MATEMÁTICA DISCRETA
PURO - UFF
8/ABRIL/2010

GABARITO DOS EXERCÍCIOS SOBRE EXPRESSÕES EQUIVALENTES

SE $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$ ENTÃO:

$E_0 \leadsto \forall x\in\{1,2\}\cup\{2,3\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto \forall x\in\{1,2,3\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)$

$E_1 \leadsto \forall x\in\{1,2\}\cap\{2,3\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto \forall x\in\{2\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto P(2)$

$E_2 \leadsto \exists x\in\{1,2\}\cup\{2,3\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto \exists x\in\{1,2,3\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto P(1)\vee P(2)\vee P(3)$

$E_3 \leadsto \exists x\in\{1,2\}\cap\{2,3\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto \exists x\in\{2\}.\, P(x)$
$\quad\leadsto P(2)$

$E_4 \leadsto \forall x\in\{1,2\}.\, (x\in\{2,3\}\to P(x))$
$\quad\leadsto (1\in\{2,3\}\to P(1))\wedge(2\in\{2,3\}\to P(2))$
$\quad\leadsto (\mathbf{F}\to P(1))\wedge(\mathbf{V}\to P(2))$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} \mathbf{V}\wedge P(2)$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} P(2)$

$E_5 \leadsto \forall x\in\{1,2\}.\, (x\in\{2,3\}\wedge P(x))$
$\quad\leadsto$ [redacted] $(1\in\{2,3\}\wedge P(1))\wedge(2\in\{2,3\}\wedge P(2))$
$\quad\leadsto (\mathbf{F}\wedge P(1))\wedge(\mathbf{V}\wedge P(2))$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} \mathbf{F}\wedge P(2)$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} \mathbf{F}$

$E_6 \leadsto \exists x\in\{1,2\}.\, (x\in\{2,3\}\to P(x))$
$\quad\leadsto (1\in\{2,3\}\to P(1))\vee(2\in\{2,3\}\to P(2))$
$\quad\leadsto (\mathbf{F}\to P(1))\vee(\mathbf{V}\to P(2))$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} \mathbf{V}\vee P(2)$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} \mathbf{V}$

$E_7 \leadsto \exists x\in\{1,2\}.\, (x\in\{2,3\}\wedge P(x))$
$\quad\leadsto (1\in\{2,3\}\wedge P(1))\vee(2\in\{2,3\}\wedge P(2))$
$\quad\leadsto (\mathbf{F}\wedge P(1))\vee(\mathbf{V}\wedge P(2))$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} \mathbf{F}\vee P(2)$
$\quad\overset{(*)}{\leadsto} P(2)$

REPARE QUE PARA QUALQUER VALOR DE VERDADE Q TEMOS:

Q	$F\wedge Q$	$V\wedge Q$	$F\vee Q$	$V\vee Q$	$F\to Q$	$V\to Q$	V	F
F	F	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	F

ENTÃO TEMOS:

$\mathbf{F}\wedge Q = \mathbf{F}$
$\mathbf{V}\wedge Q = Q$
$\mathbf{F}\vee Q = Q$
$\mathbf{V}\vee Q = \mathbf{V}$
$\mathbf{F}\to Q = \mathbf{V}$
$\mathbf{V}\to Q = Q$

PODEMOS CONSIDER CADA UMA DESTAS IGUALDADES COMO UMA REGRA DE REDUÇÃO:

$\mathbf{F}\wedge Q \leadsto \mathbf{F}$
$\mathbf{V}\wedge Q \leadsto Q$
$\mathbf{F}\vee Q \leadsto Q$
$\mathbf{V}\vee Q \leadsto \mathbf{V}$
$\mathbf{F}\to Q \leadsto \mathbf{V}$
$\mathbf{V}\to Q \leadsto Q$

ISTO JUSTIFICA AS REDUÇÕES MARCADAS COM "(*)" À ESQUERDA. POR EXEMPLO:

$(\mathbf{F}\to P(1))\wedge(\mathbf{V}\to P(2))$
$\quad\}(*)\quad \Leftarrow$ POR $\mathbf{F}\to Q\leadsto\mathbf{V}$ E $\mathbf{V}\to Q\leadsto Q$
$\mathbf{V}\wedge P(2)$
$\quad\}(*)\quad \Leftarrow$ POR $\mathbf{V}\wedge Q\leadsto Q$
$P(2)$

TAMBÉM PODERÍAMOS TER PENSADO NOS "$\overset{(*)}{\leadsto}$"S COMO IGUALDADES:

$(\mathbf{F}\to P(1))\wedge(\mathbf{V}\to P(2))$
$\quad \| \quad \Leftarrow$ PORQUE $\mathbf{F}\to Q=\mathbf{V}$ E $\mathbf{V}\to Q = Q$
$\mathbf{V}\wedge P(2)$
$\quad \| \quad \Leftarrow$ PORQUE $\mathbf{V}\wedge Q = Q$
$P(2)$

