Matemática Discreta
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
8/novembro/2010

Gramáticas

Usando construções indutivas podemos definir o conjunto das expressões válidas. O Hopcroft/Ullman/Motwani é todo sobre isto... Isto é um assunto avançado, mas os exemplos básicos são bem fáceis de entender, e bem úteis.

No final de qualquer livro sobre uma linguagem de programação você sempre encontra uma "especificação em BNF" da linguagem. Isto é um exemplo de uma especificação em BNF: (obs: este eu tirei do manual do Bison)

```
expr:  term '+' expr
     | term
     ;
term:  '(' expr ')'
     | term '!'
     | NUMBER
     ;
```

Um modo de traduzí-lo para matematiquês é o seguinte (vou simplificar o "NUMBER"):

$$\mathbb{D} = \{\text{"0"}, \text{"1"}, \text{"2"}, \text{"3"}, \text{"4"}, \text{"5"}, \text{"6"}, \text{"7"}, \text{"8"}, \text{"9"}\}$$
$$\mathbb{E}_0 = \emptyset$$
$$\mathbb{T}_0 = \emptyset$$

e para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_{n+1} = \{t..\text{"+"}..e \mid t \in \mathbb{T}_n,\ e \in \mathbb{E}_n\} \cup \{t \mid t \in \mathbb{T}_n\} \cup \mathbb{E}_n \cup \mathbb{T}_n$$
$$\mathbb{T}_{n+1} = \{\text{"("}..e..\text{")"} \mid e \in \mathbb{E}_n\} \cup \{t..\text{"!"} \mid t \in \mathbb{T}_n\} \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{T}_n$$

Na última aula - 4ª, 3/novembro - vimos uma prova em árvore de que $2^{777} < 777!$. Os conjuntos $\mathbb{E}_0, \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \ldots$, $\mathbb{T}_0, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2, \ldots$ são finitos, mas bem grandes - não vale a pena calculá-los explicitamente - mas quem entendeu a prova da aula passada deve entender que esta árvore aqui é uma prova de que $\text{"(1+2)+3!"} \in \mathbb{E}_5$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{"1"} \in \mathbb{D}}{\text{"1"} \in \mathbb{T}_1}}{\text{"1"} \in \mathbb{T}_2} \quad \dfrac{\dfrac{\text{"2"} \in \mathbb{D}}{\text{"2"} \in \mathbb{T}_1}}{\text{"2"} \in \mathbb{E}_2}}{\text{"1+2"} \in \mathbb{E}_3}}{\text{"(1+2)"} \in \mathbb{T}_4} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{"3"} \in \mathbb{D}}{\text{"3"} \in \mathbb{T}_1}}{\text{"3"} \in \mathbb{T}_2}}{\text{"3!"} \in \mathbb{T}_3}}{\text{"3!"} \in \mathbb{E}_4}}{\text{"(1+2)+3!"} \in \mathbb{E}_5}$$

Exercícios:

1a) Prove que $\text{"1+2!"} \in \mathbb{E}_4$.

1b) Explique - em português - porque cada um dos passos da árvore acima é válido.

Matemática Discreta
PURO/UFF - 2010.2
Prof: Eduardo Ochs
8/novembro/2010

Gramáticas (cont.)

Um outro modo de definir o conjunto das "expressões válidas formadas a partir de dígitos e de '+' e '!'" é a partir destas equações:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \{ t..\text{"+"}..e \mid t\in\mathbb{T},\ e\in\mathbb{E} \} \\ &\quad \cup\ \mathbb{T} \\ \mathbb{T} &= \{ \text{"("}..e..\text{")"} \mid e\in\mathbb{E} \} \\ &\quad \cup\ \{ t..\text{"!"} \mid t\in\mathbb{T} \} \\ &\quad \cup\ \mathbb{D} \end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \{ a_1..\text{"+"}..a_2 \mid a_1, a_2\in\mathbb{A} \} \\ &\quad \cup\ \{ \text{"("}..a..\text{")"} \mid a\in\mathbb{A} \} \\ &\quad \cup\ \{ a..\text{"!"} \mid a\in\mathbb{A} \} \\ &\quad \cup\ \mathbb{D} \end{aligned}$$

