DEF: TOPOLOGIAS DE GROTHENDIECK:

(i) SEJA $\mathcal{C}$ UMA CATEGORIA PEQUENA QUE POSSUI TODOS OS LIMITES FINITOS. UMA TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK (VERSÃO I) EM $\mathcal{C}$ É UMA FAMÍLIA $\{ Cov(a) : a \in Obj(\mathcal{C}) \}$ ONDE OS ELEMENTOS DE $Cov(a)$ SÃO FAMÍLIAS $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I}$ TAIS QUE

- O(UTRO) TODO ISOMORFISMO $a' \xrightarrow{f} a$ DETERMINA UMA COBERTURA: $\{ a' \xrightarrow{f} a \} \in Cov(a)$
- (estabilidade por pullbacks): SE $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in Cov(a)$ e $b \xrightarrow{g} a$ É $\mathcal{C}$-MORFISMO, ENTÃO $(a_i \times_a b \xrightarrow{f_i'} b) \in Cov(b)$ ONDE

$$\begin{tikzcd} a_i \times_a b \arrow[r, "f_i'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & b \arrow[d, "g"] \\ a_i \arrow[r, "f_i"] & a \end{tikzcd}$$

É DIAGRAMA DE PULLBACK EM $\mathcal{C}$, $\forall i \in I$

- (fechamento por composição): SE $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in Cov(a)$ e $(a_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} a_i)_{j \in J_i} \in Cov(a_i)$, $\forall i \in I$, ENTÃO $(a_{ij} \xrightarrow{f_i \circ g_{ij}} a)_{j \in J_i, i \in I} \in Cov(a)$
- (monotonicidade) SE $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in Cov(a)$ e $(b_j \xrightarrow{g_j} a)_{j \in J} \in Cov(a)$ É TAL QUE $\forall j \in J \; \exists i \in I \; \exists h_{ji} : b_j \to a_i$ ONDE

$$\begin{tikzcd} b_j \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, "h_{ji}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & a \\ a_i \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

, ENTÃO $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in Cov(a)$

(ii) SEJA $\mathcal{C}$ UMA CATEGORIA PEQUENA. UMA TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK (VERSÃO II) EM $\mathcal{C}$ É UMA FAMÍLIA $\{ J(a) : a \in Obj(\mathcal{C}) \}$ ONDE OS ELEMENTOS DE $J(a)$ SÃO SUBFUNTORES $R \subseteq \mathcal{C}(-,a)$ TAIS QUE

- (MÁXIMO) $\mathcal{C}(-,a) \in J(a)$
- (ESTABILIDADE POR PULLBACKS) SE $R \in J(a)$ E $b \xrightarrow{f} a$ É $\mathcal{C}$-MORFISMO, ENTÃO $R_f = R \times_{\mathcal{C}(-,a)} \mathcal{C}(-,b) \in J(b)$ ONDE

$$\begin{tikzcd} R \times_{\mathcal{C}(-,a)} \mathcal{C}(-,b) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{C}(-,b) \arrow[d, "f \circ -"] \\ R \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(-,a) \end{tikzcd}$$

É DIAGRAMA DE PULLBACK EM $\mathcal{S}et^{\mathcal{C}^{op}}$.

$R_f \rightsquigarrow \{ g : c \to b \mid c \in \mathcal{C}_0 \text{ e } f \circ g \in R(c) \}$

$\forall c : \forall c \in \mathcal{C}_0 \quad R_f(c) = \{ g : c \to b \mid f \circ g \in R(c) \}$

• (CARÁTER LOCAL) SEJAM $R, S \subseteq \mathcal{C}(-,a)$ TAIS QUE $S \in J(a)$. SE PARA CADA $h \in \mathcal{C}_0$ E CADA TRANSFORMAÇÃO NATURAL $\mathcal{C}(-,h) \xRightarrow{h} \mathcal{S}$ ($\leftrightsquigarrow$ YONEDA $h_b(1_b) \in S(b) \subseteq \mathcal{C}(b,a)$) SUBFUNTOR

$R \times \mathcal{C}(-,h) \hookrightarrow \mathcal{C}(-,h) \in J(h)$, ENTÃO $R \in J(a)$.

$$\begin{tikzcd} R \times \mathcal{C}(-,h) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{C}(-,h) \arrow[d, dashed, "h_b(1_b)\circ -"] \\ R \arrow[r, dashed] & \mathcal{C}(-,a) \end{tikzcd}$$

(iii) UM SITE (SITIO) É UM PAR FORMADO POR UMA CATEGORIA PEQUENA E UMA TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK DEFINIDA NESTA.

