

(i) SEJA \mathcal{C} UMA CATEGORIA PEQUENA QUE POSSUI TAMBEM OS LIMITES FINITOS

UMA TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK (VERSÃO I) EM \mathcal{C} É UMA FAMÍLIA $\{ \text{cov}(a) : a \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \}$ ONDE OS ELEMENTOS DE $\text{cov}(a)$ SÃO FAMÍLIAS $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I}$ TAIS QUE

o único ISOMORFISMO $a' \xrightarrow{f} a$ DETERMINA UMA COMERTUM: $\{ a' \xrightarrow{f} a \} \in \text{cov}(a)$

• (estabilidade por pullbacks): SE $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in \text{cov}(a)$ e $b \xrightarrow{g} a$ É \mathcal{C} -MORFISMO, ENTÃO $(a_i \times_b \xrightarrow{f_i'} b)_{i \in I} \in \text{cov}(b)$ ONDE

$$\begin{array}{ccc} a_i \times_b & \xrightarrow{f_i'} & b \\ \downarrow g' & \subset & \downarrow g \\ a_i & \xrightarrow{f_i} & a \end{array}$$

É UM MIMA DE PULLBACK, $\forall i \in I$ EM \mathcal{C}

• (fechamento por composição): SE $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in \text{cov}(a)$ e

$(a_j \xrightarrow{g_j} a_j)_{j \in J} \in \text{cov}(a_j), \forall j \in J$, ENTÃO

$(a_j \xrightarrow{f_j \circ g_j} a)_{j \in J, i \in I} \in \text{cov}(a)$

• (monotonicidade) SE $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in \text{cov}(a)$ e

$(b_j \xrightarrow{g_j} a)_{j \in J} \in \text{cov}(a)$ É TAL QUE $\forall j \in J \exists i \in I \exists h_{ji} : b_j \rightarrow a_i$

ONDE $b_j \xrightarrow{g_j} a$, ENTÃO $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in \text{cov}(a)$

$$\begin{array}{ccc} b_j & \xrightarrow{g_j} & a \\ h_{ji} \downarrow \subset & & \downarrow f_i \\ a_i & \xrightarrow{f_i} & a \end{array}$$

(ii) SEJA \mathcal{C} UMA CATEGORIA PEQUENA. UMA TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK

(VERSÃO II) EM \mathcal{C} É UMA FAMÍLIA $\{ J(a) : a \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \}$ ONDE OS ELEMENTOS DE $J(a)$ SÃO SUBFUNÇÕES $R \subseteq \mathcal{C}(-, a)$ TAIS QUE

• (máximo) $\mathcal{C}(-, a) \in J(a)$

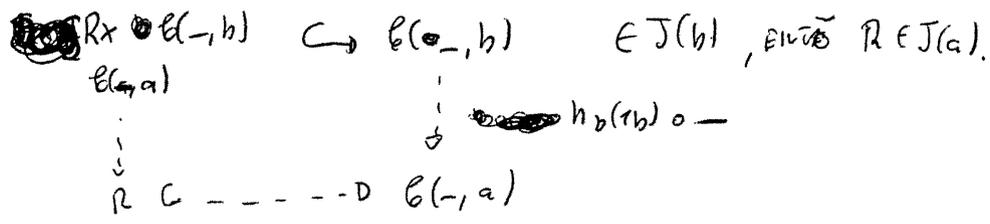
• (estabilidade por pullbacks) SE $R \in J(a)$ E $b \xrightarrow{f} a$ É \mathcal{C} -MORFISMO, ENTÃO $R_f = R \times_{\mathcal{C}(-, a)} \mathcal{C}(-, b) \in J(b)$ ONDE

$R \times_{\mathcal{C}(-, a)} \mathcal{C}(-, b) \xrightarrow{\hookrightarrow} \mathcal{C}(-, b)$ É UM MIMA DE PULLBACK EM $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$

$$\begin{array}{ccc} R \times_{\mathcal{C}(-, a)} \mathcal{C}(-, b) & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \mathcal{C}(-, b) \\ \downarrow & \subset & \downarrow f_0 \\ R & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \mathcal{C}(-, a) \end{array}$$

