Matemática Discreta
2010.2 - PURO/UFF
Prof: Eduardo Ochs
21/nov/2010

Exercícios sobre sistemas dedutivos

Lembre que estamos trabalhando com estes quatro "axiomas", ou "regras":

$$\frac{\alpha<\beta \quad \beta<\gamma}{\alpha<\gamma}T$$ ("transitividade"),

$$\frac{\alpha<\beta}{\alpha'<\beta'}A$$ ("álgebra"; aqui α e α' são expressões que podemos provar por manipulações algébricas que são "numericamente iguais", e idem para β e β'),

$$\frac{\beta<\gamma}{\alpha+\beta<\alpha+\gamma}S$$ ("soma"),

$$\frac{0<\alpha \quad 0<\beta}{0<\alpha\cdot\beta}P_0$$ ("produto").

(1) Prove os quatro lemas abaixo,

$$\frac{a<b}{0<b-a}L_A$$ ("lema A"),

$$\frac{0<b-a}{a<b}L_B$$ ("lema B"),

$$\frac{0<a \quad b<c}{ab<ac}L_C$$ ("lema C"),

$$\frac{0<a \quad a<b \quad 0<c \quad c<d}{ac<bd}L_D$$ ("Lema D")

usando só as regras T, A, S, P_0 e os lemas anteriores; ou seja, na demonstração do L_A você só pode usar T, A, S, P_0, mas na demonstração do L_D você pode usar as "regras" T, A, S, P_0, L_A, L_B, L_C. Repare que cada lema que provamos se transforma numa regra nova que podemos usar em demonstrações futuras.

(2) "Expanda" cada uso dos lemas L_A, L_B, L_C na sua demonstração do lema L_D, isto é, troque cada barra marcada com "L_A" pela demonstração do L_A, troque cada barra marcada com "L_B" pela demonstração do L_B, etc; o resultado deve ser uma demonstração (grande!) de L_D usando só as regras T, A, S, P_0.

Conectivos lógicos: "$\wedge$" ("e")

A notação "$\alpha<\beta<\gamma$" é uma abreviação para "$\alpha<\beta \wedge \beta<\gamma$". As regras de dedução que nos permitem manipular proposições com o "$\wedge$" são estas aqui:

$$\frac{P\wedge Q}{P}\wedge E_1$$ ("eliminação do "e", versão 1"),

$$\frac{P\wedge Q}{Q}\wedge E_2$$ ("eliminação do "e", versão 2"),

$$\frac{P \quad Q}{P\wedge Q}\wedge I$$ ("introdução do "e"").

Adaptando-as para a notação $\alpha<\beta<\gamma$, temos:

$$\frac{\alpha<\beta<\gamma}{\alpha<\beta}\wedge E_1 \qquad \frac{\alpha<\beta<\gamma}{\beta<\gamma}\wedge E_2$$

$$\frac{\alpha<\beta \quad \beta<\gamma}{\alpha<\beta<\gamma}\wedge I$$

(3) Demonstre isto:

$$\frac{0<a<b \quad 0<c<d}{0<ac<bd}L_E$$ ("Lema E")

Você pode usar todas as regras definidas até agora: T, A, S, P_0, L_A, L_B, L_C, L_D, $\wedge E_1$, $\wedge E_2$, $\wedge I$.

(4) Demonstre que $2^{10}<10!$. Tente usar só as regras que definimos até agora e lemas...

(5) Demonstre que $2^{777}<777!$. Agora você pode usar reticências ("...") na sua árvore. Tente usar as reticências do modo mais claro possível. Discuta com os seus colegas.

Dicas e sugestões para o (4) e o (5):

a) Você pode ter regras e lemas sem nenhuma hipótese - por exemplo:

$$\frac{}{n<n+4}$$

b) Tente provar

$$\frac{2<n}{0<n<n+4}$$

c) Você pode usar lemas sem nome no rascunho, e nomeá-los só no final.

Matemática Discreta
2010.2 - PURO/UFF
Prof: Eduardo Ochs
21/nov/2010

Exercícios sobre sistemas dedutivos
(Parte 2: implicação)

Da mesma forma que o "$\land$" tem regras de introdução e eliminação, os outros conectivos e quantificadores ($\to$, $\lor$, $\forall$, $\exists$, ...) também têm...

A regra "$\to$E" é fácil,

$$\frac{P \quad P\to Q}{Q}\to E$$

Mas a regra "$\to$I" é difícil, e vai merecer que você pense várias horas sobre ela para entendê-la bem.

Ela funciona assim: para provar "$Q\to R$" a partir de hipóteses $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nós primeiro provamos R a partir de $P_1, \ldots, P_n, Q$,

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \ldots \quad P_n \quad Q}{R}$$

E aí consideramos que podemos empurrar a hipótese Q para dentro da conclusão:

$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \ldots \quad P_n}{Q\to R}$$

Isto fica mais claro se comparamos a notação em árvore com a notação linha-a-linha. Por exemplo:

Lema ("T'"):

$$\frac{a<b \quad b<c}{c<d\to a<d}T'$$

Isto é um jargão matemático!

Demonstração: Basta mostrar que:

$$\frac{a<b \quad b<c \quad c<d}{a<d}T''$$

A demonstração de T'' é:

$$\cfrac{\cfrac{a<b \quad b<c}{a<c}T \quad c<d}{a<d}T$$

Na notação linha-a-linha, isto fica:

1) $a<b$ (por hipótese)
2) $b<c$ (por hipótese)
3) Suponha que $c<d$.
   4) $a<c$ (por (1), (2) e T).
   5) $a<d$ (por (4), (3) e T).
6) Portanto $c<d\to a<d$.

Repare que cada uma das linhas de 1 a 6 acima corresponde a pelo menos um nó das árvores:

$$\frac{\overset{(1)}{a<b} \quad \overset{(2)}{b<c} \quad \overset{(3)}{c<d}}{\underset{(5)}{a<d}}T''$$

Demonstração do lema T'':

$$\cfrac{\cfrac{\overset{(1)}{a<b} \quad \overset{(2)}{b<c}}{\underset{(4)}{a<c}}T \quad \overset{(3)}{c<d}}{\underset{(5)}{a<d}}T$$

E o enunciado do lema T' é:

$$\frac{\overset{(1)}{a<b} \quad \overset{(2)}{b<c}}{\underset{(6)}{c<d\to a<d}}T'$$

Exercícios:
(6) Demonstre que $2^{20}<20! \to 2^{21}<21!$.
(7) Demonstre que $2^{21}<21! \to 2^{22}<22!$.
(8) Demonstre que $2^{20}<20! \to 2^{22}<22!$.
(9) Demonstre que se $n>4$ então $2^n<n! \to 2^{n+1}<(n+1)!$.

Observação importante:
Estamos tentando entender o "Esquema de prova 1" do Scheinerman (p. 20).
Tanta gente se enrolava com ele nos semestres passados - já que hoje em dia quase ninguém vê demonstrações direito no colégio - que agora estamos tentando ver demonstrações em várias linguagens: árvores, linha-a-linha, e provas no formato do Scheinerman, que é um pouco menos formal que linha-a-linha; o formato das provas que você vai ver em livros de matemática, física e teoria da computação é um pouco menos formal que o do Scheinerman, e mais próximo de português.

Obs: na p. 18 o Scheinerman faz uma prova linha-a-linha num formato um pouco mais livre que o nosso - mas ele usa muitas regras que ainda não vimos.