

EXERCÍCIOS SOBRE SISTEMAS DEDUTIVOS

LEMBRE QUE ESTAMOS TRABALHANDO COM ESTES QUATRO "AXIOMAS", OU "REGRAS";

$$\frac{\alpha < \beta \quad \beta < \gamma}{\alpha < \gamma} T \quad (\text{"TRANSITIVIDADE"}),$$

$$\frac{\alpha < \beta}{\alpha' < \beta'} A \quad (\text{"ÁLGEBRA"}; \text{AQUI } \alpha \text{ E } \alpha' \text{ SÃO EXPRESSÕES QUE PODEMOS PROVAR POR MANIPULAÇÕES ALGÉBRICAS QUE SÃO "NUMERICAMENTE IGUAIS", E IDEM PARA } \beta \text{ E } \beta'),$$

$$\frac{\beta < \gamma}{\alpha + \beta < \alpha + \gamma} S \quad (\text{"SOMA"}),$$

$$\frac{0 < \alpha \quad 0 < \beta}{0 < \alpha \cdot \beta} P_0 \quad (\text{"PRODUTO"}).$$

① PROVE OS QUATRO LEMAS ABAIXO,

$$\frac{a < b}{0 < b - a} L_A \quad (\text{"LEMA A"}),$$

$$\frac{0 < b - a}{a < b} L_B \quad (\text{"LEMA B"}),$$

$$\frac{0 < a \quad b < c}{ab < ac} L_C \quad (\text{"LEMA C"}),$$

$$\frac{0 < a \quad a < b \quad 0 < c \quad c < d}{ac < bd} L_D \quad (\text{"LEMA D"}).$$

USANDO SÓ AS REGRAS T, A, S, P₀ E OS LEMAS ANTERIORES; OU SEJA, NA DEMONSTRAÇÃO DO L_A VOCÊ SÓ PODE USAR T, A, S, P₀, MAS NA DEMONSTRAÇÃO DO L_D VOCÊ PODE USAR AS "REGRAS" T, A, S, P₀, L_A, L_B, L_C. REPARE QUE CADA LEMA QUE PROVAMOS SE TRANSFORMA NUMA REGRA NOVA QUE PODEMOS USAR EM DEMONSTRAÇÕES FUTURAS.

② "EXPANDA" CADA USO DOS LEMAS L_A, L_B, L_C NA SUA DEMONSTRAÇÃO DO LEMA L_D, ISTO É, TROQUE CADA BARRA MARCADA COM "L_A" PELA DEMONSTRAÇÃO DO L_A, TROQUE CADA BARRA MARCADA COM "L_B" PELA DEMONSTRAÇÃO DO L_B, ETC; O RESULTADO DEVE SER UMA DEMONSTRAÇÃO (GRANDE!) DE L_D USANDO SÓ AS REGRAS T, A, S, P₀.

CONECTIVOS LÓGICOS: "Λ" ("E")

A NOTAÇÃO " $\alpha < \beta < \gamma$ " É UMA ABREVIATURA PARA " $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma$ ". AS REGRAS DE DEDUÇÃO QUE NOS PERMITEM MANIPULAR PROPOSIÇÕES COM O "Λ" SÃO ESTAS AQUI:

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E_1 \quad (\text{"ELIMINAÇÃO DO 'E', VERSÃO 1"}),$$

$$\frac{P \wedge Q}{Q} \wedge E_2 \quad (\text{"ELIMINAÇÃO DO 'E', VERSÃO 2"}),$$

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \wedge I \quad (\text{"INTRODUÇÃO DO 'E'"}).$$

ADAPTANDO-AS PARA A NOTAÇÃO $\alpha < \beta < \gamma$, TEMOS:

$$\frac{\alpha < \beta < \gamma}{\alpha < \beta} \wedge E_1 \quad \frac{\alpha < \beta < \gamma}{\beta < \gamma} \wedge E_2$$

$$\frac{\alpha < \beta \quad \beta < \gamma}{\alpha < \beta < \gamma} \wedge I$$

③ DEMONSTRE ISTO:

$$\frac{0 < a < b \quad 0 < c < d}{0 < ac < bd} L_E \quad (\text{"LEMA E"})$$

VOCÊ PODE USAR TODAS AS REGRAS DEFINIDAS ATÉ AGORA: T, A, S, P₀, L_A, L_B, L_C, L_D, $\wedge E_1$, $\wedge E_2$, $\wedge I$.

④ DEMONSTRE QUE $2^{10} < 10!$ E LEMAS... TENTE USAR SÓ AS REGRAS QUE DEFINIMOS ATÉ AGORA.

⑤ ~~DEMONSTRE~~ DEMONSTRE QUE $2^{777} < 777!$. AGORA VOCÊ PODE USAR RETICÊNCIAS ("...") NA SUA ÁRVORE. TENTE USAR AS RETICÊNCIAS DO MODO MAIS CLARO POSSÍVEL. DISCUTA COM OS SEUS COLEGAS.

