

MATEMÁTICA DISCRETA

PURO/UFF-2011.1

PROF: EDUARDO OCHS

PROVA DE REPOSIÇÃO ("VR")

13/JULHO/2011

② PROVE QUE  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$   
(PARA  $n \in \mathbb{N}$ ).

4,0  
PTS

- ① PODEMOS DEFINIR O CONJUNTO DAS ÁRVORES BINÁRIAS COM ELEMENTOS DE A NAS FOLHAS,  $T_A$ , DA SEGUINTE FORMA:

$$T_{A_0} = A,$$

$$T_{A(n+1)} = T_{A_n} \cup \{(t, t') \mid t, t' \in T_{A_n}\} \quad (\text{PARA } n \in \mathbb{N}),$$

$$T_A = T_{A_0} \cup T_{A_1} \cup T_{A_2} \cup \dots$$

A LINEARIZAÇÃO DE UMA ÁRVORE  $t \in T_A$  É UMA LISTA QUE TEM TODOS OS ELEMENTOS DE  $t$  "SÓ COM OS PARÊNTESES EXTERNOS".

POR EXEMPLO,

$$\text{Lin}(((2,3),4),(10,20)) = (2,3,4,10,20)$$

- ② DEFINA FORMALMENTE (VOCÊ VAI PRECISAR DE UMA DEFINIÇÃO INDUTIVA!) A FUNÇÃO

2,0  
PTS

$$\text{Lin}_{\mathbb{N}}: T_{\mathbb{N}} \rightarrow \text{LISTAS}_{\mathbb{N}},$$

ONDE  $\text{LISTAS}_{\mathbb{N}}$  É O CONJUNTO DAS LISTAS DE NATURAIS DE COMPRIMENTO FINITO.

TESTE A SUA DEFINIÇÃO CALCULANDO PASSO A PASSO

$$\text{Lin}_{\mathbb{N}}(((2,3),4),(10,20)).$$

- ③ SEJA  $T_{\text{seq}ab}$  O SUBCONJUNTO DE  $T_{\mathbb{N}}$

1,0  
PTS

FORMADO SÓ PELAS ÁRVORES CUJA

LINEARIZAÇÃO É  $(a, a+1, \dots, b)$ .

ENCONTRE TODOS OS ELEMENTOS DE  $T_{\text{seq}14}$ .

- ④ É POSSÍVEL DEFINIR  $T_{\text{seq}1n}$  INDUTIVAMENTE.

3,0  
PTS

CALCULE  $T_{\text{seq}11}$ ,  $T_{\text{seq}12}$ ,  $T_{\text{seq}13}$ ,

$T_{\text{seq}24}$ ,  $T_{\text{seq}34}$ ,  $T_{\text{seq}44}$  E MOSTRE

COMO DEFINIR  $T_{\text{seq}ab}$  A PARTIR DE CONJUNTOS MENORES.

DICAS:

Ⓐ  $2 \in \mathbb{N}$ , MAS  $(2,3) \notin \mathbb{N}$ .

Ⓑ  $\mathbb{N} \notin T_{\mathbb{N}}$ .

Ⓒ  $(2,3,4) \uparrow (5,6) = (2,3,4,5,6)$

Ⓓ  $\text{Lin}_{\mathbb{N}}(1) = ?$

$\text{Lin}_{\mathbb{N}}((1,2)) = ?$

$\text{Lin}_{\mathbb{N}}(((1,2),(3,4))) = ?$

GABARITO

1a)  $Lin_{\mathbb{N}}: T_{\mathbb{N}} \rightarrow LISTAS_{\mathbb{N}}$   
 $t \mapsto \begin{cases} (t) & \text{QUANDO } t \in \mathbb{N}, \\ Lin_{\mathbb{N}}(a) \# Lin_{\mathbb{N}}(b) & \text{QUANDO } t \notin \mathbb{N} \text{ e } t = (a, b) \end{cases}$

