Matemática Discreta
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR")
10/dez/2010

(1) Digamos que sabemos que as seqüências $(a_0, a_1, \ldots)$ e $(b_0, b_1, \ldots)$ obedecem: **2.0 pontos**

$a_0 = 0$,
$\forall n \in \mathbb{N}.\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$,
$\forall n \in \mathbb{N}.\ b_n = n^2$.

Prove que $a_k = b_k \to a_{k+1} = b_{k+1}$.
(Obs: k é um número natural <u>qualquer</u>.)

(2) Mostre que se $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ então **4.0 pontos**

$$234 + k^2 < k^3 \to 234 + (k+1)^2 < (k+1)^3.$$

Dica: lembre de como expandir $(a+b)^2$ e $(a+b)^3$.
Obs: é possível provar isto usando técnicas de Cálculo 1, mas você aqui vai ter que encontrar uma prova no estilo das que vimos no curso, usando números inteiros, transitividade do "<", etc.

(3) A operação F vai ser definida por: **1.0 pontos**

$$F(A, B) = \{ A \cup B' \mid B' \subseteq B,\ B' \neq \emptyset \}.$$

Calcule $F(F(\{2,3\}, \{4,5\}), \{6\})$.

(4) A relação R vai ser definida por: **3.0 pontos**

aRB se e só se $a \in B$ e $\forall b \in B.\ a \leq b$.

(a) Se $B = \{10, 20, 30\}$, encontre um a tal que aRB.

(b) Sejam:

$C = \{2, 3, 4\}$,
$D = \mathcal{P}(C) \setminus \{\emptyset\}$,
$E = \mathcal{P}(C)$,
$F = \{(X, y) \mid X \in D,\ yRX\}$,
$G = \{(X, y) \mid X \in E,\ yRX\}$.

Calcule $|D|$, $|E|$, F, G.
F e G são funções?

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
Prova de Reposição ("VR") - <u>Gabarito</u>
10/dez/2010

(1)
$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2k+1 \\ &= b_k + 2k+1 \\ &= k^2 + 2k+1 \\ &= (k+1)^2 \\ &= b_{k+1} \end{aligned}$$

(2)
$$(k+1)^2 = k^2+2k+1$$
$$(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$$
$$234+(k+1)^2 = (234+k^2)+(2k+1)$$

$$\dfrac{\dfrac{234+k^2<k^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{0<k}{0<3k^2} \qquad 0<k}{0<3k^2+k}}{2k+1<3k^2+3k+1}}{234+k^2+2k+1<k^3+3k^2+3k+1}}{234+(k+1)^2<(k+1)^3}$$

(3)
$$\begin{aligned} F(\{2,3\},\{4,5\}) &= \{\{2,3\}\cup B' \mid B'\subseteq\{4,5\},\ B'\neq\emptyset\} \\ &= \{\{2,3\}\cup\{4\}, \\ &\quad\ \{2,3\}\cup\{5\}, \\ &\quad\ \{2,3\}\cup\{4,5\}\} \\ &= \{\{2,3,4\}, \\ &\quad\ \{2,3,5\}, \\ &\quad\ \{2,3,4,5\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F(F(\{2,3\},\{4,5\}),\{6\}) = \\ &= \{\{\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,4,5\}\}\cup B' \mid B'\subseteq\{6\},\ B'\neq\emptyset\} \\ &= \{\{\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,4,5\}\}\cup\{6\}\} \\ &= \{\{\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,4,5\},6\}\} \end{aligned}$$

(4a) Se $a=10$ então aRB.

(4b) Como $|C|=3$, $|\mathcal{P}(C)|=2^3=8$.
Como $\emptyset\in\mathcal{P}(C)$, $|\mathcal{P}(C)\setminus\{\emptyset\}|=7$.
$D=\{\{4\},\{3\},\{3,4\},\{2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\}\}$,
$E=\{\emptyset,\{4\},\{3\},\{3,4\},\{2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\}\}$.
$|D|=7$,
$|E|=8$,
$$\begin{aligned} F=\{&(\{4\},4), \\ &(\{3\},3), \\ &(\{3,4\},3), \\ &(\{2\},2), \\ &(\{2,4\},2), \\ &(\{2,3\},2), \\ &(\{2,3,4\},2)\}, \end{aligned}$$
$F=G$, e F e G são funções.