DICAS E SUGESTÕES PARA O ④ E O ⑤:

a) VOCÊ PODE TER REGRAS E LEMAS SEM NENHUMA HIPÓTESE - POR EXEMPLO:

$$\frac{}{n < n + 4}$$

b) TENTE PROVAR

$$\frac{2 < n}{0 < n < n + 4}$$

c) VOCÊ PODE USAR LEMAS SEM NOME NO RASCUNHO, E NOMEÁ-LOS SÓ NO FINAL.

EXERCÍCIOS SOBRE SISTEMAS DEDUTIVOS

(PARTE 2: IMPLICAÇÃO)

DA MESMA FORMA QUE O "∧" TEM REGRAS DE INTRODUÇÃO E ELIMINAÇÃO, OS OUTROS CONECTIVOS E QUANTIFICADORES (→, ∨, ∀, ∃, ...) TAMBÉM TÊM...

A REGRA "→E" É FÁCIL,

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q} \rightarrow E$$

MAS A REGRA "→I" É DIFÍCIL, E VAI MERECEER QUE VOCÊ PENSE VÁRIAS HORAS SOBRE ELA PARA ENTENDÊ-LA BEM.

ELA FUNCIONA ASSIM: PARA PROVAR "Q→R" A PARTIR DE HIPÓTESES P₁, P₂, ..., P_n NÓS PRIMEIRO PROVAMOS R A PARTIR DE P₁, ..., P_n, Q,

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \quad P_n \quad Q}{R}$$

E AÍ CONSIDERAMOS QUE PODEMOS EMPURRAR A HIPÓTESE Q PARA DENTRO DA CONCLUSÃO:

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \quad P_n}{Q \rightarrow R}$$

ISTO FICA MAIS CLARO SE COMPARAMOS A NOTAÇÃO EM ÁRVORE COM A NOTAÇÃO LINHA-A-LINHA. POR EXEMPLO:

Lema ("T"):

$$\frac{a < b \quad b < c}{c < d \rightarrow a < d} T$$

ISTO É UM JARGÃO MATEMÁTICO!

DEMONSTRAÇÃO: BASTA MOSTRAR QUE:

$$\frac{a < b \quad b < c \quad c < d}{a < d} T$$

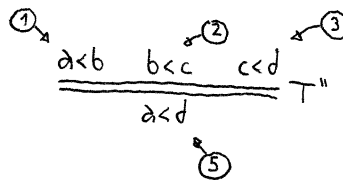
A DEMONSTRAÇÃO DE T' É:

$$\frac{\frac{a < b \quad b < c}{a < c} T \quad c < d}{a < d} T$$

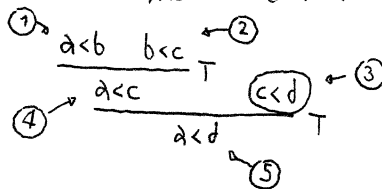
NA NOTAÇÃO LINHA-A-LINHA, ISTO FICA:

- 1) a < b (POR HIPÓTESE)
- 2) b < c (POR HIPÓTESE)
- 3) SUPONHA QUE c < d.
- 4) a < c (POR (1), (2) E T).
- 5) a < d (POR (4), (3) E T).
- 6) PORTANTO c < d → a < d.

REPRE QUE CADA UMA DAS LINHAS DE 1 A 6 ACIMA CORRESPONDE A PELO MENOS UM NÓ DAS ÁRVORES:



DEMONSTRAÇÃO DO LEMA T':



E O ENUNCIADO DO LEMA T' É:

$$\frac{a < b \quad b < c}{c < d \rightarrow a < d} T'$$

EXERCÍCIOS:

- 6) DEMONSTRE QUE $2^{20} < 20! \rightarrow 2^{21} < 21!$.
- 7) DEMONSTRE QUE $2^{21} < 21! \rightarrow 2^{22} < 22!$.
- 8) DEMONSTRE QUE $2^{20} < 20! \rightarrow 2^{22} < 22!$.
- 9) DEMONSTRE QUE SE $n > 4$ ENTÃO $2^n < n! \rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!$.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

ESTAMOS TENTANDO ENTENDER O "ESQUEMA DE PROVA 1" DO SCHEINERMAN (P.20).

TANTA GENTE SE ENROLAVA COM ELE NOS SEMESTRES PASSADOS - JÁ QUE HOJE EM DIA QUASE NINGUÉM VÊ DEMONSTRAÇÕES DIREITO NO COLÉGIO - QUE AGORA ESTAMOS TENTANDO VER DEMONSTRAÇÕES EM VÁRIAS LINGUAGENS: ÁRVORES, LINHA-A-LINHA, E PROVAS NO FORMATO DO SCHEINERMAN, QUE É UM POUCO MENOS FORMAL QUE LINHA-A-LINHA; O FORMATO DAS PROVAS QUE VOCÊ VAI VER EM LIVROS DE MATEMÁTICA, FÍSICA E TEORIA DA COMPUTAÇÃO É UM POUCO MENOS FORMAL QUE O DO SCHEINERMAN, E MAIS PRÓXIMO DE PORTUGUÊS.

OBS: NA P.18 O SCHEINERMAN FAZ UMA PROVA LINHA-A-LINHA NUM FORMATO UM POUCO MAIS LIVRE QUE O NOSSO - MAS ELE USA MUITAS REGRAS QUE AINDA NÃO VIMOS.