Matemática Discreta
PURO/UFF - 2010.2
8/setembro/2010

Proposições, lemas, etc

Na última aula vimos estas definições:
Se A e B são conjuntos então:

Def: se $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ então $x\in A$ se e só se $x=a_1 \lor x=a_2 \lor \dots \lor x=a_n$.

Def: $A\subseteq B$ ("A está contido ou é igual a B") se e só se $\forall a\in A.\, a\in B$.

Def: $A=B$ se e só se $A\subseteq B \land B\subseteq A$.

Obs: A "pronúncia" de $x\in A$ é "x pertence a A" ou "x é elemento de A"; uma pronúncia alternativa para $A\subseteq B$ é "A é subconjunto de B". Repare que $A\in B$ e $A\subseteq B$ são expressões diferentes, com significados precisos e diferentes entre si... Não confunda as duas, e cuidado pra não escrever algo como "A está dentro de B"... isto é ambíguo!

Voltando: vimos que $\{1,2\}=\{1,1,2\}$, e vimos que a demonstração disto pode ou ser feita do modo mais óbvio – como uma conta enorme – ou pode ser dividida em várias partes, usando "lemas":

Proposição 1. $\{1,2\}=\{1,1,2\}$.

Para demonstrar a proposição 1 vamos usar dois lemas.

Lema 1.1. $\{1,2\}\subseteq\{1,1,2\}$.

Demonstração (do lema 1.1):

$$
\begin{array}{l}
\{1,2\}\subseteq\{1,1,2\} \\
\Downarrow \ \text{Pela def. de } A\subseteq B, \text{ com } A=\{1,2\} \text{ e } B=\{1,1,2\} \\
\forall a\in\{1,2\}.\, a\in\{1,1,2\} \\
\Downarrow \ \text{Expandindo o "}\forall\text{"} \\
(1\in\{1,1,2\})\land(2\in\{1,1,2\}) \\
\Downarrow \ \text{Expandindo os "}\in\text{"s} \\
(1=1\lor 1=1\lor 1=2)\land(2=1\lor 2=1\lor 2=2) \\
\Downarrow \\
(V\lor V\lor F)\land(F\lor F\lor V) \\
\Downarrow \\
V\land V \\
\Downarrow \\
V
\end{array}
$$

Lema 1.2. $\{1,1,2\}\subseteq\{1,2\}$.

Demonstração (do lema 1.2):

$$
\begin{array}{l}
\{1,1,2\}\subseteq\{1,2\} \\
\Downarrow \\
\forall a\in\{1,1,2\}.\, a\in\{1,2\} \\
\Downarrow \ \text{Idem} \\
1\in\{1,2\}\land 1\in\{1,2\}\land 2\in\{1,2\} \\
\Downarrow \ \text{Idem} \\
V\land V\land V \\
\Downarrow \\
V
\end{array}
$$

Já fizemos um passo parecido com este no lema anterior, então agora podemos supor que o leitor já aprendeu a fazer passos assim com detalhes, e podemos ir mais rápido.

Agora podemos demonstrar a proposição 1.

Demonstração (da proposição 1):

$$
\begin{array}{l}
\{1,2\}=\{1,1,2\} \\
\Downarrow \ \text{Pela def. da igualdade em conjuntos} \\
(\{1,2\}\subseteq\{1,1,2\})\land(\{1,1,2\}\subseteq\{1,2\}) \\
\Downarrow \ \text{Pelos lemas 1.1 e 1.2} \\
V\land V \\
\Downarrow \\
V
\end{array}
$$

Repare que poderíamos ter provado lemas mais gerais, como por exemplo:

Lema 1.1'. $\{a,b\}\subseteq\{a,a,b\}$.

Lema 1.2'. $\{a,a,b\}\subseteq\{a,b\}$.

E repare que na demonstração acima quando chegamos ao passo:

$$
\begin{array}{l}
(\{1,2\}\subseteq\{1,1,2\})\land(\{1,1,2\}\subseteq\{1,2\}) \\
\Downarrow \ \text{Pelos lemas 1.1 e 1.2} \\
V\land V
\end{array}
$$

nós já demonstramos os lemas 1.1 e 1.2, e o leitor sabe que esta redução é válida... O que o leitor mais atento vai se perguntar é: "como é que esse cara adivinhou que tinha que começar provando esses lemas?" – mas o que acontece é que em geral a gente escreve demonstrações na ordem mais convincente, que não é a ordem em que a gente as descobre... O rascunho pra demonstração de $\{1,2\}=\{1,1,2\}$ seria algo assim:

$$
\begin{array}{l}
\{1,2\}=\{1,1,2\} \\
\Downarrow \\
(\{1,2\}\subseteq\{1,1,2\})\land(\{1,1,2\}\subseteq\{1,2\}) \\
\Downarrow \ \text{Acho que sei provar os dois "}\subseteq\text{"s... vou chamar estas provas de lemas 1.1 e 1.2.} \\
V\land V
\end{array}
$$