$$\mathcal{C}(1\!\!1_L) = \{\text{subfeixes do feixe } 1\!\!1_L \in Sh(L)\} \underset{\varphi^* \mathcal{C}}{\overset{\varphi_* \mathcal{C}}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}(1\!\!1_{L'}) = \{\text{subfeixos do feixe } 1\!\!1_{L'} \in Sh(L')\}$$

$$c_L \uparrow \wr\!\wr \qquad \circlearrowleft \qquad c_{L'} \uparrow \wr\!\wr$$

$$L \underset{(f\varphi)^*}{\overset{(f\varphi)_*}{\rightleftarrows}} L'$$

TEOREMA: AS CORRESPONDÊNCIAS DESCRITAS NO FATO ANTERIOR PRODUZEM BIJEÇÕES INVERSAS ENTRE:

- $\{$MORFISMOS DE LOCALES: $L \to L'\}$
- $\{$CLASSES DE ISOMORFISMOS DE MORFISMOS GEOM.: $Sh(L) \to Sh(L')\}$

---

$\boxed{3^o \text{ DIA}}$: TOPOLOGIAS DE GROTHENDIECK; TOPOS DE GROTHENDIECK; TEOREMA DE GIRAUD

FATO: "DESCRIÇÃO MAIS CATEGORIAL DA NOÇÃO DE FEIXES SOBRE LOCALES". SEJA $L$ LOCALE,

(i) TODA COBERTURA $S = \{u_i : i \in I\} \subseteq L$ de $u \in L$ DETERMINA UMA ÚNICA COBERTURA HEREDITÁRIA DE $u$: $\tilde{S} = \{v \in L : \exists i \in I\ v \leq u_i\}$

($i.e.$ $\bigvee \tilde{S} = \bigvee S = u$ e $w \leq v \in \tilde{S} \Rightarrow w \in \tilde{S}$)

(ii) DADO $u \in L$: TEMOS BIJEÇÃO $\{\text{Subcob. Heredit.}\} \xrightarrow{\cong} \{\text{Subfuntores de } L(-,u)\}$

$$S \longmapsto (F_S : L \longrightarrow Set)$$

$$F_S \subseteq L(-,u) \rightsquigarrow \{v \leq u : F_S(v) \neq \emptyset\} = \{v \leq u : F_S(v) = \{*\}\}$$

$$\overset{?}{=} \{v \leq u : v \in S\}$$

(iii) SEJAM $F : L \to Set$ UM PREFEIXE, $u \in L$ e $S \subseteq u$ HEREDITÁRIA

TEMOS BIJEÇÃO ENTRE

$$\{\text{FAMÍLIAS } F\text{-COMPATÍVEIS } (x_v \in F(v))_{v \in S}\} \xrightarrow{\cong} \{\text{Transf. naturais } \hat{x} : F_S \Rightarrow F\}$$

$$(x_v)_{v \in S} \longmapsto (\hat{x} : F_S \Rightarrow F)$$

$v \in S \rightsquigarrow \hat{x}_v(\{*\}) = x_v \in F(v)$

$v \notin S \rightsquigarrow \hat{x}_v : \emptyset \to F(v)$ ÚNICA

$$\begin{array}{ccccc} L & & & Set & \\ v & & F_S(v) & \xrightarrow{\hat{x}_v} & F(v) \\ \vee\!| & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ w & & F_S(w) & \xrightarrow{\hat{x}_w} & F(w) \end{array}$$

(iv) SEJA $L$ UM LOCALE E $F$ UM PREFEIXE EM $L$, ENTÃO SÃO EQUIVALENTES

- $F$ É FEIXE EM $L$
- DADOS $u \in L$ E COBERTURA HEREDITÁRIA $S$ DE $u$, TODA FAMÍLIA $F$-COMPATÍVEL $(x_v \in F(v))_{v \in S}$ POSSUI UMA ÚNICA COLAGEM
- DADOS $u \in L$ E SUBFUNTOR $R \subseteq L(-,u)$, TODA TRANSFORMAÇÃO NATURAL $R \Rightarrow F$ SE ESTENDE A UMA ÚNICA TRANSFORMAÇÃO NATURAL $L(-,u) \Rightarrow F$ ($\overset{\text{YONEDA}}{\longleftrightarrow}$ $x_u \in F(u)$)

COMENTÁRIO: AS NOÇÕES DE PREFEIXE, PREFEIXE SEPARADO, [redacted] SOBRE X [redacted] DEPENDEM APENAS DO RETICULADO $(\Omega(X), \subseteq)$