Agora os conjuntos $\mathbb{E}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{A}$ vão ser infinitos, mas sabemos provar que cada "expressão válida" pertence a eles:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{"1"}\in\mathbb{D}}{\text{"1"}\in\mathbb{T}} \quad \dfrac{\dfrac{\text{"2"}\in\mathbb{D}}{\text{"2"}\in\mathbb{T}}}{\text{"2"}\in\mathbb{E}}}{\text{"1+2"}\in\mathbb{E}}}{\text{"(1+2)"}\in\mathbb{T}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{"3"}\in\mathbb{D}}{\text{"3"}\in\mathbb{T}}}{\text{"3!"}\in\mathbb{T}}}{\text{"3!"}\in\mathbb{E}}}{\text{"(1+2)+3!"}\in\mathbb{E}}$$

Note que temos duas provas diferentes de que "1+2!" $\in\mathbb{A}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{"1"}\in\mathbb{D}}{\text{"1"}\in\mathbb{A}} \quad \dfrac{\text{"2"}\in\mathbb{D}}{\text{"2"}\in\mathbb{A}}}{\text{"1+2"}\in\mathbb{A}}}{\text{"1+2!"}\in\mathbb{A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{"1"}\in\mathbb{D}}{\text{"1"}\in\mathbb{A}} \quad \dfrac{\dfrac{\text{"2"}\in\mathbb{D}}{\text{"2"}\in\mathbb{A}}}{\text{"2!"}\in\mathbb{A}}}{\text{"1+2!"}\in\mathbb{A}}$$

A da direita corresponde à prova do exercício (1a), de que "1+2!" $\in\mathbb{E}_4$; a da esquerda é nova.

Exercícios:

(2a) Encontre duas provas diferentes de que "1+2+3" $\in\mathbb{A}$.

(2b) Encontre uma prova de que "1+2+3" $\in\mathbb{E}$.

(2c) Encontre uma prova de que "1+2+3" $\in\mathbb{E}_4$.

Valores de expressões

Digamos que $R\subseteq\mathbb{E}\times\mathbb{N}$ é uma relação que obedece estas equações:

$t\in\mathbb{T}$, $(t,n_1)\in R$

$$\begin{aligned} R &\supseteq \{ (t..\text{"+"}..e,\ n_1+n_2) \mid \cancel{(t,n_1)\in R},\ (e,n_2)\in R \} \\ R &\supseteq \{ (\text{"("}..e..\text{")"},\ n) \mid (e,n)\in R \} \\ R &\supseteq \{ (t..\text{"!"},\ n!) \mid t\in\mathbb{T},\ (t,n)\in R \} \\ R &\supseteq \{ (\text{"0"},0), (\text{"1"},1), \ldots, (\text{"9"},9) \} \end{aligned}$$

Exercícios:

(2d) Explique - em português - cada passo da prova abaixo:

$$\dfrac{\dfrac{\text{"1"}\in\mathbb{D}}{\text{"1"}\in\mathbb{T}} \quad (\text{"1"},1)\in R \quad (\text{"2"},2)\in R}{(\text{"1+2"},3)\in R}$$

(2e) Prove que ("2+3!", 8) $\in R$.

(2f) Adapte as equações acima para encontrar equações sobre uma relação $S\subseteq\mathbb{A}\times\mathbb{N}$.

(2g) Prove que ("2+3!", 8) $\in S$.

(2h) Adapte esta prova para obter uma prova de que ("2+3!", 120) $\in S$.

Sistemas dedutivos

Você deve estar começando a perceber que dá pra definir formalmente o conjunto das expressões válidas e como calcular os seus valores. Também podemos definir o conjunto das proposições válidas, e a partir dele o conjunto das "barras válidas" e o das árvores nas quais cada barra é uma dedução válida...