$Lin_{\mathbb{N}}(2) = (2)$

$Lin_{\mathbb{N}}(3) = (3)$

$Lin_{\mathbb{N}}((2, 3)) = Lin_{\mathbb{N}}(2) \# Lin_{\mathbb{N}}(3)$   
 $= (2) \# (3)$   
 $= (2, 3)$

$Lin_{\mathbb{N}}(4) = (4)$

$Lin_{\mathbb{N}}(((2, 3), 4)) = Lin_{\mathbb{N}}((2, 3)) \# Lin_{\mathbb{N}}(4)$   
 $= (2, 3) \# (4)$   
 $= (2, 3, 4)$

$Lin_{\mathbb{N}}(((2, 3), 4), (10, 20))) = Lin_{\mathbb{N}}(((2, 3), 4)) \# Lin_{\mathbb{N}}((10, 20))$   
 $= (2, 3, 4, 10, 20)$

1b)  $T_{Seq 14} = \{ ((1, 2), 3), 4, \\ ((1, 2), (3, 4)), \\ (1, (2, (3, 4))), \\ (1, ((2, 3), 4)), \\ ((4, (2, 3)), 4) \}$

1c) USANDO UMA NOTAÇÃO EM ÁRVORE,  
 $T_{Seq 11} = \{1\}, T_{Seq 24} = \{2 \wedge 3, 4, 2 \wedge 4\},$   
 $T_{Seq 12} = \{1 \wedge 2\}, T_{Seq 34} = \{3 \wedge 4\},$   
 $T_{Seq 13} = \{1 \wedge 2, 3, 1 \wedge 3\}, T_{Seq 44} = \{4\}$   
 E  
 $T_{Seq ab} = T_{Seq aa} \times T_{Seq (a+1)b}$   
 $\cup T_{Seq a(a+1)} \times T_{Seq (a+2)b}$   
 $\cup \dots$   
 $\cup T_{Seq a(b-1)} \times T_{Seq bb}.$

2) VAMOS DEFINIR:  
 $P(k) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6})$   
 QUEREMOS VER QUE  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n).$   
 SABEMOS QUE  $P(0) = (0 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6}) = V;$   
 VAMOS VER QUE SE  $P(k)$  É VERDADE ENTÃO  
 $P(k+1)$  TAMBÉM É VERDADE.  
 $P(k+1) = (1 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6})$   
 $= (1 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6})$   
 $\stackrel{(*)}{=} (\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6})$

ONDE EM (\*) FIZEMOS UMA SUBSTITUIÇÃO  
 USANDO  $P(k).$

É FÁCIL PROVAR QUE

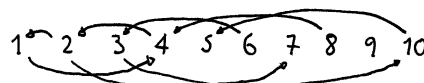
$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + 6(k+1)(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

ISTO É, QUE:

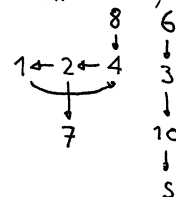
$k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3)$

BASTA EXPANDIR - E ISTO PROVA QUE  $P(k+1)$   
 É VERDADE. PORTANTO  $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \rightarrow P(k+1),$   
 E PELO 1º PRINCÍPIO DE INDUÇÃO TEMOS  
 $\forall n \in \mathbb{N}, P(n).$

3) R É:



REARRUMANDO, TEMOS:



R NÃO É TRANSITIVA PORQUE TEMOS  
 $6R3$  E  $3R10$  MAS  $6 \not R 10;$

R NÃO É SIMÉTRICA PORQUE TEMOS  
 $6R3$  MAS  $3 \not R 6;$

R NÃO É REFLEXIVA PORQUE TEMOS  
 $6 \not R 6;$

R NÃO É FUNÇÃO PORQUE TEMOS  
 $2R1$  E  $2R7.$

O FECHO TRANSITIVO DE R É:

