Projeto de Monitoria:
Torre de Hanoi

PURO – UFF Matematica Discreta – 2010
Professor Orientador: Eduardo Ochs
Aluno: Frederico Castelões Nery de Sá

1 A torre de Hanói

1.1 Breve descrição.

A torre de Hanói consiste em um puzzle matemático criado no ano de 1883 por Edouard Lucas inspirado por uma lenda Hindu, que consiste em uma base contendo 3 pinos onde são dispostos alguns discos, sempre em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo, assemelhando-se assim com a imagem de um cone.

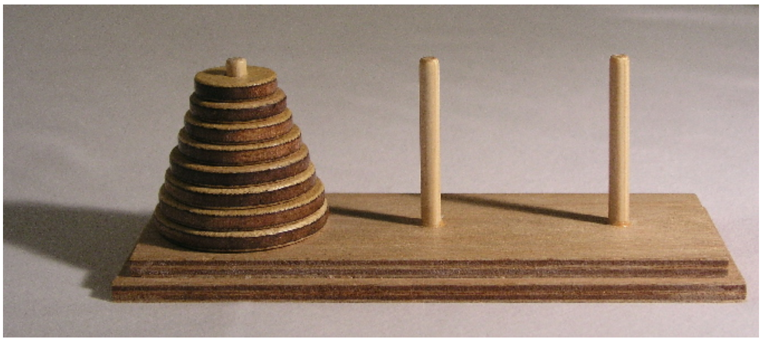


Figura 1: Torre de Hanói clássica.

1.2 Objetivos do Jogo.

O objetivo do jogo é transferir a torre inteira para um dos outros dois pinos a escolha do jogador.

A torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerado como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento e soluções de problemas.

1.3 Regras

As regras do jogo são simples e podem ser especificadas em apenas quatro, estas listadas abaixo:

1. Movimentar uma só peça (disco) de cada vez.
2. Uma peça (disco) maior não pode ficar por cima de uma menor.
3. Não é permitido movimentar uma peça que esteja abaixo da outra.
4. Um disco deve estar sempre em um dos três pinos, ou em movimento.

2 Soluções.

2.1 Modo recursivo

Considerando um caso geral com n discos, vamos imaginar que os discos tenham sido numerados de cima para baixo: 1, 2, ..., n. O menos disco, neste caso, colacaremos como o número 1, e o n como maior de todos.

Admitindo-se que queremos mover os discos todos para o pino C, para remover o disco n é preciso tirar todos de cima, ou seja, tirar todos os $n-1$ discos que estão acima dele. Convenientimente é preferível colocar os demais discos no pino B, ou seja, devemos mover os $n-1$ discos menores de A para B um de cada vez respeitando-se as regras. Feito isso removeremos o disco C para o pino C. Agora, para mover os $n-1$ discos para C, só é possível se for repetindo o jogo, de modo a passar todos os discos, sempre de acordo com a regra, um por vez de B para C

Podemos observar que temos que fazer o jogo com $n-1$ discos duas vezes: primeiro movemos os $n-1$ discos de A para B usando C como auxiliar. Isto deixa a mostra o disco n. Movemos então n para C. Agora jogamos os $n-1$ discos mais uma vez: de B para C, usando A como auxiliar para tal processo e com isto empilhamos todos os em C sem violar as regras.

Para verificar qual a movimentação mínima, vamos dizer que o número mínimo de movimentos necessários para completar o jogo de n discos é $P(n)$. Como não há como chegar ao disco n sem mover os $n-1$ discos de cima, então o número de movimentos que fizemos para isto é $P(n-1)$. Como movemos os $n-1$ para o pino B, o pino C esta livre, logo podemos mover o disco n para C, ou seja, o número de movimentos desde o começo do jogo é de $P(n-1)+1$. Então falta mover os $n-1$ discos de B para C, para ficarem em cima do disco n, ou seja, o número mínimo de movimentos para fazer isto é de $P(n-1)$.