MATEMÁTICA DISCRETA
PURO/UFF - 2010.2
PROF: EDUARDO OCHS
17/NOVEMBRO/2010

SISTEMAS DEDUTIVOS

NUMA DAS ÚLTIMAS AULAS NÓS CHEGAMOS, EM SALA, A UMA PROVA DE $2^{777} < 777!$ QUE CONVENCEU TODO MUNDO:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{2^4 < 4!}{2 \cdot 2^4 < 5 \cdot 4!}p'''}{2 \cdot 2 \cdot 2^4 < 6 \cdot 5 \cdot 4!}p'''}{\vdots}p'''}{2^{777} < 777!}p'''$$

MAS TÍNHAMOS UM PROBLEMA: A REGRA

$$\dfrac{0<a<b \quad 0<c<d}{0<ac<bd}p''$$

NÃO É UMA DAS REGRAS QUE APARECEM NO APÊNDICE C DO SCHEINERMAN COMO UMA DAS REGRAS BÁSICAS... ELA É CONSEQÜÊNCIA DAS REGRAS BÁSICAS - ELA PODE SER PROVADA COMO UM TEOREMA, E A PARTIR DAÍ PODEMOS USÁ-LA COMO UMA NOVA REGRA DE DEDUÇÃO.

AS NOSSAS REGRAS BÁSICAS VÃO SER ESTAS:

$$\dfrac{\alpha<\beta \quad \beta<\gamma}{\alpha<\gamma}T \qquad \text{("TRANSITIVIDADE")}$$

$$\dfrac{\beta<\gamma}{\alpha+\beta<\alpha+\gamma}S \qquad \text{("SOMA")}$$

$$\dfrac{0<\alpha \quad \beta<\gamma}{\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma}P \qquad \text{("PRODUTO")}$$

$$\dfrac{\alpha<\beta}{\alpha'<\beta'}A \qquad \text{("ÁLGEBRA")}$$

ONDE $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ SÃO EXPRESSÕES, E A REGRA A SÓ PODE SER APLICADA QUANDO SABEMOS QUE AS EXPRESSÕES α E α' "TÊM O MESMO VALOR", E β E β' TAMBÉM.

VAMOS INTERPRETAR EXPRESSÕES COMO STRINGS, E SABEMOS QUE "$2\cdot3$" $\neq$ "$3\cdot2$"; A REGRA A É A QUE NOS PERMITE PROVAR COISAS COMO:

$$\dfrac{2\cdot2^4<5\cdot4!}{2^5<5!}A$$

VAMOS USAR A NOTAÇÃO

$$\dfrac{P \quad Q \quad R}{S},$$

COM UMA BARRA DUPLA, COMO UMA ABREVIAÇÃO PARA UMA DEDUÇÃO DA CONCLUSÃO, S, A PARTIR DAS HIPÓTESES P, Q E R, USANDO SÓ REGRAS QUE CONSIDERAMOS "BÁSICAS", E VAMOS USAR A NOTAÇÃO

$$\dfrac{P \quad Q \quad R}{S}T_1 \Longleftarrow \boxed{\text{NOME DO TEOREMA!}}$$

PRA INDICAR QUE ALÉM DISTO ESTAMOS DEFININDO UMA REGRA NOVA.

EXEMPLO:

TEOREMA (T'):

$$\dfrac{a<b \quad b<c \quad c<d}{a<d}T'$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\dfrac{\dfrac{a<b \quad b<c}{a<c}T \quad c<d}{a<d}T$$

TEOREMA: (T''):

$$\dfrac{a<b \quad b<c \quad c<d \quad d<e}{a<e}T''$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\dfrac{\dfrac{a<b \quad b<c \quad c<d}{a<d}T' \quad d<e}{a<e}T$$

REPARE QUE SE EXPANDIMOS O T' NA DEMONSTRAÇÃO ACIMA OBTEMOS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a<b \quad b<c}{a<c}T \quad c<d}{a<d}T \quad d<e}{a<e}T$$

QUE É UMA DEMONSTRAÇÃO DE T'' QUE ENVOLVE SÓ AS REGRAS BÁSICAS ORIGINAIS.