$R_f \cong \{ s : c \rightarrow b \mid c \in \mathcal{C}, \exists r \in R(c) \}$
 $\cup \{ t : c \rightarrow b \mid r(c) = \{ s : c \rightarrow a \mid r_0 \in R(c) \}$

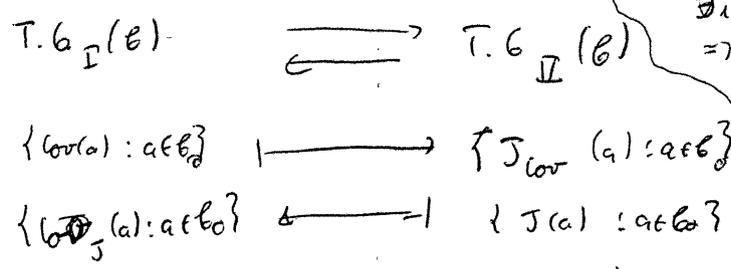
• (CARÁTER LOCAL) SEJAM $R, S \subseteq \mathcal{B}(-, a)$ TAIS QUE
 $SEJ(a)$. SE PARA CADA $h \in \mathcal{B}_0$ E CADA TRANSFORMAÇÃO NATURAL
 $\mathcal{B}(-, h) \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ (COM $n(1_h) \in \mathcal{B}(b, a)$) SUBFUNÇÃO



(iii) UM SITE É UM PAR FORMADO POR UMA CATEGORIA

OBS: REQUENA É UMA TOPOLOGIA NE GROTHENDIECK DEFINIM NESTA.
 SE \mathcal{B} É CATEGORIA REQUENA COM LIMITES FINITOS

FATOS: TEMOS ~~...~~ ENTRE AS NUAS VERSAOES NE TOPOLOGIA



INSCA E $\forall c \in \mathcal{B}_0$
 $\exists \{g_i : c \rightarrow a_i\}$
 $\{a_i \xrightarrow{f_i} a\}_{i \in I}$
 $i.e. \exists g_i : c \rightarrow a_i$
 $e c \xrightarrow{ed} a_i$
 $g_i \downarrow \xrightarrow{f_i} a$

ONDE $J_{cov}(a) = \{ \text{subfunções geradas por } (a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} : \in \text{cov}(a) \}$
 $\text{cov}_J(a) = \{ \text{famílias } (a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \text{ TAIS QUE SUBFUNÇÃO GERADA PELA FAMÍLIA ESTÁ EM } J(a) \}$

(ii) SE (\mathcal{B}, J) É UM SITE, ENTÃO PARA TODO $a \in \mathcal{B}_0$ $J(a)$ É UM FILTRO NO CONJUNTO $(\{ \text{SUBFUNÇÕES NE } \mathcal{B}(-, a) \}, \subseteq)$;
 $\bullet \mathcal{B}(-, x) \in J(a)$ $\bullet R \subseteq SEJ(a) \Rightarrow R \in J(a)$ $\bullet R, S \in J(a) \Rightarrow R \cap S \in J(a)$

Ex: (i) SE L É LOCAL, ENTÃO AS COBERTURAS HEMIANAS EM L , $a \in L$
 (\xrightarrow{c}) SUBFUNÇÕES NE $L(-, a)$, $a \in A$ CONSTITUEM UMA TOPOLOGIA NE GROTHENDIECK EM L .

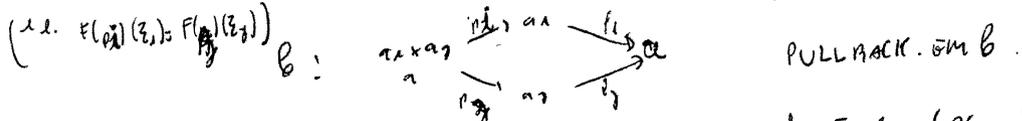
(ii) PARA CATEGORIAS REQUENAS \mathcal{B} COM LIMITES FINITOS, A TOPOLOGIA PARA POR $\text{cov}(a) = \{ (a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} : \text{FAMÍLIA ESTÁVELMENTE EPIMÓRFIA EFETIVA} \}$, $a \in \mathcal{B}_0$