Logo desde o começo do jogo fizemos $P(n-1)+1+P(n-1) = 2P(n-1)+1$ movimentos. Pelo que vimos na análise do jogo, mostramos que não é possível fazer um número menor de movimentos, então $P(n)$ é o menor número de movimentos para completar o jogo de n discos, ou seja, $P(n) = 2P(n-1)+1$.

2.2 Pratico ou empírico - mudar o nome ainda

Por meio de tentativas e análise dos dados conseguidos, notamos que para somente um disco o número mínimos de movimeto é de apenas um. Para dois discos esse número aumenta para três, com três discos esse valor aumenta para sete e assim por diante. Repetindo esse processo para 4, 5, ..., n discos observa-se tambem uma peculiaridade para a obtenção da movimentação mínima. Caso queira passar a torre para o pino C e o número total de discos inseridos na torre for de contagem impar, o primeiro disco deverá ser colocado no pino C e, caso a contagem incial seja par, o primeiro disco deverá ser colocado no pino B. Tabelando os resultados obtem-se:

Tabela 1: *Número mínimo de movimentos para 6 peças.*

Quantidade de discos das torres	Quant. de movimentos de cada peça						Total de Movimentos
	Pç 1	Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	
1	1	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	31
6	32	16	8	4	2	1	63

Retirando alguns dados pela observação simples da tabela nós temos que:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 15 & \rightarrow & 31 & \rightarrow & 63, \ldots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & +2 & & +4 & & +8 & & +16 & & +32 & \end{array}$$

É de fácil percepção que o número somado é sempre o dobro do anterior, que ja havia sido somado e de que o resultado da movimentação mínima é sempre de 1 a menos do número somado. Para uma melhor visualização, acompanhe a tabela:

Tabela 2: *Tabela de analise de dados.*

n- de discos	Quantidade mínima de movimentos	n- somado
1	1	-1 $\longleftarrow$ +2
2	3	-1 $\longleftarrow$ +4
3	7	-1 $\longleftarrow$ +8
4	15	-1 $\longleftarrow$ +16
5	31	-1 $\longleftarrow$ +32
6	63	-1 $\longleftarrow$ +64

Continuando com tal análise, pode-se ainda notar que o número somado é do tipo 2^n e consequentemente escrito sob a forma de uma P.G.: (2, 4, 8, 16, 32,...) de razão $q = 2$. Por fim, podemos concluir que a quantidade mínima de movimentos é igual ao número somado menos 1, ou seja, igual a $2^n - 1$.

Entretando, como tal fórmula fora obtida atraves de experimentos(de modo empírico), uma prova é necessaria para comprovar sua funcionalidade. Para isso iremos dispor de uma poderosa ferramenta matematica, o *princípio da indução finita*. Utilizando P(n) como número de movimentação mínima, vimos que P(1) = 1, ou seja, $2^1 - 1 = 1$; a fórmula vale neste caso. Suponhamos P(n) = $2^n + 1$ e queremos mostrar que $P(n+1) = 2^{n+1} - 1$. Temos a hipótese de indução, isto é, a suposição de que a proprosição vale para n é $P(n) = 2^n - 1$. Temos que $P(n+1) = 2P(n) + 1$ atraves do resultado obtido anteriormente $(P(n) = 2P(n-1) + 1)$.

Começamos com $P(n+1) = 2P(n) + 1$. Como pela hipótese de indução, $P(n) = 2^n - 1$, podemos substituir isto na primeira fórmula para obeter:

$$P(n+1) = 2P(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1 \tag{1}$$

que era o resultado esperado por via do modo empírico. Logo a fórmula $P(n) = 2^n - 1$ vale para qualquer n desde que o mesmo seja um número natural.

3 Soluções por meio de Fractais

3.1 Método Fractal - ver se precisa completar depois

Basicamente o método é baseado em uma característica dos fractais chamada auto-similaridade, que é o fato do farctal ser formado por ele mesmo em escalas menores e na abstração do método anteriormente descrito, o recursivo, através de uma representação fractal. Sendo assim, este é uma alternativa em que a diferença mais importante se concentra na abstração do problema.