MAS O QUE IMPORTA É QUE CONSEGUIMOS DESCOBRIR QUE SE $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$, ENTÃO:

$E_0 = P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)$
$E_1 = P(2)$
$E_2 = P(1)\vee P(2)\vee P(3)$
$E_3 = P(2)$
$E_4 = P(2)$
$E_5 = \mathbf{F}$
$E_6 = \mathbf{V}$
$E_7 = P(2)$

NO SENTIDO DE "O RESULTADO FINAL" - UM VALOR DE VERDADE, ISTO É, **V** OU **F**

SÓ PODEMOS CALCULAR O "RESULTADO" DE $E_0, E_1, \dots, E_7$ SE SABEMOS QUEM É A PROPOSIÇÃO $P(x)$ (LEMBRE QUE JÁ FIXAMOS $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$!)... O "VALOR" DE $E_0, E_1, \dots, E_7$ DEPENDE DA PROPOSIÇÃO $P(x)$, COMO O VALOR DE UMA EXPRESSÃO COMO x^2+1 DEPENDE DO VALOR DE x, E PODEMOS FAZER UMA TABELA,

	F	$P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)$	$P(2)$	$P(1)\vee P(2)\vee P(3)$	V
$P(x)=\mathbf{F}$	F	F	F	F	V
$P(x)=(x=3)$	F	F	F	V	V
$P(x)=(x=2)$	F	F	V	V	V
$P(x)=\mathbf{V}$	F	V	V	V	V

QUE MOSTRA QUE AS EXPRESSÕES **F**, $P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)$, $P(2)$, $P(1)\vee P(2)\vee P(3)$ E **V** NÃO SÃO EQUIVALENTES.
ISTO NOS MOSTRA QUE AS EXPRESSÕES E_5, E_0, E_2 E E_6

CONTINUA

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO-UFF
8/ABRIL/2010
(CONTINUAÇÃO)

(GABARITO DOS EXERCÍCIOS SOBRE EXPRESSÕES EQUIVALENTES - CONTINUAÇÃO)

... NÃO SÃO EQUIVALENTES A NENHUMA DAS OUTRAS; MAS AINDA NÃO SABEMOS QUAIS DAS EXPRESSÕES E_1, E_3, E_4 E E_7 VÃO SER SEMPRE EQUIVALENTES ENTRE SI — O QUE VIMOS ATÉ AGORA É QUE QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$ TEMOS

$$E_1 = E_3 = E_4 = E_7 = P(2).$$

① COMO VIMOS ACIMA, QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$ TEMOS $E_1 = P(2)$ E $E_3 = P(2)$. PODEMOS FAZER UMA TABELA COM O VALOR DE $E_1 \leftrightarrow E_3$ COMO FUNÇÃO DO VALOR DE $P(2)$:

$P(2)$	E_1	E_3	$E_1 \leftrightarrow E_3$
F	**F**	**F**	**V**
V	**V**	**V**	**V**

ISTO É UMA "PROVA PELA TABELA VERDADE" (VEJA A SEÇÃO 5 DO LIVRO) DE QUE $E_1 \leftrightarrow E_3$ É SEMPRE VERDADE (QUANDO $A=\{1,2\}$ E $B=\{2,3\}$).

② SE $A=\{4,5,6\}$ E $B=\{5,6,7\}$ ENTÃO:

$$E_1 \rightsquigarrow \forall x \in A \cap B.\ P(x) \rightsquigarrow \forall x \in \{5,6\}.\ P(x) \rightsquigarrow P(5) \land P(6)$$

$$E_3 \rightsquigarrow \exists x \in A \cap B.\ P(x) \rightsquigarrow \exists x \in \{5,6\}.\ P(x) \rightsquigarrow P(5) \lor P(6)$$

SE $P(x) = (x=5)$ ENTÃO:

$$P(5) \land P(6) \rightsquigarrow 5=5 \land \mathbf{6=5} \rightsquigarrow \mathbf{V} \land \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}$$

$$P(5) \lor P(6) \rightsquigarrow 5=5 \lor 6=5 \rightsquigarrow \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{V}$$

CONSEGUIMOS UM CASO [redacted] — $A=\{4,5,6\}$, $B=\{5,6,7\}$, $P(x)=(x=5)$ — NO QUAL $E_1 = \mathbf{F}$ E $E_3 = \mathbf{V}$; ISTO MOSTRA QUE E_1 E E_3 NÃO SÃO EQUIVALENTES.

