (A \times B) \times C$$

E TESTE-OS - ISTO É, CALCULE

$$(\alpha \in A \times B \times C) \text{ E } (p \in (A \times B) \times C)$$

PASSO A PASSO.

OOOPS! FALTOU UMA COISA AQUI... SUPONHA QUE

$$A = \{1,2\},$$

$$B = \{3,4\},$$

$$C = \{5,6\}.$$

0,5 PTS

- b) DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL DE UMA FUNÇÃO f COM DOMÍNIO $A \times B \times C$ E CONTRA-DOMÍNIO $(A \times B) \times C$ E A DEFINIÇÃO FORMAL DE UMA FUNÇÃO g COM DOMÍNIO $(A \times B) \times C$ E CONTRA-DOMÍNIO $A \times B \times C$. TESTE SUAS DEFINIÇÕES MOSTRANDO COMO CALCULAR $(g \circ f)((2,4,6))$ E $(f \circ g)((2,4,6))$. 2,0 PTS

DICA: FINJA QUE O SEU LEITOR É ALGUÉM QUE TEM DIFICULDADE COM ESTAS NOTAÇÕES, E FAÇA TUDO PASSO A PASSO.

AGORA VAMOS VOLTAR À DEFINIÇÃO DE GRUPO DO SCHEINERMAN. UM GRUPO (NO SENTIDO DO SCHEINERMAN) É UM PAR

$G = (G, \cdot)$ ONDE G É UM CONJUNTO E \cdot É UMA OPERAÇÃO TAL QUE:

- I PARA QUAISQUER $a, b \in G$ O RESULTADO DE $a \cdot b$ ESTÁ BEM-DEFINIDO E PERTENCE A G ,
- II EXISTE UM "ELEMENTO NEUTRO" $e \in G$ TAL QUE $\forall a \in G. e \cdot a = a \cdot e = a$,
- III PARA TODO ELEMENTO $a \in G$ EXISTE UM ELEMENTO $a^{-1} \in G$ TAL QUE $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.
- IV $\forall a, b, c. a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2) MOSTRE QUE $(\mathbb{R}, /_R)$ NÃO É UM GRUPO POR VÁRIAS RAZÕES:

- a) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO I. 1,0 PTS
- b) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO II. 1,0 PTS
- c) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO III. 1,0 PTS
- d) PORQUE NÃO OBEDECE A CONDIÇÃO IV. 1,0 PTS

3) SEJA \otimes A OPERAÇÃO DEFINIDA POR:

$$a \otimes b = (a-1)(b-1)+1$$

SE VOCÊ NÃO TIVER NENHUMA INTUIÇÃO SOBRE COMO ESTA OPERAÇÃO FUNCIONA UMA DICA É FAZER A TABELA DO \otimes PARA $a, b \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

- a) MOSTRE QUE (\mathbb{R}, \otimes) NÃO É UM GRUPO. 1,0 PTS
- b) MOSTRE QUE $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \otimes)$ É UM GRUPO. 2,0 PTS
- c) $(\{1, +\infty\}, \otimes)$ É UM GRUPO? JUSTIFIQUE. 3,0 PTS

INTERVALO

ESTA PROVA É BEM RÁPIDA (NO SENTIDO DE QUE O GABARITO É BEM CURTO) E VALE MAIS DE 10 PONTOS, ENTÃO CAPRICHE NAS RESPOSTAS! BOA PROVA!

GABARITO

1a) SEJAM

$$\alpha = (2, 4, 6)$$

$$\text{E } \beta = ((1, 3), 5).$$

$$\text{ENTÃO } \alpha \in A \times B \times C \quad \text{E } \beta \in (A \times B) \times C$$

$$\begin{array}{l} (2, 4, 6) \in A \times B \times C \\ \left. \begin{array}{l} \text{FAZENDO } a=2, \\ b=4, c=6 \end{array} \right\} \\ 2 \in A \wedge 4 \in B \wedge 6 \in C \\ \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \vee \wedge \vee \wedge \vee \\ \downarrow \\ \vee \end{array} \right\} \end{array} \quad \begin{array}{l} ((1, 3), 5) \in (A \times B) \times C \\ \left. \begin{array}{l} \text{FAZENDO} \\ a=1, b=3, c=5 \end{array} \right\} \\ 1 \in A \wedge 3 \in B \wedge 5 \in C \\ \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \vee \wedge \vee \wedge \vee \\ \downarrow \\ \vee \end{array} \right\} \end{array}$$