DEF: (i) UM LOCALE É UM RETICULADO COMPLETO $(L, \leq)$ TAL QUE

$$(*) \quad a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} a \wedge b_i \quad , a \in L, \{b_i : i \in I\} \subseteq L$$

(ii) UM MORFISMO DE LOCALES $f: L \to L'$ É UMA [redacted] FUNÇÃO [redacted] CRESCENTE $f^*: L' \to L$ TAL QUE

- $f^*$ PRESERVA SUPREMOS ARBITRÁRIOS
- $f^*$ PRESERVA ÍNFIMOS FINITOS

(iii) LOC DESIGNA A CATEGORIA DOS LOCALES E SEUS MORFISMOS (COMPOSIÇÃO USUAL)

FATOS: (i) LOCALES SÃO PRECISAMENTE OS RETICULADOS QUE SÃO ÁLGEBRAS DE HEYTING COMPLETAS; i.e., RETICULADOS COMPLETOS $H$ TAIS QUE $\forall a, b \in H$ $\quad a \wedge c \leq b \Leftrightarrow c \leq (a \to b)$

(i.e. EXISTE $a \to b = \max\{c \in H : a \wedge c \leq b\}$)

(ii) MORFISMOS DE LOCALES $f: L \to L'$ CORRESPONDEM-SE BIJETIVAMENTE COM PARES DE FUNTORES ADJUNTOS $(f_*, f^*): L \to L'$

$f_*: L \to L'$; $\quad f^*: L' \to L$; $\quad f_*$ É ADJUNTO À DIREITA DE $f^*$

E $f^*$ PRESERVA ÍNFIMOS FINITOS

(iii) TEMOS FUNTOR (COVARIANTE) $\Omega: \text{Top} \to \text{Loc}$

$$\begin{array}{ccc} (X, \Omega(X)) & & (\Omega(X), \subseteq) \\ f \downarrow & \longmapsto & \uparrow f^{-1}[\ ] = f^* \\ (Y, \Omega(Y)) & & (\Omega(Y), \subseteq) \end{array}$$

DEF: SEJA $L$ UM LOCALE.

(i) UM PONTO DE $L$ É UM MORFISMO $p: \mathbb{1} \to L$ ONDE $\mathbb{1} = \{0, 1\}$ É O LOCALE TERMINAL. CONJUNTO: $Pt(L)$.

OBS: $X = \{*\}$, $\Omega(X) = \{\emptyset, \{*\}\}$

(ii) UM ELEMENTO $u \in L$ É PRIMO QUANDO

- $u \neq 1$
- $\forall a, b \in L \quad a \wedge b \leq u \Rightarrow a \leq u$ ou $b \leq u$

CONJUNTO: $Pr(L)$

EX: $L = \Omega(X)$, $u$ É O COMPLEMENTO DE UM FECHADO IRREDUTÍVEL

(iii) UM FILTRO $F \subseteq L$ É DITO COMPLETAMENTE PRIMO QUANDO

- $F \neq L$ $\quad (\Leftrightarrow 0 \notin F)$
- $\forall \{a_i : i \in I\}$ $\quad \bigvee_{i \in I} a_i \in F \Rightarrow \exists i \in I \quad a_i \in F$.

CONJUNTO: $F\text{cpr}(L)$

EX: $L = \Omega(X)$, $F = V_x(X)$ O FILTRO DAS VIZINHANÇAS ABERTAS DE $x \in X$

- $1 \in F$
- $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$
- $a \in F, a \leq b \Rightarrow b \in F$

FATO: DADO $L$ LOCALE CONSIDEREMOS AS FUNÇÕES:

- $\alpha : Pt(L) \longrightarrow Pr(L)$

  $(p^*: L \to \{0,1\}) \longmapsto \mu_p = \bigvee\{a \in L : p^*(a) = 0\}$

- $\alpha' : Pr(L) \longrightarrow Pt(L)$

  $\mu \longmapsto p^*_\mu : L \to \{0,1\}$

  $a \mapsto \begin{cases} 0, & a \leq \mu \\ 1, & a \not\leq \mu \end{cases}$

- $\beta : Pr(L) \longrightarrow Fcpr(L)$

  $\mu \longmapsto F_\mu = \{a \in L : a \not\leq \mu\}$

- $\beta' : Fcpr(L) \longrightarrow Pr(L)$

  $F \longmapsto \mu_F = \bigvee\{c \in L : c \notin F\}$

ENTÃO:

~~[illegible] SÃO PARES DE BIJEÇÕES~~

$$\begin{cases} \bullet \ (\alpha, \alpha') : Pt(L) \rightleftarrows Pr(L) \\ \bullet \ (\beta, \beta') : Pr(L) \rightleftarrows Fcpr(L) \\ \bullet \ (\beta \circ \alpha, \alpha' \circ \beta') : Pt(L) \rightleftarrows Fcpr(L) \end{cases}$$

SÃO PARES DE BIJEÇÕES INVERSAS

FATO: (i) DADO $L$ LOCALE TEMOS O ESPAÇO TOPOLÓGICO SOBRE $Pt(L)$

$\mathrm{spectro}(L) = (Pt(L), \Omega(Pt(L)))$ ONDE $\Omega(Pt(L)) = \{O_a : a \in L\}$

$O_a \underset{def}{=} \{p \in Sp(L) : p^*(a) = 1\}$.