(3a) COMO POR ENQUANTO SÓ ESTAMOS LIDANDO COM CONJUNTOS FINITOS, PODEMOS SUPOR QUE $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ E $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, ONDE m E n SÃO NÚMEROS NATURAIS POSITIVOS. (EXEMPLO: SE $A=\{\{1,2\},3\}$ E $B=\{(4,5,6)\}$ ENTÃO $m=2$, $a_1=\{1,2\}$, $a_2=3$, $n=1$, $b_1=(4,5,6)$)

AÍ $A \cup B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$;

NOTE QUE ISTO VALE MESMO QUANDO A E B TÊM ELEMENTOS EM COMUM: SE $A=\{4,5,6\}$ E $B=\{5,6,7\}$ ENTÃO $A \cup B = \{4,5,6,5,6,7\} = \{4,5,6,7\}$.

ENTÃO:

$$\forall x \in A \cup B.\ P(x) \rightsquigarrow \forall x \in \{a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n\}.\ P(x) \rightsquigarrow P(a_1) \land \ldots \land P(a_m) \land P(b_1) \land \ldots \land P(b_n)$$

$$(\forall x \in A.\ P(x)) \land (\forall x \in B.\ P(x)) \rightsquigarrow (\forall x \in \{a_1,\ldots,a_m\}.\ P(x)) \land (\forall x \in \{b_1,\ldots,b_n\}.\ P(x)) \rightsquigarrow (P(a_1) \land \ldots \land P(a_m)) \land (P(b_1) \land \ldots \land P(b_m))$$

$$P(a_1) \land \ldots \land P(a_m) \land P(b_1) \land \ldots \land P(b_n) = (P(a_1) \land \ldots \land P(a_m)) \land (P(b_1) \land \ldots \land P(b_m))$$

E:

$$\exists x \in A \cup B.\ P(x) \rightsquigarrow \exists x \in \{a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n\}.\ P(x) \rightsquigarrow P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m) \lor P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_n)$$

$$(\exists x \in A.\ P(x)) \lor (\exists x \in B.\ P(x)) \rightsquigarrow (\exists x \in \{a_1,\ldots,a_m\}.\ P(x)) \lor (\exists x \in \{b_1,\ldots,b_n\}.\ P(x)) \rightsquigarrow (P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m)) \lor (P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_m))$$

$$P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m) \lor P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_n) = (P(a_1) \lor \ldots \lor P(a_m)) \lor (P(b_1) \lor \ldots \lor P(b_m))$$

(3b) AINDA NÃO TEMOS REGRAS DE REDUÇÃO PARA EXPRESSÕES DA FORMA $\forall x \in \emptyset.\ P(x)$ E $\exists x \in \emptyset.\ P(x)$; VAMOS TESTAR AS REGRAS DE REDUÇÃO

(D_1) $\forall x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{V}$
(D_2) $\forall x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{F}$
(D_3) $\exists x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{V}$
(D_4) $\exists x \in \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \mathbf{F}$

E VER O QUE ACONTECE COM $\forall x \in A \cup \emptyset.\ P(x)$, $(\forall x \in A.\ P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.\ P(x))$, $\exists x \in A \cup \emptyset.\ P(x)$, $(\exists x \in A.\ P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.\ P(x))$ QUANDO ELAS VALEM.

SE $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$, ENTÃO:

$$\forall x \in A \cup \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \forall x \in A.\ P(x)$$

$$(\forall x \in A.\ P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.\ P(x)) \xrightarrow{\text{(POR } D_1\text{)}} (\forall x \in A.\ P(x)) \land \mathbf{V} \rightsquigarrow \forall x \in A.\ P(x)$$

$$(\forall x \in A.\ P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.\ P(x)) \xrightarrow{\text{(POR } D_2\text{)}} (\forall x \in A.\ P(x)) \land \mathbf{F} \rightsquigarrow \mathbf{F}$$

E:

$$\exists x \in A \cup \emptyset.\ P(x) \rightsquigarrow \exists x \in A.\ P(x)$$

$$(\exists x \in A.\ P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.\ P(x)) \xrightarrow{\text{(POR } D_4\text{)}} (\exists x \in A.\ P(x)) \lor \mathbf{F} \rightsquigarrow \exists x \in A.\ P(x)$$

$$(\exists x \in A.\ P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.\ P(x)) \xrightarrow{\text{(POR } D_3\text{)}} (\exists x \in A.\ P(x)) \lor \mathbf{V} \rightsquigarrow \mathbf{V}$$

OU SEJA: AS REGRAS D_1 E D_4 FAZEM COM QUE AS IGUALDADES DO ITEM ANTERIOR,

$$(\forall x \in A \cup B.\ P(x)) = (\forall x \in A.\ P(x)) \land (\forall x \in B.\ P(x))$$

E

$$(\exists x \in A \cup B.\ P(x)) = (\exists x \in A.\ P(x)) \lor (\exists x \in B.\ P(x)),$$

QUE TÍNHAMOS VISTO QUE VALIAM QUANDO $A \neq \emptyset$ E $B \neq \emptyset$, CONTINUEM VALENDO QUANDO $B = \emptyset$.