Ambos os métodos se baseiam na passagem da torre através de três passos, mover a torre $n-1$, o disco restante, seguido novamente da torre $n-1$ e assim sucesivamente ate sua conclusão.

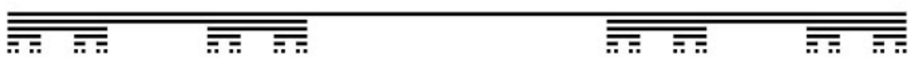
O método recursivo possui um nível de abstração baixo no qual se deve trabalhar com os discos e precisar, para cada movimentação, conhecer os pinos de origem e destino. Em uma execução computacional pode parecer nao possuir um grau de dificuldade elevado mas manualmente torna-se confuso.

No método fractal entretanto, o elevado nível de abstração vem a continubuir com a resolução, pois permite respresentar as movimentações (ou iterações) apenas com os segmentos que constituem o fractal e facilmente visualizar e obter a solução. Manualmente torna-se extremanete mais fácil uma vez que sua observação mostra o passo a passo.

3.2 Utilização do Conjunto de Cantor

3.2.1 O conjunto de Cantor

A construção e representação gráfica desse fractal é feita a partir de um segmento de comprimento unitário inicial. Forma-se outro dividindo o anterior em três partes iguais e retirando-se a terça parte central, obtendo-se assim dois segmentos, que por sua vez são submetidos a mesma operação. Depois de repetir tal operação infintas vezes obtêm-se um subconjunto de números reais conhecidos pelo Conjunto de Cantor (Cantor's Set).



Este fractal apresenta tambem diversas propriedades e utilizações alem das expostas aqui neste artigo que não serão abortadas aqui.

3.2.2 Resolução via fractal do conjunto de cantor

Aqui não usaremos o Conjunto de Cantor em si, mas sim a sua representação como a chave para a resolução de uma torre de n peças. Definiremos agora, alguns conceitos para melhor entendimento de tal resolução por meio do Conjunto de Cantor.

1. Para tal começamos por associar um número a cada peça, de baixo para cima, para que a maior peça seja a de número 1 e a de número menor n.

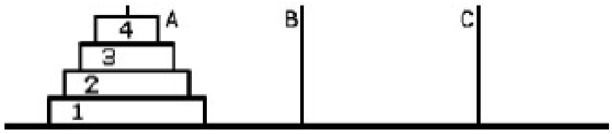
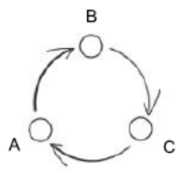


Figura 2: Exemplo para $n = 4$.

2. O conceito de direção "para frente" pode ser visto pelo esquema abaixo:



3. Associando peças de valor numérico ímpares com a direção "para frente", obtem-se como veremos a serguir, a solução para que a torre passe de A para B. No caso contrário, ou seja, peças pares com a direção "para frente", a solução da torre passe de A para C. Pode-se então associar tal direção a números pares ou ímpares, na medida em que esta não seja alterada durante a resolução.

Explicado agora os conceitos básicos da utilização do método com resolução usando o Conjunto de Cantor, utilizaremos o exemplo anterior para $n = 4$.

Figura 3: Exemplo para $n = 4$.

Acompanhe a tabela a abixo para melhor visualização do procedimento.

3.3 Utilização da Curva de Dragão

escrever aqui sobre como resolver a torre via metodo da curva de dragao

Tabela 3: *Tabela de analise de dados.*

4	Move a peça 4 para trás.
3	Move a peça 3 para a frente
4	Move a peça 4 para trás.
2	Move a peça 4 para trás.
4	Move a peça 4 para trás.
3	Move a peça 4 para a frente.
4	Move a peça 4 para trás.
1	Move a peça 4 para a frente.
4	Move a peça 4 para trás.
3	Move a peça 3 para a frente
4	Move a peça 4 para trás.
2	Move a peça 4 para trás.
4	Move a peça 4 para trás.
3	Move a peça 4 para a frente.
4	Move a peça 4 para trás.