ONDE:
 • FAMÍLIA EPIMÓRFIA EFETIVA: $\forall a \in \mathcal{B}_0$ E TEMA FAMÍLIA COMPATIVEL COM ESTA
 $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I}$ (i.e. $\forall a_i \xrightarrow{f_i} a$ \exists ÚNICO $g : a \rightarrow b$ $g \circ f_i = \text{id}_{a_i}$)
 • ESTÁVEL: $(a_i \xrightarrow{f_i} a)_{i \in I} \in \text{cov}(a) \forall c \in \mathcal{B}_0 \forall c \xrightarrow{h} a$ $(a_i \times c \xrightarrow{f_i} c)_{i \in I} \in \text{cov}(c)$

"multitude que é patch"

DEF: (i) MONOMORFISMO FEIXE (VERSÃO I): \mathcal{C} CATEGORIA REGULAR COM LIMITES FINITOS $\mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ SÍTIOS (NBSPBC: MONOMORFISMO)

UM MORFISMO $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}ET$ É UM FEIXE PARA O SÍTIOS $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ SE $\forall a \in \mathcal{C} \forall (R \xrightarrow{r} a)_{r \in \mathcal{C}(R, a)}$ $\exists!$ $(z_a \in F(a))_{r \in \mathcal{C}(R, a)}$ FAMILIA COMPATÍVEL COM $(a \xrightarrow{1} a)_{a \in \mathcal{C}}$ EXISTE UM ÚNICO (RESPEC: NO MÁXIMO UM) $\zeta \in F(a)$ TAL QUE $F(r_1)(z_a) = \zeta_{r_1}$, $\forall r_1 \in \mathcal{C}(R, a)$



$\mathcal{P}h(\mathcal{C}) = \mathcal{B} = \mathcal{S}et^{\mathcal{C}^{op}}$: $\text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}(-, a), F) \xrightarrow{d} \prod_{r \in \mathcal{C}(R, a)} \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}(-, a), F)$
 É EQUALIZAÇÃO, PELO LEMA DE YONEDA $\prod_{r \in \mathcal{C}(R, a)} \text{hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}(-, a), F)$

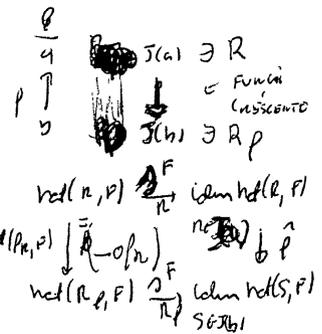
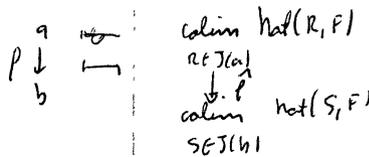
(ii) MONOMORFISMO FEIXE (VERSÃO II): \mathcal{C} CATEGORIA REGULAR $\mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ SÍTIOS

UM MORFISMO $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}ET$ É UM FEIXE (RESPEC: MONOMORFISMO) SE $\forall a \in \mathcal{C} \forall R \in \mathcal{J}(a)$, $\forall \lambda: R \Rightarrow F$ TRANSFORMAÇÃO NATURAL EXISTE UMA ÚNICA (RESPEC: NO MÁXIMO UMA) $\lambda': \mathcal{C}(-, a) \Rightarrow F$ TRANSF. NAT. TAL QUE $\lambda' \uparrow_R = \lambda$ (LEMA DE GUB: $R \hookrightarrow \mathcal{C}(-, a)$)

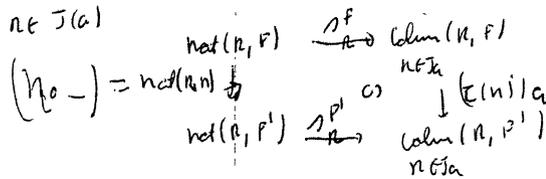
FATO: (i) SEJA $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ SÍTIOS:

(i) $\mathcal{P}h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{P}h(\mathcal{C})$ É UM FUNTOR INVARIANTE QUB \mathcal{P} PRESERVA LIMITES FINITOS.
 $F \mapsto (\zeta(F))_a$
 $n \downarrow \mapsto \downarrow \zeta(n)$
 $P' \mapsto (\zeta(P'))$
 $R \hookrightarrow \mathcal{C}(-, b)$
 $R' \hookrightarrow \mathcal{C}(-, c)$