OBS: NOTE QUE DEMOS DEFINIÇÃO {subfuntores de $\mathcal{C}(-,a)$} $\leftrightsquigarrow$ {famílias $\{a_i \xrightarrow{f_i} a\}_{i\in I}$}: SE $\mathcal{C}$ É CATEGORIA PEQUENA COM LIMITES FINITOS

FATOS: (1) TEMOS CONEXÕES INVERSAS ENTRE AS DUAS VERSÕES DE TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK EM $\mathcal{C}$:

$$T.G_I(\mathcal{C}) \rightleftarrows T.G_{II}(\mathcal{C})$$

$$\{cov(a) : a \in \mathcal{C}_0\} \longmapsto \{J_{cov}(a) : a \in \mathcal{C}_0\}$$

$$\{cov_J(a) : a \in \mathcal{C}_0\} \longleftarrow\!\shortmid \{J(a) : a \in \mathcal{C}_0\}$$

TAIS QUE $\forall c \in (\mathcal{C}_0)$ $\exists i \in I$ $\exists g_i : c \to a_i$ $\Rightarrow$ $c \xrightarrow{\text{chosa}} a \in \{a_i \xrightarrow{f_i} a\}_{i\in I}$

i.e. $\exists j \in I$: $c = a_j$ e $c \xrightarrow{id} a_j$, $g_i \downarrow \searrow \downarrow f_j$, $a_i \xrightarrow{f_i} a$

ONDE $J_{cov}(a) = \{$ subfuntores de $\mathcal{C}(-,a)$ gerados por $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i\in I} : \in cov(a)\}$

$cov_J(a) = \{$ famílias $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i\in I}$ TAIS QUE SUBFUNTOR GERADO PELA FAMÍLIA ESTÁ EM $J(a)\}$

(ii) SE $(\mathcal{C}, J)$ É UM SITE, ENTÃO PARA TODO $a \in \mathcal{C}_0$ $J(a)$ É UM FILTRO NO CONJUNTO $(\{$SUBFUNTORES DE $\mathcal{C}(-,a)\}, \subseteq)$:

• $\mathcal{C}(-,a) \in J(a)$ • $R \supseteq S \in J(a) \Rightarrow R \in J(a)$ • $R, S \in J(a) \Rightarrow R \cap S \in J(a)$

Ex: (1) SE L É LOCALE, ENTÃO AS COMPONENTES HEREDITÁRIAS EM L, $a \in L$ ($\leftrightsquigarrow$ SUBFUNTORES DE $L(-,a)$, $a \in L$) CONSTITUEM UMA TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK EM L.

(2) PARA CATEGORIAS PEQUENAS $\mathcal{C}$ COM LIMITES FINITOS, A TOPOLOGIA DADA POR $cov(a) = \{(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i\in I}$: FAMÍLIA ESTAVELMENTE EPIMORFA EFETIVA$\}$, $a \in \mathcal{C}_0$ OUNDE:

• FAMÍLIA EPIMÓRFICA EFETIVA: $\forall h \in \mathcal{C}_0$ E TODA FAMÍLIA COMPATÍVEL COM ESTA $(a_i \xrightarrow{h_i} h)_{i\in I}$ (i.e. $a_i \times_a a_j \xrightarrow{p_1} a_i \xrightarrow{h_i} h$, $a_i \times_a a_j \xrightarrow{p_2} a_j \xrightarrow{h_j} h$, $a_i \times_a a_j \xrightarrow{p_1} a_i \xrightarrow{f_i} a$, $a_i \times_a a_j \xrightarrow{p_2} a_j \xrightarrow{f_j} a$) EXISTE ÚNICO $\}: a \to h \in \mathcal{C}$ $\circ f_i = h_i$ $i \in I$

"multiplicidade que é pushout"

• ESTÁVEL: $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i\in I}$ É TAL QUE $\forall c \in \mathcal{C}_0$ $\forall c \xrightarrow{h} a$ $(a_i \times_a c \xrightarrow{f_i'} c)_{i\in I}$ É EPIMÓRFA EFETIVA.

