

NA VR NÓS DEFINIMOS O CONJUNTO
 DAS "ÁRVORES BINÁRIAS COM ELEMENTOS
 DE A NAS FOLHAS" DESTA FORMA:

$$T_{A0} = A$$

$$T_{A(n+1)} = T_{An} \cup T_{An} \times T_{An} \quad (\text{PARA TODO } n \in \mathbb{N})$$

$$T_A = T_{A0} \cup T_{A1} \cup T_{A2} \cup \dots$$

E A PARTIR DISTO PODEMOS DEFINIR
 O QUE É UMA "ÁRVORE BINÁRIA COM
 ELEMENTOS DE A NAS FOLHAS": t É
 UMA ÁRVORE BINÁRIA COM ELEMENTOS
 DE A NAS FOLHAS SE E SÓ SE $t \in T_A$.

- ① SEJA $A = \{2\}$. CALCULE T_{A0}, T_{A1}
 E T_{A2} E VERIFIQUE QUE $(2, (2, 2))$ É
 UMA ÁRVORE BINÁRIA COM ELEMENTOS
 DE $\{2\}$ NAS FOLHAS. 0,5 PTS

- ② PODEMOS USAR UMA NOTASÃO
 ALTERNATIVA PARA PARES ORDENADOS:
 VAMOS NOS PERMITIR ESCREVER (α, β)
 COMO $\alpha \hat{\beta}$. NOTE QUE:

$$(1, (2, 3)) = 1 \hat{(2, 3)} = 1 \hat{23}$$

$$(1, 2 \hat{3}) = 1 \hat{23}$$

OU SEJA, PODEMOS ESCREVER SÓ
 ALGUNS PARES COMO "1.2.3", OU
 TODOS, OU NENHUM.

CALCULE $T_{\{3\}2}$ USANDO ESTA
 NOTASÃO.

- ③ DIZEMOS QUE x É "DA FORMA (a, b) "
 QUANDO EXISTEM a E b TALS QUE
 $x = (a, b)$; NOTE QUE $(1, (2, 3))$ É
 DA FORMA (a, b) , MAS 9 NÃO É DA
 FORMA (a, b) . 1,0 PTS

AGORA QUE VOCÊ JÁ ENTENDE O
 QUE É $T_{\mathbb{N}}$ - QUE É UM CONJUNTO
 MUITO GRANDE - VOCÊ VAI
 CONSEGUIR ENTENDER CERTOS TIPOS
 DE DEFINIÇÕES RECURSIVAS. :)

PARA QUALQUER $A \subseteq \mathbb{N}$ PODEMOS
 DEFINIR:

$$\text{earv}_A : T_{\mathbb{N}} \rightarrow \{V, F\}$$

$$t \mapsto \begin{cases} t \in A & \text{SE } t \text{ NÃO} \\ & \text{É DA FORMA } (a, b), \\ \text{earv}_A(a) \wedge \text{earv}_A(b) & \text{SE } t \text{ É DA} \\ & \text{FORMA } (a, b). \end{cases}$$

$$\text{MOSTRE QUE } \text{earv}_{\{2,3,4\}}(2 \hat{4} \hat{2} \hat{3}) = F.$$

LEMBRE QUE VOCÊ NÃO PRECISA ESCREVER
 "{2,3,4}" EM TODO LUGAR - A PARTIR DO
 MOMENTO QUE VOCÊ DIZ "SEJA $B = \{2,3,4\}$ "
 (EM PORTUGUÊS!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!)
 VOCÊ PASSA A PODER USAR B COMO UMA
 "ABREVIATURA" PARA $\{2,3,4\}$.

- ④ COMO NENHUM ELEMENTO DE \mathbb{N} É
 DA FORMA (a, b) PODEMOS
 ESCREVER "SE t NÃO É DA FORMA (a, b) "
 E "SE t É DA FORMA (a, b) "
 DE MODO MAIS COMPACTO:
 "SE $t \in \mathbb{N}$ "
 E "SE $t = (a, b)$ ".