1b) SEJAM $f: A \times B \times C \rightarrow (A \times B) \times C$
 $(a, b, c) \mapsto ((a, b), c)$
E $g: (A \times B) \times C \rightarrow A \times B \times C$
 $((a, b), c) \mapsto (a, b, c).$

$$\begin{aligned} \text{ENTÃO } (g \circ f)((2, 4, 6)) &= g(f((2, 4, 6))) \\ &= g(((2, 4), 6)) \\ &= (2, 4, 6) \\ \text{E } (f \circ g)((2, 4, 6)) &= f(g((2, 4, 6))) \\ &= f((2, 4, 6)) \\ &= ((2, 4), 6) \end{aligned}$$

2a) O RESULTADO DE $a/\mathbb{R}b$ NEM SEMPRE ESTÁ BEM-DEFINIDO. POR EXEMPLO, SE $a=4$ E $b=0$ NÃO EXISTE UM $c \in \mathbb{R}$ TAL QUE $a/\mathbb{R}b = c$.

$$2b) (6/\mathbb{R}3)/\mathbb{R}2 = 2/\mathbb{R}2 = 1$$

$$6/\mathbb{R}(3/\mathbb{R}2) = 6/\mathbb{R}\frac{3}{2} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

2c) VAMOS TESTAR TODOS OS ELEMENTOS DE \mathbb{R} PRA VER SE ALGUM DELES PODE FAZER O PAPEL DE ELEMENTO NEUTRO. SE $e \neq 1$ - POR EXEMPLO, $e=4$ - A CONDIÇÃO $a/\mathbb{R}e = a$ SÓ VAI VALER PARA $a=0$, E DEVERIA VALER PARA TODO $a \in \mathbb{R}$; E SE $e=1$ A CONDIÇÃO $e/\mathbb{R}a = e$ SÓ VAI VALER PARA $a=1$. PORTANTO NENHUM $e \in \mathbb{R}$ OBEDECE $\forall a \in \mathbb{R}. a/\mathbb{R}e = e/\mathbb{R}a = a$.

2d) COMO $(\mathbb{R}, /_{\mathbb{R}})$ NÃO TEM ELEMENTO NEUTRO A CONDIÇÃO $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ NEM FAZ SENTIDO.

3) A TABELA:

3	-5	-3	-1	1	3	5
2	-2	-1	0	1	2	3
1	1	1	1	1	1	1
0	4	3	2	1	0	-1
-1	7	5	3	1	-1	-3
-2	10	7	4	1	-2	-5
0	-2	-1	0	1	2	3

3a) PELA TABELA DÁ PRA VER QUE 0

2 É O ELEMENTO NEUTRO -

MAS AÍ A GENTE DESCOBRE QUE

$a=1$ NÃO TEM INVERSA - NÃO EXISTE

$a^{-1} \in \mathbb{R}$ TAL QUE $a \otimes a^{-1} = e = 2$.

MAIS FORMALMENTE: SE $e = 2$ ENTÃO

$$a \otimes e = (a-1)(e-1)+1 = (a-1) \cdot 1 + 1 = a,$$

$$e \otimes a = (e-1)(a-1)+1 = 1 \cdot (a-1) + 1 = a,$$

E SE $a=1$ ENTÃO

$$a \otimes a^{-1} = (1-1)(a^{-1}-1)+1 = 0 \cdot (a^{-1}-1) + 1 = 1 \neq 2.$$

3b) I) PARA QUAISQUER $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{TEMOS QUE } a \otimes b = (a-1)(b-1)+1,$$

QUE ESTÁ BEM-DEFINIDO E PERTENCE A \mathbb{R} ;

II) PARA $a, b, c \in \mathbb{R}$ TEMOS

$$(a \otimes b) \otimes c = ((a-1)(b-1)+1-1)(c-1)+1$$

$$= (a-1)(b-1)(c-1)+1,$$

$$a \otimes (b \otimes c) = (a-1)((b-1)(c-1)+1-1)+1$$

$$= (a-1)(b-1)(c-1)+1.$$

III) O ELEMENTO NEUTRO É O $e = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, COMO VIMOS NA 3a.

IV) $a \otimes b = e$ É EQUIVALENTE A:

$$(a-1)(b-1)+1 = 2$$

$$(a-1)(b-1) = 1$$

$$b-1 = \frac{1}{a-1}$$

$$b = \frac{1}{a-1} + 1$$

PORTANTO BASTA DEFINIR $a^{-1} := \frac{1}{a-1} + 1$;

COMO $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ISTO É, $a \neq 1$, TEMOS $a^{-1} \neq 1$.

3c) $((1, +\infty), \otimes)$ É UM GRUPO SIM.

QUASE TODO O TRABALHO PARA VERIFICAR ISTO JÁ FOI FEITO NA 3b); SÓ

FALTA VER QUE:

I) $\forall a, b \in (1, +\infty). a \otimes b \in (1, +\infty)$,

II) $e \in (1, +\infty)$,

IV) $\forall a \in (1, +\infty). a^{-1} \in (1, +\infty)$,

QUE SÃO CONTAS TRIVIAIS.