Matemática Discreta
PURO-UFF
29/março/2010

Exercícios sobre expressões equivalentes (continuação)

Na aula passada nós começamos a trabalhar no seguinte exercício:

Considere as expressões abaixo:

(E_0) $\forall x \in A \cup B.\ P(x)$
(E_1) $\forall x \in A \cap B.\ P(x)$
(E_2) $\exists x \in A \cup B.\ P(x)$
(E_3) $\exists x \in A \cap B.\ P(x)$
(E_4) $\forall x \in A.\ (x \in B \to P(x))$
(E_5) $\forall x \in A.\ (x \in B \land P(x))$
(E_6) $\exists x \in A.\ (x \in B \to P(x))$
(E_7) $\exists x \in A.\ (x \in B \land P(x))$

Algumas são equivalentes entre si. Quais? Encontre modos de mostrar que algumas sentenças não são equivalentes.

Dicas: Podemos começar com $A = \{1,2\}$ e $B = \{2,3\}$.
P pode ser qualquer proposição definida sobre $\{1,2,3\}$.
Exemplos de proposições:
$P(x) = (x=3)$
$P(x) = (x=1 \to x=3)$
$P(x) = \mathbf{V}$

Pense em Álgebra e Cálculo 1... x e x^2 são funções diferentes mas que coincidem em $x=0$ e $x=1$; x^2 e $(x+1)(x-1)+1$ são duas funções de x "equivalentes", mas tivemos que aprender bastante álgebra pra entender isto...
Agora estamos aprendendo métodos "algébricos" pra lidar com expressões lógicas.

(3b) Analise o que acontece se definimos:
(D_1) $\forall x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{V}$
(D_2) $\forall x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{F}$
(D_3) $\exists x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{V}$
(D_4) $\exists x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{F}$
Quais destas definições devem valer? Porquê?

(4) Compare o exercício 3 com a discussão do livro (pags 45-47) sobre o valor de $0!$. Repare que 1 é o elemento neutro do produto: $x \cdot 1 = x$.

Lembre que podemos usar a nossa noção de "redução" para calcular o valor de verdade de cada uma das expressões $E_0, \ldots, E_7$ - desde que conheçamos os conjuntos A e B e a proposição $P(x)$. Por exemplo, se $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ e $P(x) = (x=3)$,

$$\begin{array}{ccc}
\forall x \in A \cup B.\ P(x) & \rightsquigarrow & \forall x \in A \cup B.\ x=3 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\forall x \in \{1,2,3\}.\ P(x) & \rightsquigarrow & \forall x \in \{1,2,3\}.\ x=3 \\
\downarrow & & \downarrow \\
P(1) \land P(2) \land P(3) & \rightsquigarrow & 1=3 \land 2=3 \land 3=3 \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \rightsquigarrow \mathbf{F}.
\end{array}$$

Nós quase sempre temos vários caminhos de redução possíveis - e neste caso se só damos os dois primeiros passos pra baixo descobrimos que:

$$\begin{array}{c}
\forall x \in A \cup B.\ P(x) \\
\| \\
P(1) \land P(2) \land P(3)
\end{array}$$

(ou: $(\forall x \in A \cup B.\ P(x)) \leftrightarrow (P(1) \land P(2) \land P(3))$)
E isto vale para qualquer "valor" para P - já que não substituímos $P(x)$ por $x=3$ nenhuma vez - desde que $A=\{1,2\}$ e $B=\{2,3\}$.

(1) Use esta idéia pra provar que quando $A=\{1,2\}$ e $B=\{2,3\}$ temos
$$E_1 \leftrightarrow E_3$$
para qualquer proposição $P(x)$.

(2) Mostre que se $A=\{4,5,6\}$ e $B=\{5,6,7\}$ então E_1 e E_3 podem não ser equivalentes.

(3) Sabemos "reduzir" expressões como
$\forall a \in A.\ P(a)$ e $\exists a \in A.\ P(a)$
quando A é um conjunto finito não-vazio.
E repare:

$$\begin{array}{c}
\forall a \in \{1,2,3,4,5\}.\ P(a) \\
\downarrow \\
P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4) \land P(5)
\end{array}$$

$\forall a \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.\ P(a)$ ⇦ quando A tem n elementos
$\downarrow$
$P(a_1) \land P(a_2) \land \ldots \land P(a_n)$ ⇦ a "redução" tem n ocorrências de $P(a)$

Então é razoável esperar que quando A é $\emptyset$ (o conjunto vazio; outra notação para $\emptyset$ é $\{\}$) então a "redução" deve ter zero ocorrências de $P(a)$.

(3a) Mostre que quando $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ temos
$(\forall x \in A \cup B.\ P(x)) \leftrightarrow (\forall x \in A.\ P(x)) \land (\forall x \in B.\ P(x))$
e $(\exists x \in A \cup B.\ P(x)) \leftrightarrow (\exists x \in A.\ P(x)) \lor (\exists x \in B.\ P(x))$.