DEF: (i) MONOPREFEIXE E FEIXE (VERSÃO I): $\mathcal{C}$ CATEGORIA PEQUENA COM LIMITES FINITOS E $(\mathcal{C}, Cov)$ SÍTIO

(RESPEC: MONOPREFEIXE)

- UM PREFEIXE $F: \mathcal{C}^{op} \to Set$ É UM FEIXE PARA O SÍTIO $(\mathcal{C}, Cov)$ SE $\forall a \in \mathcal{C}_0$ $\forall (a_i \xrightarrow{p_i} a)_{i \in I} \in Cov(a)$, $\forall (\xi_i \in F(a_i))_{i \in I}$ FAMÍLIA COMPATÍVEL COM $(a_i \xrightarrow{p_i} a)_{i \in I}$, EXISTE UM ÚNICO (RESPEC: NO MÁXIMO UM) $\xi \in F(a)$ TAL QUE $F(p_i)(\xi_a) = \xi_i$, $\forall i \in I$

(i.e. $F(p_i)(\xi_i) = F(p_j)(\xi_j)$)

$\mathcal{C}$:
$$\begin{tikzcd} a_i \times_a a_j \arrow[r, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & a_i \arrow[dr, "f_i"] & \\ & a_j \arrow[r, "f_j"'] & a \end{tikzcd}$$
PULLBACK EM $\mathcal{C}$.

$Psh(\mathcal{C}) = \hat{\mathcal{C}} = Set^{\mathcal{C}^{op}}$: $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-,a), F) \xrightarrow{d} \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-,a_i), F) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(\mathcal{C}(-,a_i \times_a a_j), F)$

É EQUALIZADOR, PELO LEMA DE YONEDA

(ii) MONOPREFEIXE E FEIXE (VERSÃO II): $\mathcal{C}$ CATEGORIA PEQUENA E $(\mathcal{C}, J)$ SÍTIO

UM PREFEIXE $F: \mathcal{C}^{op} \to Set$ É UM FEIXE (RESPEC: MONOPREFEIXE) SE $\forall a \in \mathcal{C}_0$ $\forall R \in J(a)$, $\forall \alpha: R \Rightarrow F$ TRANSFORMAÇÃO NATURAL EXISTE UMA ÚNICA (RESPEC: NO MÁXIMO UMA) $\alpha': \mathcal{C}(-,a) \Rightarrow F$ TRANSF. NAT. TAL QUE $\alpha'|_R = \alpha$ (LEMBRE QUE: $R \hookrightarrow \mathcal{C}(-,a)$)

FATO: SEJA $(\mathcal{C}, J)$ SÍTIO:

(i) $Psh(\mathcal{C}) \to Psh(\mathcal{C})$ É UM FUNTOR LOVAMANTE QUE PRESERVA LIMITES FINITOS.

$$\begin{array}{ccc} F & & (\Sigma(F)): \\ \eta \downarrow & \mapsto & \downarrow \Sigma(\eta) \\ F' & & (\Sigma(F')) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "p_R"'] & \mathcal{C}(-,b) \arrow[d, "p \circ -"] \\ R' \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(-,a) \end{tikzcd}$$

ONDE $\Sigma(F): \mathcal{C}^{op} \to Set$

$$\begin{array}{ccc} a & & \operatorname{colim}_{R \in J(a)} hat(R,F) \\ p \downarrow & \mapsto & \downarrow p \circ - \\ b & & \operatorname{colim}_{S \in J(b)} hat(S,F) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "p"'] & J(a) \ni R \arrow[d, "\in \text{ FUNÇÃO CRESCENTE}"] \\ b & J(b) \ni R p \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} hat(R,F) \arrow[r, "\Lambda^F_R"] \arrow[d, "hat(p_R,F)"'] & \operatorname{colim} hat(R,F) \arrow[d, "p \circ -"] \\ hat(R_p,F) \arrow[r, "\Lambda^F_{R_p}"] & \operatorname{colim}_{S \in J(b)} hat(S,F) \end{tikzcd}$$

- $(\Sigma(\eta))_a: \Sigma(F)(a) \to \Sigma(F')(a)$

$R \in J(a)$

$$\begin{tikzcd} hat(R,F) \arrow[r, "\Lambda^F_R"] \arrow[d, "(\eta \circ -) = hat(R,\eta)"'] & \operatorname{colim}_{R \in J(a)} (R,F) \arrow[d, "\Sigma(\eta)|_a"] \\ hat(R,F') \arrow[r, "\Lambda^{F'}_R"] & \operatorname{colim}_{R \in J(a)} (R,F') \end{tikzcd}$$