ONDE $\zeta(F): \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}et$



$\zeta(n)_a: \zeta(F)(a) \rightarrow \zeta(F')(a)$



(ii) TEMOS TRANSFORMAÇÃO NATURAL: $\sigma: \text{id} \Rightarrow \Sigma$
 PARA NON $F \in \text{OP} \rightarrow \text{Set}$
 $a \in (B)_0$
 $\sigma_F: F \Rightarrow \Sigma(F)$
 $(\sigma_F)_a: F(a) \rightarrow (\Sigma(F))(a) = \text{colim}_{R \in J(a)} \text{Nat}(R, F)$
 $\text{Nat}(B(-, a), F) \rightarrow \Sigma(F)(a)$
 $\text{Nat}(B(-, a), F) \xrightarrow{\sigma_F} \Sigma(F)(a)$
 $\text{Nat}(B(-, a), F) \xrightarrow{\sigma_F} \Sigma(F)(a)$
 $\text{Nat}(B(-, a), F) \xrightarrow{\sigma_F} \Sigma(F)(a)$

- (iii) $\Sigma(P)$ É PRÉFEITO SEMPRE
- SE F É MONÓ PRÉFEITO ENTÃO σ_F É MONÓ
- SE F' É FEITO ENTÃO A TORA $\eta: F \Rightarrow F'$ EXISTE ÚNICA $\tilde{\eta}: \Sigma(F) \Rightarrow F'$ TAL QUE $\tilde{\eta} \circ \sigma_F = \eta$

TEOREMA: "O FUNTOR FEIXE ASSOCIADO"
 TEMOS O MORFISMO GEOMÉTRICO $\mathcal{M}(B, J) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}(\mathcal{M}(B))$

i.e. $\mathcal{M}(B, J)$ É ANEXO À ESQUERDA DA INCLUSÃO QUE PRESENTA LÍMITES FINITOS
 ALÉM NISSO, A UNIDADE NESTA ANEXÃO É NADA POR

$$(F \xrightarrow{\sigma} \Sigma(F)) \quad \Bigg| \quad \bullet$$

$$\quad \quad \quad \text{"(F)"} \quad \quad \quad \text{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(B))$$

DEF: UM TOPOS DE GROTHENDIECK \mathcal{E} É UMA CATEGORIA EQUIVALENTE
 A ~~ALGUM~~ CATEGORIA DE FEIXES DE ALGUM SITE (PEQUENO) (B, J)

OBS: TOPOS DE GROTHENDIECK É TOPOS "ELEMENTAR" ($\mathcal{E} \simeq \mathcal{M}(B, J)$)
 TEM LÍMITES, LÍMITES FINITOS, TEM CLASSIFICADOR DE SUBOBJETOS
 TEOREMA (GIRAUD): UMA CATEGORIA \mathcal{E} É UM TOPOS DE GROTHENDIECK SE E SÓ SE:

- (i) É TEM UM CONJUNTO DE GERADORES
- (ii) É TEM LÍMITES FINITOS
- (iii) É TEM COPRODUTOS E ESSES SÃO NISUNTOS E UNIVERSAIS.
- (iv) TUA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM \mathcal{E} TEM UM COEQUALIZADOR E ESTE COEQUALIZADOR É UNIVERSAL
- (v) TUA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM \mathcal{E} É EFETIVA
- (vi) TODO PRIMORISMO EM \mathcal{E} É REGULAR.

FAC: (i) TONO TOPOS DE GROTHENDIECK É EQUIVALENTE À CATEGORIA DE FEIXES
 DE ALGUM SITE (B, J) , COM A TOPOLOGIA CÂNÔNICA. i.e. A MAIOR
 TOPOLOGIA DE GROTHENDIECK EM B TAL QUE OS FUNTORES REPRESENTA
 VÊIS SÃO FEIXES

(ii) PARA CATEGORIAS PEQUENAS B COM LÍMITES FINITOS,
 A TOPOLOGIA CÂNÔNICA EM B COINCIDE COM AQUELA DADA
 PELAS FAMILIAS ESTABELMENTE E UNIFORMES EFETIVAS