ALÉM DISSO: $O_0 = \emptyset$ ; $O_1 = Pt(L)$ ; $O_{a \wedge b} = O_a \cap O_b$

$$O_{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigcup_{i \in I} O_{a_i}.$$

(ii) TEMOS FUNTOR (COVARIANTE): $\mathrm{spec} : Loc \longrightarrow Top$

$$\begin{array}{ccc} L & & \mathrm{spec}(L) \\ p_* \downarrow \uparrow p^* & \longmapsto & \downarrow (-\circ p^*) = \mathrm{spec}(p) \\ L' & & \mathrm{spec}(L') \end{array}$$

ALÉM DISSO: $\forall a' \in L'$ $\mathrm{spec}(p)^{-1}[O'_{a'}] = O_{p^*(a')}$.

(iii) TEMOS TRANSFORMAÇÕES NATURAIS:

$\eta : id_{Top} \longrightarrow \Omega \circ \mathrm{spec}$

$\varepsilon : \mathrm{spec} \circ \Omega \longrightarrow id_{Loc}$ DADAS POR

• $X \in (Top)_0$ : $\eta_X : X \longrightarrow spec(\Omega(X))$

$x \longmapsto (p_x^* : \Omega(X) \longrightarrow \{0,1\})$

ONDE O PONTO $p_x^*$ CORRESPONDE BIJETIVAMENTE AO FILTRO COMPLETAMENTE PRIMO $\mathcal{V}_x(X) = \{U \in \Omega(X) : x \in U\}$

• $L \in (Loc)_0$ : $\varepsilon_L : \Omega(spec(L)) \longrightarrow L$ DADO POR

$\varepsilon_L^* : L \longrightarrow \Omega(spec(L))$

$a \longmapsto O_a = \{p \in spec(L) : p^*(a) = 1\}$

TEOREMA: (i) O FUNTOR $\Omega : Top \to Loc$ TEM ADJUNTO À DIREITA $spec : Loc \to Top$

ALÉM DISSO $\begin{cases} \eta \text{ É UNIDADE} \\ \varepsilon \text{ É CO-UNIDADE} \end{cases}$ NESTA ADJUNÇÃO

(ii) A MAIOR EQUIVALÊNCIA ASSOCIADA À ESTA ADJUNÇÃO É DADA POR:

$$\begin{tikzcd} Top \arrow[r, shift left, "\Omega"] & Loc \arrow[l, shift left, "spec"] \\ Sob \arrow[u, hook] \arrow[r, shift left, "\Omega'"] & Ep \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, "spec'"] \end{tikzcd}$$

ONDE

• $Sob$ = A SUBCATEGORIA PLENA DE $\underline{Top}$ DADA PELOS ESPAÇOS SÓBRIOS

(= TODO FECHADO IRREDUTÍVEL F POSSUI ÚNICO PONTO GENÉRICO $x$, i.e. $F = \overline{\{x\}}$)

Ex: $(Haus_0 \subseteq Sob_0)$, $\{spec(L) : L \in (Loc)_0\} \subseteq (Sob)_0$

• $Ep$ = A SUBCATEGORIA PLENA DE $\underline{Loc}$ DADA PELOS LOCALES COM SUFICIENTES PONTOS

(= TODO $a \nleq b$ EXISTE $p \in spec(L)$ : $p^*(a) = 1$, $p^*(b) = 0$)

Ex: $\{\Omega(X) : X \in Top_0\} \subseteq (Ep)_0$

COMENTÁRIO: AS NOÇÕES DE PREFEIXE, MONOPREFEIXE, FEIXE, MORFISMO ÉTALE, SUBLOCALE "DE UM AMENTE", SEÇÃO, ... SE GENERALIZAM DE $\underline{TOP}$ À $\underline{LOC}$ VIA $\Omega : Top \to Loc$. Ex: $f : L^{\sigma} \to L'$ MAPA ÉTALE (⇔) $\exists \{c_i\}_{i \in I} \exists \{c'_i\}_{i \in I}$, $\bigvee_{i \in I} c'_i = 1_{L'}$, ...