(ii) TEMOS TRANSFORMAÇÃO NATURAL: $\sigma : id_{Psh(\mathcal{C})} \Rightarrow \Sigma$

MAPA POR

$F \in \mathcal{C}^{op} \to Set$

$a \in (\mathcal{C})_0$

$\sigma_F : F \Rightarrow \Sigma(F)$

$(\sigma_F)_a : F(a) \to (\Sigma(F))(a) = \operatorname{colim}_{k \in J(a)} Nat(k, F)$

$x \longmapsto \sigma^F_{\mathcal{C}(-,a)}(\bar{x})$

NOTEMOS: $\sigma^F_{\mathcal{C}(-,a)} : Nat(\mathcal{C}(-,a), F) \to \Sigma(F)(a)$,

ADMITE $x \in F(a) \overset{\text{YONEDA}}{\leftrightarrow} \bar{x} \in Nat(\mathcal{C}(-,a), F)$

(iii)
- $\Sigma(F)$ É PREFEIXE SEPARADO; SE F FOR PREFEIXE SEPARADO ENTÃO $\Sigma(F)$ É FEIXE
- SE F É MONOPREFEIXE ENTÃO σ_F É MONO; SE F É FEIXE ENTÃO σ_F É ISO.
- SE F' É FEIXE ENTÃO A TODA $h : F \Rightarrow F'$ EXISTE ÚNICA $\tilde{h} : \Sigma(F) \Rightarrow F'$ TALQUE $\tilde{h} \circ \sigma_F = h$

TEOREMA: "O FUNTOR FEIXE ASSOCIADO"

TEMOS O MORFISMO GEOMÉTRICO $Sh(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{i} Psh(\mathcal{C})$, $a = \Sigma \circ \Sigma$

i.e. $a = \Sigma \circ \Sigma$ É ADJUNTO À ESQUERDA DA INCLUSÃO QUE PRESERVA LIMITES FINITOS

ALÉM DISSO, A UNIDADE DESTA ADJUNÇÃO É DADA POR

$$\left(F \xrightarrow{\sigma_{\Sigma(F)} \circ \sigma_F} \underset{a(F)}{\underset{\shortparallel}{\Sigma\Sigma(F)}} \right), \quad F \in Psh(\mathcal{C})$$

DEF: UM TOPOS DE GROTHENDIECK $\mathcal{E}$ É UMA CATEGORIA EQUIVALENTE A ~~[illegible]~~ CATEGORIA DOS FEIXES DE ALGUM SÍTIO (PEQUENO) $(\mathcal{C}, J)$

OBS: TOPOS DE GROTHENDIECK É TOPOS "ELEMENTAR" $(\mathcal{E} \simeq Sh(\mathcal{C}, J))$ (TEM LIMITES, COLIMITES FINITOS; TEM CLASSIFICADOR DE SUBOBJETOS) E É CARTESIANAMENTE FECHADA

TEOREMA (GIRAUD): UMA CATEGORIA $\mathcal{E}$ É UM TOPOS DE GROTHENDIECK SE E SÓ SE:

(i) $\mathcal{E}$ TEM UM CONJUNTO DE GERADORES

(ii) $\mathcal{E}$ TEM LIMITES FINITOS

(iii) $\mathcal{E}$ TEM COPRODUTOS E ESSES SÃO DISJUNTOS E UNIVERSAIS.

(iv) TODA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM $\mathcal{E}$ TEM UM COEQUALIZADOR E ESTE COEQUALIZADOR É UNIVERSAL

(v) TODA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM $\mathcal{E}$ É EFETIVA

(vi) TODO EPIMORFISMO EM $\mathcal{E}$ É REGULAR.

FATO: (i) TODO TOPOS DE GROTHENDIECK É EQUIVALENTE À CATEGORIA DOS FEIXES DE ALGUM SITE $(\mathcal{C}, J)$, COM A TOPOLOGIA CANÔNICA. O i.e. A MAIOR TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK EM $\mathcal{C}$ TALQUE OS FUNTORES REPRESENTÁVEIS SÃO FEIXES

(ii) PARA CATEGORIAS PEQUENAS $\mathcal{C}$ COM LIMITES FINITOS, A TOPOLOGIA CANÔNICA EM $\mathcal{C}$ COINCIDE COM AQUELA GERADA PELAS FAMÍLIAS ESTAVELMENTE ~~[illegible]~~ EPIMORFICAS EFETIVAS