USANDO AS DEFINIÇÕES

$$\text{larg} : T_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{SE } t \in \mathbb{N}, \\ \text{larg}(a) + \text{larg}(b) & \text{SE } t = (a, b) \end{cases}$$

$$\text{E alt} : T_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$t \mapsto \begin{cases} \max(\text{alt}(a), \text{alt}(b)) + 1 & \text{SE } t = (a, b), \\ 0 & \text{SE } t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{CALCULE } \text{larg}(2 \hat{4} \hat{2} \hat{3}) \text{ E } \text{alt}(2 \hat{4} \hat{2} \hat{3}).$$

- ⑤ DEFINA FORMALMENTE UMA FUNÇÃO QUE
 SOMA OS ELEMENTOS NAS FOLHAS DE UMA ÁRVORE E
 TESTE-A MOSTRANDO QUE $\text{soma}(2 \hat{4} \hat{2} \hat{3}) = 16$. 1,5 PTS

- ⑥ DEFINA FORMALMENTE UMA FUNÇÃO QUE
 "ESPELHA" UMA ÁRVORE E TESTE-A MOSTRANDO
 QUE $\text{esp}(2 \hat{4} \hat{2} \hat{3}) = 5 \hat{3} \hat{2} \hat{4}$. 2,5 PTS

ATÉ AGORA ESTÁVAMOS USANDO SÓ PARES.
 A PARTIR DAQUI VAMOS PASSAR A USAR TAMBÉM
 LISTAS DE COMPRIMENTO 0 - NOTASÃO: $()$,
 DE COMPRIMENTO 1 - NOTASÃO: (a) ,
 DE COMPRIMENTO 3 - NOTASÃO: (a, b, c) , etc.

LEMBRE QUE $(10, 20, 30) \# (1) \# (4) = (10, 20, 30, 4)$,
 E QUE $(10, 20, 30) \# (1) \# 4$ "DA ERRO"

PORQUE 4 NÃO É UMA LISTA.

DEFINIMOS:

$$L_{A0} = \{()\}$$

$$L_{A(n+1)} = L_{An} \cup \{\alpha \# (\beta) \mid \alpha \in L_{An}, \beta \in A\}$$

$$L_A = L_{A0} \cup L_{A1} \cup L_{A2} \cup \dots$$

- ⑦ CALCULE $L_{\{2,3\}2}$. 0,5 PTS

- ⑧ VAMOS DEFINIR:

$$\text{add} : L_{\mathbb{N}} \rightarrow L_{\mathbb{N}}$$

$$\alpha \mapsto \begin{cases} () & \text{SE } \alpha = (), \\ () & \text{SE } \alpha = (x), \\ \beta \# (x+y) & \text{SE } \alpha = \beta \# (x, y), \end{cases}$$

$$\text{sub} : L_{\mathbb{N}} \rightarrow L_{\mathbb{N}}$$

$$\alpha \mapsto \begin{cases} () & \text{SE } \alpha = () \text{ OU } \alpha = (x), \\ \beta \# (x-y) & \text{SE } \alpha = \beta \# (x, y), \end{cases}$$

$$\text{push} : L_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \rightarrow L_{\mathbb{N}}$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha \# (x).$$

CALCULE:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (), \\ \alpha_1 &= \text{push}(\alpha_0, 2), \\ \alpha_2 &= \text{push}(\alpha_1, 3), \\ \alpha_3 &= \text{push}(\alpha_2, 4), \\ \alpha_4 &= \text{sub}(\alpha_3), \\ \alpha_5 &= \text{add}(\alpha_4), \\ \alpha_6 &= \text{sub}(\alpha_5). \end{aligned}$$

CONTINUA

9) PODEMOS FAZER DEFINIÇÕES

1,5
PTS

"RECURSIVAS EM LISTAS"

COMEÇANDO PELA ESQUERDA

(OU PELA DIREITA). POR

EXEMPLO, PODEMOS DEFINIR

UMA FUNÇÃO QUE SOMA TODOS

OS ELEMENTOS DE UMA LISTA

$x \in L_{\mathbb{N}}$ QUE FUNCIONE DA

SEGUINTE FORMA:

$$\text{soma}((1)) = 0$$

$$\text{soma}((2)) = \text{soma}((1)) + 2$$

$$\text{soma}((2,3)) = \text{soma}((2)) + 3$$

$$\text{soma}((2,3,4)) = \text{soma}((2,3)) + 4$$

DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL PARA
ESTA FUNÇÃO E TESTE-A.

10) SEJA $\text{Ops} = \{ "+", "-" \}$ E $\mathbb{N}_{\pm} = \mathbb{N} \cup \text{Ops}$.

2,0
PTS

ENTÃO TEMOS, POR EXEMPLO,

$$(2, 3, 4, "-", "+") \in L_{\mathbb{N}_{\pm}}.$$

A CALCULADORA DA GABRIELA "CALCULA
O VALOR" DE LISTAS DE $L_{\mathbb{N}_{\pm}}$, E ELA

É DEFINIDA EM DUAS PARTES: A

FUNÇÃO gab1 , QUE EXECUTA UMA

OPERAÇÃO DE CADA VEZ, E A FUNÇÃO

gab , QUE EXECUTA UMA LISTA DE

OPERAÇÕES. POR EXEMPLO:

$$\text{gab1}((1), 2) = (2),$$

$$\text{gab1}((2), 3) = (2, 3),$$

$$\text{gab1}((2, 3, 4), "-") = (2, -1)$$

$$\text{E } \text{gab}((2), (3, "-")) =$$

$$\text{gab}((2, 3), ("-")) =$$

$$\text{gab}((-1), (1)) =$$

$$(-1).$$

DEFINA FORMALMENTE gab1 E gab
E TESTE AS SUAS DEFINIÇÕES.

① $T_{A0} = \{2\}$
 $T_{A1} = \{2\} \cup \{2\} \times \{2\}$
 $= \{2, (2, 2)\}$
 $T_{A2} = \{2, 2^{\wedge}2\} \cup \{2, 2^{\wedge}2\} \times \{2, 2^{\wedge}2\}$
 $= \{2, 2^{\wedge}2\} \cup \{2^{\wedge}2, 2^{\wedge}2^{\wedge}2, 2^{\wedge}2^{\wedge}2, 2^{\wedge}2^{\wedge}2^{\wedge}2\}$
 $= \{2, 2^{\wedge}2, 2^{\wedge}2^{\wedge}2, 2^{\wedge}2^{\wedge}2^{\wedge}2\}$
 $(2, (2, 2)) = 2^{\wedge}2^{\wedge}2 \in T_{A2} \subset T_A$

PORTANTO $(2, (2, 2))$ É UMA ÁRVORE BINÁRIA COM ELEMENTOS DE $\{2\}$ NAS FOLHAS.

② $T_{\{3\}2} = \{3, 3^{\wedge}3, 3^{\wedge}3^{\wedge}3, 3^{\wedge}3^{\wedge}3^{\wedge}3\}$
 (O DESENVOLVIMENTO É IGUAL AO DA QUESTÃO 1).

③ Seja $B = \{2, 3, 4\}$
 ENTÃO $\text{earv}_B(\text{diagrama}) =$

$= \text{earv}_B(2^{\wedge}4) \wedge \text{earv}_B(2^{\wedge}3^{\wedge}5)$
 $= \text{earv}_B(2^{\wedge}4) \wedge \text{earv}_B(2) \wedge \text{earv}_B(3^{\wedge}5)$
 $= \text{earv}_B(2^{\wedge}4) \wedge (2 \in B) \wedge \text{earv}_B(3) \wedge \text{earv}_B(5)$
 $= \text{earv}_B(2^{\wedge}4) \wedge V \wedge V \wedge F$
 $= F$

④ $\text{larg}(\text{diagrama}) =$
 $= \text{larg}(2^{\wedge}4) + \text{larg}(2^{\wedge}3^{\wedge}5)$
 $= \text{larg}(2) + \text{larg}(4) + \text{larg}(2) + \text{larg}(3^{\wedge}5)$
 $= 1 + 1 + 1 + \text{larg}(3) + \text{larg}(5)$
 $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
 $= 5$

$\text{alt}(\text{diagrama}) =$
 $= \max(\text{alt}(2^{\wedge}4), \text{alt}(2^{\wedge}3^{\wedge}5)) + 1$
 $= \max(\max(\text{alt}(2), \text{alt}(4)) + 1, \text{alt}(2^{\wedge}3^{\wedge}5)) + 1$
 $(*) = \max(\max(0, 0) + 1, 2) + 1$
 $= \max(0 + 1, 2) + 1$
 $= 2 + 1$
 $= 3$

ONDE NO PASSO (*) USAMOS QUE
 $\text{alt}(2^{\wedge}3^{\wedge}5) = \max(\text{alt}(2), \text{alt}(3^{\wedge}5)) + 1$
 $= \max(0, 1) + 1$
 $= 2$

⑤ soma: $T_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$
 $t \mapsto \begin{cases} t & \text{se } t \in \mathbb{N}, \\ \text{soma}(a) + \text{soma}(b) & \text{se } t = (a, b). \end{cases}$

TESTE:
 $\text{soma}(2) = 2$
 $\text{soma}(3) = 3$
 $\text{soma}(4) = 4$
 $\text{soma}(5) = 5$
 $\text{soma}(2^{\wedge}4) = \text{soma}(2) + \text{soma}(4) = 6$
 $\text{soma}(3^{\wedge}5) = \text{soma}(3) + \text{soma}(5) = 8$
 $\text{soma}(2^{\wedge}3^{\wedge}5) = \text{soma}(2) + \text{soma}(3^{\wedge}5) = 10$
 $\text{soma}(\text{diagrama}) = \text{soma}(2^{\wedge}4) + \text{soma}(2^{\wedge}3^{\wedge}5) = 16$

⑥ esp: $T_{\mathbb{N}} \rightarrow T_{\mathbb{N}}$
 $t \mapsto \begin{cases} t & \text{se } t \in \mathbb{N}, \\ (\text{esp}(b), \text{esp}(a)) & \text{se } t = (a, b). \end{cases}$

TESTE:
 $\text{esp}(2^{\wedge}4) = (\text{esp}(4), \text{esp}(2))$
 $= (4, 2)$
 $= 4^{\wedge}2$
 $\text{esp}(2^{\wedge}3^{\wedge}5) = (\text{esp}(3^{\wedge}5), \text{esp}(2))$
 $= (3^{\wedge}5, 2)$
 $= \text{diagrama}$
 $\text{esp}(\text{diagrama}) = (3^{\wedge}2, 4^{\wedge}2)$
 $= \text{diagrama}$

⑦ Seja $C = \{2, 3\}$.
 $L_{C0} = \{()\}$
 $L_{C1} = \{()\} \cup \{\alpha \# (\beta) \mid \alpha \in \{()\}, \beta \in \{2, 3\}\}$
 $= \{()\} \cup \{(1) \# (2), (1) \# (3)\}$
 $= \{(1, 2), (1, 3)\}$
 $L_{C2} = L_{C1} \cup \{\alpha \# (\beta) \mid \alpha \in L_{C1}, \beta \in \{2, 3\}\}$
 $= \{(1), (2), (3),$
 $(1) \# (2), (1) \# (3),$
 $(2) \# (2), (2) \# (3),$
 $(3) \# (2), (3) \# (3)\}$
 $= \{(1), (2), (3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

CONTINUA

MATEMÁTICA DISCRETA

PURD/UFF - 2011.1

PROF: EDUARDO OHS

PROVA SUPLEMENTAR ("VS")

16/JULHO/2011

GABARITO (CONT.)

8) $\alpha_0 = ()$

$\alpha_1 = \text{push}((1), 2)$

$= () \# (2)$

$= (2)$

$\alpha_2 = \text{push}((2), 3)$

$= (2, 3)$

$\alpha_3 = \text{push}((2, 3), 4)$

$= (2, 3, 4)$

$\alpha_4 = \text{sub}((2, 3, 4))$

$= (2) \# (3-4)$

$= (2, -1)$

$\alpha_5 = \text{add}((2, -1))$

$= () \# (2 + (-1))$

$= (1)$

$\alpha_6 = \text{sub}((1))$

$= ()$

9) $\text{soma} : L_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\alpha \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = () \\ \text{soma}(\beta) + x & \text{se } \alpha = \beta \# (x) \end{cases}$$

$\text{soma}((2, 3, 4)) = \text{soma}((2, 3)) + 4$

$= \text{soma}((2)) + 3 + 4$

$= \text{soma}((1)) + 2 + 3 + 4$

$= 0 + 2 + 3 + 4$

$= 9$

10) $\text{gab1} : L_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}_{\pm} \rightarrow L_{\mathbb{N}}$

$$(\alpha, op) \mapsto \begin{cases} \text{push}(\alpha, op) & \text{se } op \in \mathbb{N}, \\ \text{add}(\alpha) & \text{se } op = "+", \\ \text{sub}(\alpha) & \text{se } op = "-" \end{cases}$$

$\text{gab} : L_{\mathbb{N}} \times L_{\mathbb{N}_{\pm}} \rightarrow L_{\mathbb{N}}$

$$(\alpha, ops) \mapsto \begin{cases} \alpha & \text{se } ops = () \\ \text{gab}(\text{gab1}(\alpha, op), ops') & \text{se } ops = (op) \# ops' \end{cases}$$

Daí: $\text{gab}((1), (2, 3, "-", 4, "+", "+")) =$

$= \text{gab}(\text{gab1}((1), 2), (3, "-", 4, "+", "+"))$

$= \text{gab}((2), (3, "-", 4, "+", "+"))$

$= \text{gab}((2, 3), ("-", 4, "+", "+"))$

$= \text{gab}((-1), (4, "+", "+"))$

$= \text{gab}((-1, 4), ("+", "+"))$

$= \text{gab}((5), ("+", "+"))$

$= \text{gab}((1), (1))$

$= ()$