ALÉM DISSO TEMOS DIAGRAMA ANÁLOGO AO DA PÁGINA 8.

$$\begin{tikzcd} Sh(L) \arrow[r, hook, "i"] & Psh(L) \arrow[d, dotted, "g"] \\ Loc\downarrow L \arrow[u, "\partial"] & Et\downarrow L \arrow[l, hook', "i"] \end{tikzcd}$$

EXCETO QUE, PELA EVENTUAL AUSÊNCIA DE "SUFICIENTES PONTOS", DEFINE-SE

$g : Psh(L) \longrightarrow Et\downarrow L$

$F \longmapsto Y^{El(F)} : El(F) \to \ell(1) \cong L$

ONDE $\varphi_0(F): F \longrightarrow \mathbb{1}$ É A FLECHA (ÚNICA) DE $F$ NO TERMINAL $\mathbb{1}$

E $\mathcal{C}(F) = \{$ SUB PREFEIXES FECHADOS DE $F\}$

$G \in \mathcal{C}(F) \iff$ "$G \subseteq F$" E PARA TODA COBERTURA

$u = \bigvee_{i \in I} u_i$ E TODO $s \in F(u)$, ENTÃO

$s|^{u}_{u_i} \in G(u_i),\ \forall i \in I \Rightarrow s \in G(u)$

DESTE MODO OBTEMOS TEOREMA QUE "GENERALIZA" ~~ANÁLOGO~~ AO TEOREMA DA PÁGINA 8

**DEF:** DADAS $A, B$ CATEGORIAS COM LIMITES FINITOS. UM MORFISMO GEOMÉTRICO $\varphi: A \to B$ É UM PAR DE FUNTORES $(\varphi_*, \varphi^*)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\varphi_*"] & B \arrow[l, shift left, "\varphi^*"] \end{tikzcd}$$

TAIS QUE
- $\varphi^*$ É ADJUNTO À ESQUERDA DE $\varphi_*$
- $\varphi^*$ PRESERVA LIMITES FINITOS

EX: MORFISMOS ENTRE LOCALES SÃO MORFISMOS GEOMÉTRICOS

**FATO:** SEJAM $L, L'$ LOCALES.

(i) DADO MORFISMO DE LOCALES $\rho = (\rho_*, \rho^*): L \to L'$, OBTEMOS MORFISMO GEOMÉTRICO $\varphi_\rho \doteq ((\varphi_\rho)_*, (\varphi_\rho)^*): sh(L) \to sh(L')$

ONDE:

$(\varphi_\rho)_*: sh(L) \longrightarrow sh(L')$ É A RESTRIÇÃO DE

$$\begin{aligned} (\varphi_\rho)_+ : psh(L) &\longrightarrow psh(L') \\ F &\longmapsto F \circ (\rho^*)^{op} \\ \eta \Downarrow\ \ &\longmapsto\ \ \Downarrow \eta_{(\rho^*)^{op}} \\ F' &\longmapsto F' \circ (\rho^*)^{op} \end{aligned}$$

$(\varphi_\rho)^*: sh(L') \longrightarrow sh(L)$ É OBTIDO PELA COMPOSIÇÃO

$(\varphi_\rho)^* = a \circ (\varphi_\rho)^- \circ i'$

ONDE

$$\begin{tikzcd} psh(L) \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[r, shift right, "(\varphi_\rho)_+"'] & psh(L') \arrow[l, shift right, "(\varphi_\rho)^-"'] \arrow[d, shift left, "a'"] \\ sh(L) \arrow[u, shift right, "i"'] \arrow[r, shift left, "(\varphi_\rho)_*"] & sh(L') \arrow[u, shift left, "i'"] \arrow[l, shift left, "(\varphi_\rho)^*"] \end{tikzcd}$$

E $(\varphi_\rho)^-$ É A "EXTENSÃO DE KAN (PONTUAL) À ESQUERDA DE $(\varphi_\rho)_+$"

ONDE $(i, a), (i', a'), ((\varphi_\rho)_+, (\varphi_\rho)^-), ((\varphi_\rho)_*, (\varphi_\rho)^*)$ SÃO PARES ADJUNTOS QUE CONSTITUEM MORFISMOS GEOMÉTRICOS

(ii) DADO MORFISMO GEOMÉTRICO $\varphi = (\varphi_*, \varphi^*): sh(L) \to sh(L')$, OBTEMOS MORFISMO DE LOCALES $\rho_\varphi = (\rho_{\varphi *}, \rho_\varphi^*): L \to L'$

ONDE: