

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO
À MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Reitor Antônio Diomário de Quelroz
 Vice-Reitora Nilcéa Lemos Pelandré
 Conselho Editorial Júlio Wiggers (Presidente), Arno Blass, Cesar Luiz Pasold, Chandal Maria Meirelles Nasser, Marli Auras, Tamara Benakouche, Tânia Regina de Oliveira Ramos e Alcides Buss (Diretor Executivo da Editora da UFSC).

LÍCIO HERNANDES BEZERRA (Org.)
 PAULO HENRIQUE V. DE BARROS
 CARLOS TOMEI
 CELSO WILMER

Revista: Matemática e Física (1980-1981)
 An. 1, n. 1, p. 1-10

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA

Reservados todos os direitos de publicação para a Editora da UFSC.

Impresso no Brasil

© Lício Hernanes Bezerra (Org.), 1995

Editora da UFSC

Campus Universitário — Trindade

C.P. 476 — 88040-900 — Florianópolis, SC

☎ (048) 231-9408, 231-9605 e 231-9686

☎ (048) 231-9680

Revisão: Maria de Fátima Silveira Compagnoni
Ana Lúcia Pereira do Amaral

FICHA CATALOGRÁFICA

(Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da
Universidade Federal de Santa Catarina)

I61 Lício Hernanes Bezerra (Org.)
Introdução à matemática / Lício Hernanes Bezerra, org.
... [et al.]. -- Florianópolis: Ed. da UFSC, 1995.
158p.: il. -- Série Didática

CDU 51

1. Matemática. I. Bezerra, Lício Hernanes.

Reservados todos os direitos de publicação total ou parcial
pela Editora da UFSC

Impresso no Brasil

Sumário

Prefácio

1	Exercícios de Sistemática e Representação	11
1.1	Introdução	11
1.2	Exercícios	11
2	Axiomática e Modelos	25
2.1	Introdução	25
2.2	Exercícios	26
3	Raciocínio Dedutivo	33
3.1	Proposições Verdadeiras e Falsas	33
3.2	Símbolos Lógicos	36
3.3	Álgebra Booleana e Diagramas de Euler	38
3.4	Símbolos Quantificadores	49
3.5	Demonstração por Absurdo	53
4	Conjuntos Numéricos	57
4.1	Introdução	57
4.2	Números Naturais	57
4.2.1	Identities em $\mathbb{N}$	58
4.2.2	Afirmções em $\mathbb{N}$	59
4.2.3	Subtração em $\mathbb{N}$	66
4.3	Números Inteiros	66
4.3.1	Divisão em $\mathbb{Z}$	66
4.4	Números Racionais	67
4.5	Números Reais	71

Sumário

4.5.1	Equações Reais a uma Variável	81
4.5.2	Ordem	83
4.5.3	Compleitude	88
4.5.4	Axioma do Supremo	88
4.5.5	Potência de um Número Real	89
5	Função	93
6	Plano Cartesiano	123
A	Cardinalidade	147
	Bibliografia	157

Prefácio

No verão de 1976, eu, Carlos, Celso e Paulo reunimo-nos, no apartamento do Celso, em Ipanema, para discutir uma proposta de criação de um curso alternativo para os alunos que, embora classificando-se para ingressar na universidade, não obtivessem média 7.0 (no mínimo) nas disciplinas de Matemática, no vestibular. Na época, éramos todos professores da PUC/RJ e a universidade preocupava-se com o decréscimo, ano após ano, do nível de conhecimento e formação dos novos alunos, que eram reprovados em massa nas disciplinas de Cálculo I e Física I.

Era comum os alunos utilizarem mal as propriedades das operações com números, fazendo, por exemplo, simplificações errôneas do tipo $\frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{x+y}{z}$. Os alunos tinham também dificuldades em sistematizar o raciocínio, por exemplo, não verificando se a cada etapa de resolução de um problema estavam sendo utilizados todos os seus dados. Era raro também os alunos usar alguma representação para o problema: uma tabela, uma figura geométrica, um gráfico, etc. Somava-se a tudo isso o fato de que os alunos tinham uma redação fragmentada e caótica, resultante de um esquema de ensino pré-universitário montado para resolver problemas de múltipla escolha, onde o que importava era chegar a alguma resposta, não importasse como. Alguns alunos tinham a impressão que as idéias por trás das formas pelas quais se chegavam ao resultado eram maquiavélicas e não deviam ser aprendidas.

Na época, éramos ligados na coluna *Mathematical Games*, que Martin Gardner assinava na revista *Scientific American*. Nela pareciam problemas, cuja resolução, em geral, usava pouca teoria matemática, mas desafiavam o leitor, obrigando-o a ser metícu-

Prefácio

loso e criativo. Baseados nessa coluna, buscávamos e criávamos problemas de natureza desafiante que, para resolvê-los, obrigasse o aluno a ser sistemático ou a usar alguma representação, como, por exemplo, as árvores da teoria de grafos. Um exemplo são os exercícios que são resolvidos seguindo-se simplesmente algumas instruções, simultaneamente. A idéia é que, ao fazer isso, o aluno iria incorporar a sistemática de verificar se todos os elementos de um problema estão sendo considerados, quando, em sua resolução.

Dividimos o livro em seis capítulos. O primeiro trata de exercícios, que seguem a linha descrita no parágrafo anterior. O segundo e o terceiro capítulos são uma introdução informal à teoria de modelos e à lógica dedutiva. O quarto capítulo trata dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, apresentando-os, não só isoladamente, como também, de forma axiomática, formando estruturas algébricas. No capítulo 5, apresentam-se funções que relacionam conjuntos numéricos. Em particular, aprendemos, nesse capítulo e no apêndice, como o ato de contar é ele mesmo um exemplo importante de função (que nos permite inclusive *comparar infinitos*). Para que possamos visualizar numa figura as particularidades de cada função numérica, estudamos no último capítulo o plano cartesiano.

Este livro procura preparar o aluno universitário para uma compreensão madura, sob bases lógico-dedutivas, do que deverá vir em seguida: o cálculo e a álgebra linear. O livro difere em menos de um por cento do livro original, escrito pelos autores em 1977, e que foi utilizado em cópias eletrônicas pelos alunos da disciplina *Introdução à Matemática*, mais conhecida por *Cálculo 0*, que afinal foi implantada na PUC/RJ e durou alguns anos. Essa disciplina era obrigatória para os alunos de primeira fase de Engenharias, Química, Física e Matemática, que obtiveram média menor que 7.0 em Matemática, no vestibular. Um fato interessante é que sentenças utilizadas no capítulo 3, criadas nos anos 70, citem personagens que estão ainda, ou novamente, em evidência. Este é o caso do cineasta José Mojica Marins, *cult* nos Estados Unidos, conhecido lá por *Coffin Joe*.

Prefácio

Para finalizar, gostaria de agradecer às alunas Ana Paula Ern da Silva e Maria Dolores da Silva, do grupo PET do curso de Matemática da UFSC, pela digitação em $\text{\LaTeX}$ dos capítulos 5 (quase todo) e 6, e, especialmente, ao Sr. Pedro Paulo Souza, que digitou, em *Scientific Word*, os capítulos 1, 2, 3 e 4, e o apêndice.

Florianópolis, 2 de junho de 1995
Licio Hernanes Bezerra

1. Uma porta tem três trincos e você não sabe para qual lado cada trinco abre. O problema é abrir a porta. Note que:

Exercícios de Sistemática e Representação

Um dos méritos da matemática é seu sucesso na manipulação de informações.

1.1 Introdução

Um dos méritos da matemática é seu sucesso na manipulação de informações.

É muito fácil um problema nos confundir pelo exagero de alternativas favorecidas por seus dados. Uma abordagem sistemática ajuda a resolver o problema, possibilitando, às vezes, a descrição de um *procedimento* (uma *receita*) para resolvê-lo, tornando mais compreensível a solução e permitindo mecanizá-lo se a realização do procedimento for muito longa.

Muitas vezes uma boa representação para os dados (um gráfico, uma equação, uma árvore) sugere uma resposta ao problema. Uma boa representação, em geral, deve ser concisa, não-ambígua e operacional.

1.2 Exercícios

1. Uma porta tem três trincos e você não sabe para qual lado cada trinco abre. O problema é abrir a porta. Note que:
 - a) o problema tem uma solução só;
 - b) se você sair tentando ao acaso, você pode dar o azar (?) de nunca chegar na solução e

- c) se você for cuidadoso, na pior das hipóteses você irá precisar de oito tentativas.

Quais são as oito possibilidades? Descubra um método para girar os trincos que esgote todas elas.

Imagine agora que a porta está enguiçada (nenhuma combinação abre a porta) e você não sabe disso. Se você sair tentando ao acaso vai ficar pensando que seu azar nunca foi tão grande. Se você for sistemático, entretanto, ao terminar de testar as oito possibilidades possíveis, você concluirá que a porta está enguiçada.

2. Obtenha uma representação gráfica prática para as possibilidades do exercício anterior.

Listar todas as possibilidades de uma certa situação é freqüentemente útil — é difícil garantir, entretanto, que todas as possibilidades estejam realmente listadas.

3. Quais são todas as filas de quatro símbolos diferentes com as letras *A, B, C* e *D*? Quantas são?
Como você garante que todas as filas estão listadas? E com 1, 2, 3 e 4? E com $\square$, $\diamond$, $\triangle$ e $\heartsuit$?
4. Quais são todas as filas de quatro símbolos que podem ser formadas com as letras *A* e *B*?
5. Obtenha uma representação gráfica prática para as possibilidades dos exercícios anteriores.
6. Um número real pode ser positivo, negativo ou igual a zero. Sob essa divisão, que situações podem ocorrer dados dois números reais? E três?
7. A formação de palavras em uma língua obedece a um conjunto de regras. Por exemplo, na língua portuguesa não existem palavras com três letras iguais consecutivas. Este exercício

apresenta um conjunto de regras com as quais você forma palavras empregando apenas as letras *A* e *B* e um sinal auxiliar ***. As regras são estas:

- a) Você parte do sinal ***.
- b) Qualquer ocorrência do sinal *** numa palavra permite substituí-lo por *A*, pelo par **A* ou pelo par *B**.
- Determine quais das seguintes palavras podem ser obtidas: *B, A, BBA, AAA, ABAA*.
 - Encontre uma palavra que possa ser obtida por mais de um modo.

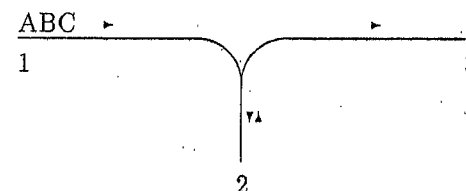
8.

1	2
3	

Esta é uma versão simples do *jogo dos 15*. Consiste em um tabuleiro onde três peças podem ser movimentadas na horizontal ou na vertical, ocupando espaços em branco.

Represente todas as posições encontráveis a partir da posição da figura. Cite uma posição impossível de se conseguir.

9. Três vagões *A, B* e *C* estão na estação 1. Você quer chegar com eles à estação 3 numa determinada ordem, por exemplo, *BAC*. Só é possível movimentar os vagões nos sentidos indicados na figura. Quais as configurações finais possíveis e como atingi-las?



10. Um homem encontra-se na margem de um rio e deseja transportar um lobo, uma cabra e um repolho para a outra margem. No seu barco ele só pode levar um destes de cada vez.

Como deve proceder, sabendo-se que o lobo não pode ficar sozinho com a cabra e nem a cabra sozinha com o repolho?

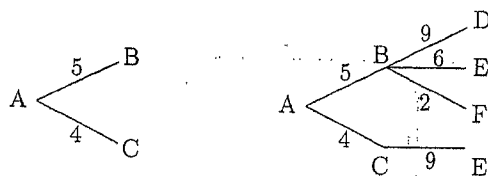
11. Na tabela abaixo estão indicadas distâncias

	B	C	D	E	F
A	5	4			
B			9	6	2
C				8	
D				3	
E					3

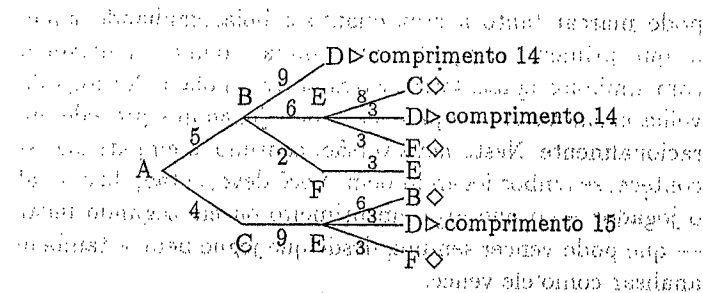
entre seis cidades. Encontre o percurso mínimo entre A e D.

Não é tão fácil achar uma maneira de garantir que todos os caminhos foram tentados no exercício acima (aliás, por que isso seria útil?). A técnica descrita, a seguir, emprega uma representação gráfica muito usada — árvore.

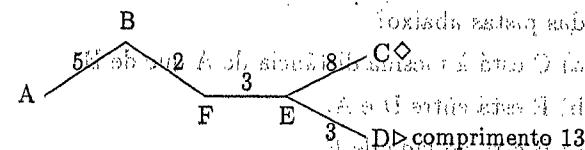
Fixe o ponto de partida — a raiz da árvore (A). Faça sair deste ponto ramos que vão parar em outras cidades. Pela tabela, quem está em B pode voltar a A, ir a D, ou a E, ou a F. Quem está em C pode voltar a A ou ir a E. Note que voltar a A não convém a quem procura um percurso mínimo. A árvore é expandida como segue:



Note que um caminho já chegou a D, ABD, de comprimento 14. A árvore seguinte corresponde ao próximo passo.



Os símbolos ▷ e ◇ querem dizer respectivamente *fim da linha* e *inútil continuar por aqui* (explique porque). Não sobrou muita coisa:



Moral: o caminho mínimo é ABFED, de comprimento 13. Note que a árvore não só garante que todas as possibilidades estão sendo testadas como indica tentativas inúteis.

12. Construa árvores para todos os problemas anteriores.

13. Gostaríamos de conseguir, metodicamente, uma forma de esgotar as possibilidades do jogo da velha, ou seja, conseguir todas as partidas. Como o número delas deve ser razoavelmente grande, dê só as duas primeiras jogadas possíveis. Elimine casos iguais.

14. Este problema apresenta uma outra versão do jogo da velha. Nesta versão, a diferença é que cada jogador, na sua vez,

pode marcar tanto a cruz quanto a bola, ganhando aquele que primeiro completar uma linha, coluna ou diagonal com símbolos iguais (três cruzeiros ou três bolas). No jogo da velha usual haverá empate se os dois jogadores procederem racionalmente. Nesta nova versão, contudo, o empate não acontece, se ambos jogarem bem. Você deve, então, dizer qual o jogador — o que joga em primeiro ou em segundo lugar — que pode vencer sempre, desde que jogue bem, e também analisar como ele vence.

Nos problemas a seguir também é interessante listar possibilidades.

15. Cinco corvos estão lado a lado e igualmente afastados sobre uma cerca. Você pode descobrir em que ordem estão a partir das pistas abaixo?
 - a) C está à mesma distância de A que de B.
 - b) E está entre D e A.
 - c) B está ao lado de E.
 - d) E não está entre B e D.
16.
 1. Tente separar os números 1, 2, 3 e 4 em duas caixas de tal modo que dois números não estejam na mesma caixa que o número natural resultante da diferença entre eles.
 2. Monte uma árvore com as possibilidades do problema de separar os números 1, 2, 3 e 4 em duas caixas. Descubra se sua solução para o problema do item anterior pode ser interpretada como sendo um caminho sobre essa árvore e verifique quantas soluções existem para aquele problema.
 3. Tente separar os números 1, 2, 3, 4 e 5 em duas caixas observando as mesmas condições do primeiro item.
 4. Separe os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 em duas caixas observando as mesmas condições do primeiro item.

17. 1. Uma face de um prisma triangular regular está exatamente sobre um triângulo desenhado numa mesa. Pode-se construir um painel de botões tal que, associado a cada botão, exista um mecanismo que faça o prisma realizar um certo movimento (determinado por você) que o recoloca sobre o triângulo. Obviamente, cada toque no mesmo botão efetua igual movimento. O painel deve conter botões suficientes para obter todas as posições do prisma (chamemo-lo ABCDEF) sobre o triângulo (chamemo-lo 123).
Explique o que faz cada botão e como alcançar as posições:
Obtenha uma representação gráfica que torne claro o que acontece com o prisma (seja em que posição estiver) quando cada botão é apertado.
Tente minimizar o número de botões de sua solução.
2. O mesmo problema para o cubo ABCDEFGH sobre um quadrado 1234.
Observação: três botões bastam para recolocar o cubo em todas as posições possíveis; melhor que isso, dois botões bastam. E um só?
3. Pense no mesmo problema para um octaedro regular colocado inicialmente na vertical.

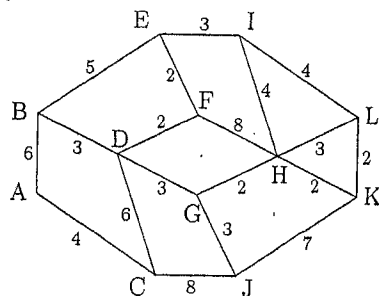
No problema seguinte, pretende-se diminuir ao máximo possível o número de possibilidades de uma certa situação.

18. Considere o seguinte jogo:

Você pede para um amigo pensar em um número qualquer de 1 a 1000. O seu objetivo é descobrir qual é esse número. Para isso você pode fazer no máximo dez perguntas do tipo: *o número escolhido é maior que n ?* O seu problema é achar quais são os números n para que você sempre descubra o número escolhido.

Às vezes, listar todas as possibilidades de uma situação pode ser tedioso — alguns atalhos são necessários.

19. No mapa abaixo, os números indicam distâncias entre as cidades. Ache o percurso mínimo de A a L. Supondo que você tenha achado a solução, como você garante que ela é realmente o percurso mínimo? Note que tentar esgotar todos os percursos possíveis leva a um trabalho desnecessariamente longo — descubra *atalhos*.

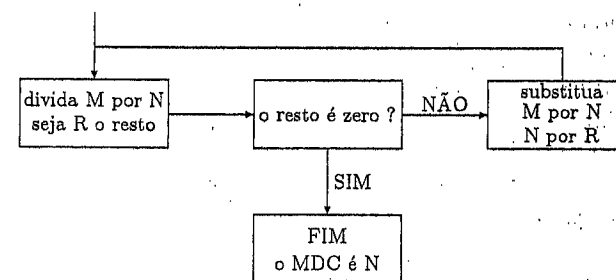


Veja alguns atalhos possíveis no exercício anterior:

- Existe uma solução que não passa por FH, nem por JK e nem por IH. Explique por quê.
 - Depois que esses três segmentos são eliminados do mapa é fácil ver que dois outros percursos também podem ser *esquecidos*. Descubra quais são.
 - Repita o processo até confrontar-se com um mapa suficientemente simples.
20. Repita o exercício anterior seguindo as sugestões dadas.

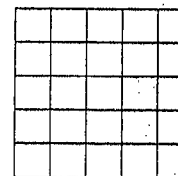
Uma outra vantagem da abordagem sistemática de um problema é que, às vezes, é possível descrever um procedimento (uma *receita*) para resolvê-lo. Um procedimento não só torna mais compreensível a solução como permite, eventualmente, uma mecanização do processo, se este for tedioso ou muito longo.

21. O fluxograma abaixo permite encontrar o máximo-divisor comum de dois números inteiros positivos M e N , pelo Algoritmo de Euclides. Siga as instruções e encontre o m.d.c. de 60 e 21.



O que aconteceria se M fosse 21 e N , 60?

22.



A figura ao lado será um quadrado mágico se você conseguir dispor os inteiros de 1 a 25 de tal modo que a soma, em qualquer linha, coluna ou diagonal, seja sempre a mesma.

Experimente, antes de ler o próximo item.

Siga atentamente essas instruções para obter um quadrado mágico 5×5 :

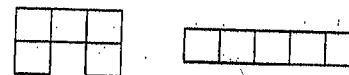
- Coloque o 1 na primeira linha, terceira coluna.

- b) Caso as instruções o levem a sair do quadrado, imagine quadrados mágicos situados acima, abaixo, nas diagonais e nos lados. Coloque então o número na mesma posição em que se encontraria no quadrado gêmeo correspondente ao caso.
- c) Continue a numeração sempre na casa acima e à esquerda da anterior.
- d) Se encontrar uma casa ocupada, numere a casa abaixo da casa do último número.
23. Um carcereiro irá libertar alguns presos, de acordo com uma lei que dá anistia parcial. A lei diz que para libertar a quantidade certa de presos, o carcereiro deve proceder assim: Ele começa passando por todas as celas, girando a chave (abrindo as celas, portanto). Em uma segunda passagem, ele gira a chave de uma cela sim e outra não, começando pela segunda. Em uma terceira, ele gira a chave de três em três celas, começando pela terceira.
- ...
- Em uma n -ésima passagem, ele gira a chave de n em n celas, começando pela n -ésima.
- Supondo que existam trinta celas nas prisão, pergunta-se: serão libertados presos de que celas? Tente generalizar.
- Seguir instruções não é difícil, se feito com cuidado e as instruções forem bastante claras. Muito mais difícil é inventar instruções. O tipo de raciocínio necessário só é conseguido com muita prática.
24. Um número primo é um número inteiro positivo, diferente de 1, que só é divisível por 1 e por si próprio. Escreva uma série de instruções para encontrar todos os números primos entre 1 e 100. Tente simplificar sua solução.

25. No jogo de xadrez, uma dama ataca nas direções horizontal, vertical e diagonais. Coloque seis damas em um tabuleiro 6×6 , de modo que nenhuma dama ataca a outra.
26. Uma partição de um número inteiro positivo n é uma divisão em pedaços inteiros e positivos (logo não nulos) de n . Por exemplo, duas partições de sete são $3+2+2$ e $3+3+1$. Note que $3+2+2+0$ não é uma partição e $2+3+2$ é a mesma partição que $3+2+2$.
- Ache um procedimento para obter todas as partições de 7.

Uma maneira interessante de abordar o problema anterior é a seguinte: suponha que cada partição esteja arranjada com os pedaços em ordem decrescente. Obviamente, o maior elemento é um número de 1 a 7. Se, por exemplo, três é o maior elemento de uma partição, os outros pedaços devem representar uma partição de quatro (por quê?). Moral: o problema de particionar 7 transformou-se no de particionar os números de 1 a 6, que pode parecer mais comprido mas é mais fácil. E o mesmo se repete com o de particionar 6, o de particionar 5 etc. Em resumo: o problema todo recai em particionar 1, o que, convenhamos, é trivial.

27. Tente encontrar um procedimento baseado no argumento acima para resolver o exercício anterior.
28. Um pentaminó é uma reunião de cinco quadrados que se encontram lado a lado, de modo que qualquer quadrado encontra pelo menos um dos outros. Abaixo, dois exemplos de pentaminó.



1. Descreva algum processo para se obter todos os pentaminós.

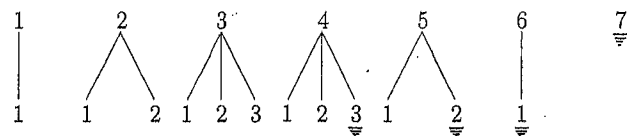
2. Encontre todos os pentaminós, aplicando seu processo. Importante: dois pentaminós são iguais se puderem ser superpostos exatamente, de algum modo; ou seja, se formam o mesmo desenho.

O exercício 26 é tão representativo de uma certa classe de problemas que a seguir outra solução é oferecida.

Suponha que os pedaços de cada partição estão em ordem decrescente. O maior elemento, então, é um dos números abaixo:

1 2 3 4 5 6 7

O maior elemento seguinte só pode ser



Explique o que foi feito e termine de resolver o problema. Observe como uma árvore apareceu naturalmente na representação das possibilidades.

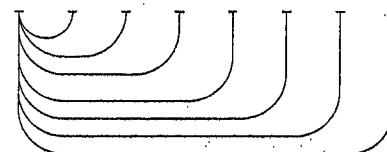
29. Provavelmente você resolveu o exercício 25 por tentativas ao acaso. Invente um procedimento que eventualmente encontre uma solução para o problema: coloque oito damas num tabuleiro 8×8 sem que nenhuma ataque outra. Obter uma solução por acaso para esse problema exige bastante sorte.

Observação: esse problema não é fácil.

30. 1. Disponha os números 1, 2, 3 e 4 — quatro cópias de cada — num quadrado 4×4 , de modo que cada número só apareça uma vez em cada linha, coluna ou diagonal principal.
2. O mesmo problema para 1, 2, 3, 4 e 5 num quadrado 5×5 .

3. Ainda o mesmo problema para 1, 2, 3, 4, 5 e 6 num quadrado 6×6 .

31. Números de 1 a 8 são colocados arbitrariamente nos oito lugares da figura abaixo. Você pode trocar dois números de lugar se houver algum caminho ligando seus lugares.



Por meio dessas trocas permitidas, descreva um processo que termine levando os números à sua ordem usual — 1 2 3 4 5 6 7 8, qualquer que seja a ordem inicial dos números.

Explique por que funciona seu processo.

Repita o problema com as seguintes configurações de trocas permitidas:



Generalize em várias direções: que tal de 1 a 10?

Que tal outras trocas permitidas?

Tente caracterizar conjuntos de trocas permitidas para os quais o problema tem sempre solução.

32. Para calcular 2^8 a partir de 2, obviamente sete multiplicações bastam, mas este número pode ser reduzido — na verdade três multiplicações bastam. Para cada expoente (no caso, 8) existe um número mínimo de multiplicações necessárias para calcular 2 elevado a esse expoente. Obtenha um processo

para calcular esse número mínimo para qualquer expoente n . Teste seu processo com n sendo 8, 15 e 30.

Verifique que não é verdadeira a afirmação: O número mínimo de multiplicações necessárias cresce com o expoente.

Observação: esse exercício é difícil.

Bibliografia

- 1) W. W. R. Ball e H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover, 1982.
- 2) P. Berloquin, *100 Jogos Numéricos*, Gradiva, 1993.
- 3) G. Mott-Smith, *Mathematical Puzzles for Beginners & Enthusiasts*, Dover, 1954.
- 4) G. Polya, *How to Solve it*, Princeton University Press, 2nd ed., 1973 (*A Arte de Resolver Problemas*, Interciência, 1977).
- 5) ———, *Mathematical Discovery*, 2 vol., John Wiley & Sons, 1962.
- 6) F. Schuh, *The Master Book of Mathematical Recreations*, Dover, 1968.

2

Axiomática e Modelos

2.1 Introdução

As primeiras aplicações da Matemática limitavam-se a resolver alguns problemas práticos particulares. As primeiras afirmações teóricas eram isoladas, aparentemente independentes umas das outras. Euclides, na sua obra *Elementos*, fez a primeira tentativa de reunir tais conhecimentos num mesmo corpo teórico. Nesse contexto, cada afirmação seria deduzida de outras formando uma espécie de cadeia. A idéia básica se mantém até hoje — é comum, nas teorias matemáticas, escolher-se um conjunto de afirmações como ponto de partida — axiomas — e obter-se então outras afirmações — teoremas — utilizando-se algumas regras estabelecidas: as regras de inferência. Analogamente, objetos da teoria são definidos a partir de alguns não definidos — conceitos primitivos.

Um conjunto de axiomas do qual não se deduz duas afirmações contraditórias é dito consistente. Em Matemática, procura-se construir teorias de modo que sejam consistentes. Apesar da escolha do conjunto de axiomas de uma teoria ser arbitrária, é desejável que esse conjunto seja o menor possível, ou seja, que os axiomas não sejam redundantes. Um axioma é *independente* de outros axiomas se ele, ou a sua negação, não pode ser deduzido daqueles.

Se, como vimos, os conceitos primitivos não são definidos, é possível atribuir-lhes significados diversos. Se uma atribuição de significados é feita de modo a satisfazer-se todos os axiomas de uma teoria, o resultado é chamado um *modelo* deste sistema de axiomas (ou dessa teoria).

2.2 Exercícios

Usamos palavras para descrever nossas idéias por meio da linguagem habitual. Sempre que uma palavra *nova* aparece surge a necessidade de defini-la, isto é, explicar seu significado usando as palavras já *existentes*.

1. 1. Imagine-se inventando uma nova linguagem. Será possível definir todas as palavras só com esta linguagem?
2. Suponha que você quer ensinar português a um estrangeiro. Até que ponto é possível ensinar as palavras numa sequência tal que cada palavra *nova* possa ser explicada em português?

O exercício acima deve tê-lo convencido:

- a) da impossibilidade de definir todas as palavras e
- b) da utilidade de fixar algumas palavras e definir o resto a partir delas.

A situação na linguagem matemática é análoga. Os *termos* são definidos a partir de alguns tomados como ponto de partida — os **conceitos primitivos**.

Uma coisa parecida ocorre quando você começa a perguntar o *porquê* das coisas — mais precisamente, uma teoria apóia-se sobre um conjunto de fatos admitidos como verdadeiros (os **axiomas**) e novos resultados são obtidos a partir dos axiomas através de certas regras (as **regras de inferência**), que serão estudadas com cuidado no próximo capítulo. As afirmações verdadeiras de uma teoria são chamadas **teoremas**. Recapitulando, uma afirmação é um teorema se for um axioma ou tiver sido deduzida a partir dos axiomas pelas regras de inferência.

2. Explique as analogias abaixo:
 conceitos primitivos _____ axiomas
 definições _____ regras de inferência
 termos _____ teoremas
3. Euclides fez uma distinção cuidadosa entre definir um tipo de figura geométrica e assumir que tais objetos existam realmente. Ou seja, se definimos um termo como *quadrado* ou *retas paralelas*, devemos mostrar a existência (por construção, por exemplo) de uma figura que satisfaça aos requisitos da definição desses termos, com base na teoria. Caso contrário, o termo não se aplicará a nada. Use os axiomas 0 a 7 listados no final do capítulo para provar a existência de:
 - a) um ponto sobre uma reta;
 - b) um ponto fora de uma reta;
 - c) retas concorrentes;
 - d) um plano;
 - e) um triângulo;
 - f) um ponto fora de um plano;
 - g) retas reversas (isto é, retas sem ponto comum nem plano que contenha ambas);
 - h) um tetraedro.

A partir daqueles axiomas, é possível contruir infinitos pontos diferentes?

Existem pelo menos dois bons motivos para construir teorias pelo processo acima (o **método axiomático**):

1º fica bastante claro o que será considerado como verdadeiro sem termos que apelar para *intuições* pessoais que freqüentemente nos induzem a erros (se o capítulo anterior ainda não o convenceu disto, aguarde os próximos).

2º a teoria é apresentada de uma maneira extremamente condensada — por exemplo, para ensinar Geometria, em vez de exigir que se decore montes de teoremas, basta apresentar os axiomas da Geometria, escolher alguns teoremas *importantes* e exercitar-se a partir deles.

4. 1. Use os axiomas 1 a 7 (listados no final do capítulo) para provar o seguinte teorema:

Teorema 1 – Por uma reta e um ponto fora dela passa um único plano.

2. Considere a seguinte definição:

Definição – duas retas são *concorrentes* se sua interseção é um ponto.

Prove, com os mesmos axiomas, o seguinte teorema:

Teorema 2 – Por duas retas concorrentes passa um único plano.

3. Represente graficamente o modo como os axiomas, teoremas e a definição acima dependem uns dos outros.

Já que os conceitos primitivos não são definidos, podemos dar a eles a interpretação que quisermos. Isto é, para aplicar uma teoria a uma certa situação, basta interpretar adequadamente os conceitos primitivos à luz da situação e ver se os axiomas são satisfeitos — se isso ocorre, temos um *modelo* para a teoria. A mesma teoria, então, pode ser empregada em diversas situações.

5. **Definição** – duas retas são *paralelas* se estão contidas num mesmo plano e não têm ponto comum.

Axioma 8 – A paralela a uma reta por um ponto exterior é única.

Considere o conjunto de axiomas 0 a 8. Decida para que subconjunto de axiomas deste sistema a atribuição de significados abaixo resulta num modelo. Descubra, também, em que casos o Teorema 1 se verifica.

- a) pontos – quatro objetos
retas – cada par de objetos
planos – cada trinca de objetos
- b) um triângulo
pontos – os vértices
retas – os lados
plano – o triângulo
- c) um tetraedro de arame
pontos – os nós (os vértices)
retas – as arestas
planos – os triângulos das faces sem o interior
- d) pontos – as notas dó, ré, mi, fá, sol, lá, si
retas – cada acorde de duas notas
planos – cada acorde de três notas
- e) um tetraedro de vidro, com interior oco
pontos – os de sua superfície
retas – os segmentos contidos em sua superfície
planos – as faces
- f) plano – a esfera oca
pontos – os da esfera
retas – os círculos máximos
- g) plano – disco sem circunferência
pontos – os do interior
retas – as cordas sem suas extremidades
- h) a geometria euclidiana
ponto, reta e plano, com os significados usuais

6. Explique porque adicionar mais axiomas a um sistema de axiomas irá, em geral, aumentar o conjunto de teoremas e diminuir o de modelos.

7. Se o *mundo real* é um modelo para a geometria euclidiana, então todos os axiomas e teoremas de Euclides (em particular, os axiomas 0 a 8 e os teoremas 1 e 2) devem ser verdadeiros e aplicáveis a problemas práticos. Você acha que

isso se dá? Verifique particularmente se o teorema 'A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos' é verdadeiro para triângulos na superfície da Terra.

8. Encontre modelos para o seguinte sistema de axiomas relativo a duas classes A e B de objetos:

- Quaisquer dois membros de A estão contidos em um único elemento de B.
- Nenhum membro de A está contido em mais de dois membros de B.
- Os membros de A não estão todos contidos em um único membro de B.
- Quaisquer dois membros de B contém apenas um membro de A em comum.
- Nenhum membro de B contém mais que dois membros de A.

9. 1. Encontre um modelo para o conjunto de axiomas contendo os axiomas 0 a 7, mais o axioma abaixo:

Axioma 8' - a paralela a uma reta por um ponto exterior não é única (a definição de *retas paralelas* é a do exercício 5).

2. O mesmo que no item anterior, trocando o axioma 8' por

Axioma 8'' - a paralela por um ponto exterior não existe.

10. Encontre vários modelos para o conjunto de axiomas descrito a seguir. Seja C um conjunto e '.' uma operação neste conjunto (considere como conceitos primitivos o conjunto C e a operação '.') com as seguintes propriedades:

- A operação de quaisquer dois elementos de C (por exemplo, a e b) resulta em um elemento de C (isto é, $a.b$ pertence

a C).

- Existe um elemento e de C tal que, para todo a em C temos $e.a = a.c = a$.

- Para todo elemento a de C, existe um elemento b de C tal que $a.b = b.a = e$, onde e tem a propriedade descrita no axioma anterior.

- O resultado da operação de três elementos em fila independe da ordem em que as operações são efetuadas. Mais precisamente, para quaisquer três elementos a, b e c de C, temos $(a.b).c = a.(b.c)$.

Repita o problema acrescentando o axioma abaixo:

- Para quaisquer dois elementos a e b de C, $a.b = b.a$.

Tente obter um modelo que não satisfaça o axioma v.

11. Num pentaminó (ver exercício 28 do capítulo 1), considere a seguinte interpretação:

plano — cada quadrado

reta — cada aresta comum a dois quadrados

ponto — cada vértice onde retas se encontram

reta conter ponto — aresta (que seja reta) conter vértice (que seja ponto)

plano conter ponto — quadrado conter vértice (que seja ponto)

plano conter reta — quadrado conter aresta (que seja reta).



O pentaminó ao lado, por exemplo, contém 5 planos, 4 retas e 2 pontos.

Escreva um conjunto minimal de axiomas (isto é, um conjunto de axiomas tal que nenhum deles pode ser retirado) para os quais o pentaminó acima seja um modelo e, também, o único pentaminó modelo.

Esta é a lista de axiomas usada nos exercícios:

Axioma 0 : Existe pelo menos uma reta.

Axioma 1 : Numa reta existem pelo menos dois pontos.

Axioma 2 : Dada uma reta, existe um ponto fora dela.

Axioma 3 : Por dois pontos passa uma única reta.

Axioma 4 : Num plano, existem pelo menos três pontos não colineares.

Axioma 5 : Por três pontos não colineares passa um único plano.

Axioma 6 : A reta que passa por dois pontos de um plano está contida nesse plano.

Axioma 7 : Dado um plano, existe um ponto fora dele.

Você saberia definir pontos colineares usando as palavras ponto e reta, e a relação pertencer a? Tente reescrever os axiomas 5 e 6, trocando passar por por expressões envolvendo pertencer a.

Bibliografia

- 1) R.S. Hall, *About Mathematics*, Prentice Hall.
- 2) *Mathematics in the Modern World* - coletânea de textos da revista *Scientific American*.

3

Raciocínio Dedutivo

3.1 Proposições Verdadeiras e Falsas

Vimos que axiomas são afirmações cuja veracidade é assumida. O corpo de uma teoria matemática contém, além de um determinado número de axiomas, supostos verdadeiros, outras proposições formadas com os termos da teoria (conceitos primitivos ou definidos) e com o uso de símbolos lógicos. Exemplos dessas proposições são:

1. $1+1=2$.
2. Em todo o triângulo as alturas se encontram em um mesmo ponto.
3. Existem infinitos números primos.
4. Qualquer mapa pode ser colorido usando-se apenas quatro cores sem que países vizinhos sejam representados com a mesma cor.
5. Todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de quatro inteiros.
6. Toda função contínua em um intervalo tem derivada em todos os pontos deste intervalo.
7. $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$.
8. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

9. Qualquer número par é a soma de dois números primos.

• Exercício 1 – Enuncie proposições

É trabalho da matemática estabelecer a veracidade ou falsidade das proposições. Você provavelmente julgará como verdadeiras algumas das proposições acima, por exemplo 1, 2 e talvez 3. Em todos estes casos você estará querendo dizer o seguinte: se os conceitos envolvidos forem interpretados do modo usual — por exemplo o conceito de triângulo, altura, número primo, 1, +, 2 — e se forem apresentados axiomas que justifiquem as operações usuais da aritmética e da geometria, então poderemos provar as proposições acima que julgarmos verdadeiras. Então:

Uma proposição será verdadeira se conseguirmos prová-la a partir de um conjunto de axiomas.

Note que o conceito de verdade depende do conjunto de axiomas com que trabalhamos. A proposição 8, por exemplo, será verdadeira se adotarmos o conjunto de axiomas da geometria não-euclidiana. Se você não estipula com que conjunto de axiomas você trabalha não poderá dizer quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo.

A negação de uma proposição é uma outra proposição, verdadeira exatamente quando a primeira não o for. Baseado nisso podemos enunciar:

Uma proposição é falsa quando sua negação for verdadeira.

Isto parece óbvio, mas você pode ter dificuldades. Para tirar dúvidas, experimente negar as proposições acima, de 1 a 9, para ter certeza de que entendeu os conceitos. Voltaremos adiante à negação de proposições.

Note que não acontece que uma proposição é necessariamente ou verdadeira ou falsa. Considere, por exemplo, a proposição:

$$x \div 2 = 3.$$

Na interpretação usual dos inteiros esta proposição não é verdadeira nem falsa. Obviamente isto acontece por causa da ocorrência da variável livre x na proposição; este não é, entretanto, o único caso. Muito mais interessante é a construção de uma proposição sem variáveis livres, usando os termos da aritmética usual, que não é nem verdadeira nem falsa, relativamente aos axiomas aritméticos [1]. Não daremos este exemplo aqui porque pareceria artificial: na verdade é uma proposição construída com o único propósito de não ser verdadeira nem falsa.

Quanto aos exemplos dados, pelas axiomáticas usuais da Geometria, da Aritmética e do Cálculo, podemos dizer que 1, 2, 3 são verdadeiras, 8 será verdadeira na Geometria Euclidiana. A história de 4 é longa: durante mais de um século os matemáticos mais famosos lutaram para estabelecer a sua veracidade ou a sua falsidade (aqui teremos que definir termos como mapa, fronteira, cor etc, estas definições são as usuais, depuradas em linguagem matemática); em 1976 foi constatada sua veracidade, depois de um grande esforço de computação. A 5 é verdadeira, é chamada de teorema de Lagrange. As proposições 6 e 7 você poderá não entender ainda: os termos serão definidos em Cálculo I; a 6 é falsa, a 7 é verdadeira. A proposição 9 é um mistério, é chamada de Conjetura de Goldbach, e não se sabe ainda sobre sua veracidade ou falsidade.

A definição de proposição verdadeira requer que se demonstre, a partir de um conjunto fixo de axiomas, a proposição. A demonstração é, portanto, o critério de verdade em matemática, merece ser olhada com algum detalhe.

Uma demonstração que justifique uma proposição p é uma sequência de proposições, cada uma das quais podemos garantir a veracidade por algum motivo: ou pelo recurso de um axioma, uma definição ou proposição já demonstrada, ou pela implicação direta de uma proposição que já tenha aparecido anteriormente na

demonstração, ou, ainda, como hipótese explicitamente mencionada na formulação da proposição p .

Demonstrar uma proposição é, portanto, construir uma cadeia de passos lógicos tal que em cada ponto podemos justificar facilmente a correção do raciocínio. Daremos um exemplo a seguir.

Suponhamos construído um sistema de axiomas que descreva as operações usuais da aritmética elementar dos números inteiros; usaremos a definição de divisor:

Um número p é divisor de um número q se existir um número r tal que $q = pr$.

Demonstraremos a proposição:

Se p é divisor de q e q é divisor de r então p é divisor de r .

Demonstração:

- | | |
|-------------------------|--------------------------------|
| 1. p é divisor de q | (hipótese); |
| 2. $q = ps$ | (definição de divisor); |
| 3. q é divisor de r | (hipótese); |
| 4. $r = qt$ | (definição de divisor); |
| 5. $r = (ps)t$ | (implicação dos passos 2 e 4); |
| 6. $r = p(st)$ | (axioma de associatividade); |
| 7. p | (definição de divisor); |

A afirmação 7 é a que queríamos demonstrar.

3.2 Símbolos Lógicos

A notação lógica é a taquigrafia da matemática, vale a pena ser aprendida. Esta notação representa cada proposição por uma letra, em geral, $p, q, r, \dots$. Proposições que falam essencialmente a mesma coisa, embora eventualmente de formas bem diversas, são caracterizadas pelo símbolo de equivalência $\iff$. Assim,

$$p \iff q$$

quer dizer que as proposições p e q lhe fornecem a mesma informação, ou seja, a veracidade de uma pode ser demonstrada a partir da outra. O símbolo $\iff$ tem uma função na notação lógica semelhante à do símbolo de igualdade $=$ da álgebra comum. Podemos, então, formar uma outra álgebra com as proposições, usando regras próprias — diferentes das regras da álgebra comum, e esta álgebra das proposições é chamada frequentemente de Álgebra Booleana.

Os símbolos lógicos que entram na Álgebra Booleana são:

$$\begin{aligned} &\iff \\ &\implies \\ &\neg \\ &\vee \\ &\wedge \\ &\forall \\ &\exists \end{aligned}$$

O símbolo $\iff$ já foi interpretado. O símbolo $\implies$, dito de implicação, emprega-se como na fórmula

$$p \implies q,$$

e é a notação usada para afirmar que a atribuição da verdade para p acarreta a atribuição de verdade para q . Os símbolos $\wedge$ e $\vee$ são formas abreviadas das conjunções *e* e *ou*, respectivamente. O símbolo $\neg$ emprega-se como

$$\neg p,$$

para representar a negação da proposição p .

3.3 Álgebra Booleana e Diagramas de Euler

Como na álgebra comum, devemos estabelecer regras que determinem o uso correto dos símbolos lógicos. Estas regras poderão parecer artificiais a você, como talvez um dia também as regras da álgebra comum. Com o uso, no entanto, você irá se convencer, como na álgebra comum, de que estas regras são as mais naturais e necessárias.

Na verdade estas regras nada têm de arbitrário: gostaríamos, por exemplo, que o uso correto dos símbolos $\wedge$ e $\vee$ se aproximassem do uso das conjunções *e* e *ou* numa frase comum.¹

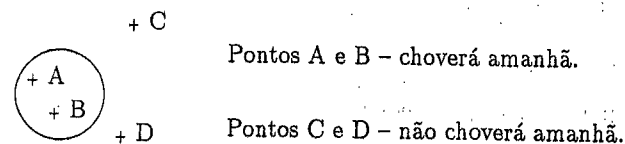
É exatamente isso que se dá. A negação, tal como foi definida anteriormente, é regulada pelo símbolo $\neg$, da maneira esperada. As regras do cálculo booleano ficam muito claras se usarmos os chamados diagramas de Euler.

Os diagramas de Euler tornam geométricas as regras lógicas. Suponhamos, por exemplo, que tenha sido dada uma proposição

$$p = \text{choverá amanhã,}$$

que não sabemos se é verdadeira ou falsa. Representemos cada ocorrência possível por um ponto no plano, de maneira que as situações de verdade na proposição sejam representadas por pontos interiores a uma figura e as situações de falsidade, por pontos exteriores. A figura é dita então o *diagrama de Euler* da proposição

¹Aqui existe uma dificuldade; a conjunção *ou* é empregada na linguagem comum em dois sentidos diferentes, ilustrados pelos exemplos a seguir. Quando digo: "Vou à praia ou ao cinema", estou implicitamente excluindo a possibilidade de fazer as duas coisas. Entretanto, se alguém afirma: "Amanhã choverá ou ventará", e se ocorrerem as duas coisas, a previsão estará certa. Este último sentido do *ou*, que admite a possibilidade de todas as alternativas, é o que nos interessa.



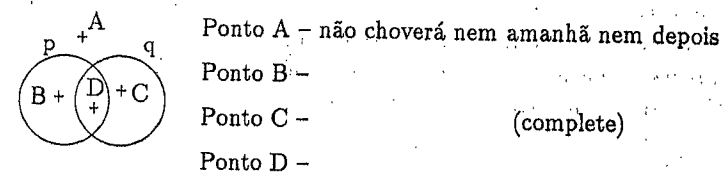
p :

A região no interior da figura representa situações de verdade da proposição p ; você poderia colorir a região que represente as situações de verdade para $\neg p$, a *negação* da proposição p ?

Seja dada uma outra proposição:

$$q = \text{choverá depois de amanhã}$$

Podemos representar no diagrama todas as possibilidades de combinação entre p e q :



Você saberia colorir a região que representa situações de verdade da proposição $p \wedge q$? E da proposição $p \vee q$?

• **Exercício 2** – Considere as proposições:

$$p = n \text{ é número par;}$$

$$q = m \text{ é número primo.}$$

Desenhe o diagrama de Euler. No diagrama marque pontos que possam representar as seguintes situações:

$$A - n = 5, m = 3$$

$$B - n = 2, m = 2$$

$$C - n = 4, m = 4$$

$$D - n = 3, m = 8.$$

Indique no diagrama as regiões que representam situações de verdade para $p \wedge q = n$ é par e m é primo e para $p \vee q = n$ é par ou m é primo.

• Exercício 3 – Mostre, usando diagramas de Euler, que

a) Se $\neg p \vee \neg q$ então $\neg(p \wedge q)$, e reciprocamente.

b) Se $\neg p \wedge \neg q$ então $\neg(p \vee q)$, e reciprocamente.

Exemplo – Procure resolver a equação:

$$\frac{2}{x} = 2x.$$

Se você achou um valor de x que supõe satisfazer a equação acima, procure confirmar a resposta substituindo o valor nos dois lados da equação. Você tem uma identidade válida?

Faça o mesmo para

$$\sqrt{x^2 + 4} = x - 2.$$

O que acontece?

Resolver uma equação algébrica em x é efetuar uma série de simplificações até cair em uma expressão do tipo $x = \dots$. No primeiro caso, por exemplo, vai se substituindo

$$\frac{2}{x} = 2x, \text{ (para se escrever isso tem que se supor } x \neq 0)$$

pelas expressões na sequência

$$\iff 2 = 2x^2$$

$$\iff 2 - 2x^2 = 0$$

$$\iff 2(1 - x^2) = 0$$

$$\iff 1 - x^2 = 0$$

$$\iff (1 - x)(1 + x) = 0$$

$$\iff x = 1 \vee x = -1.$$

Cada uma das substituições acima é válida pelo fato de que uma das proposições é verdade *quando e somente quando* a anterior o for. Esta condição é expressa pelo símbolo $\iff$ à esquerda de cada expressão.

Procurando realizar este processo na segunda equação, encontramos logo uma dificuldade: não temos

$$\sqrt{x^2 + 4} = x - 2 \iff x^2 + 4 = (x - 2)^2.$$

Com efeito, se x satisfaz o lado esquerdo, então o lado direito será verdade para este valor de x (isto porque o lado direito é a equação do lado esquerdo elevada ao quadrado). Esta situação representa-se por

$$\sqrt{x^2 + 4} = x - 2 \implies x^2 + 4 = (x - 2)^2.$$

Existe, contudo, pelo menos um valor de x , ($x = 0$), que satisfaz o lado direito sem satisfazer o lado esquerdo, e não temos

$$\sqrt{x^2 + 4} = x - 2 \iff x^2 + 4 = (x - 2)^2$$

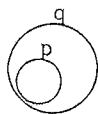
(O que ocorre é que, quando você eleva ao quadrado, você admite soluções de uma outra equação:

$$\sqrt{x^2 + 4} = 2 - x,$$

que, elevado ao quadrado, lhe dá a mesma relação que a anterior; $x = 0$ é solução dessa segunda equação, sem o ser da primeira).

Este exemplo ilustra a importância de distinguir, em um raciocínio, a situação $p \iff q$ da situação $p \implies q$. No primeiro caso as proposições p e q são verdadeiras ou falsas simultaneamente, enquanto que no segundo a proposição q pode ser verdade sem que

p o seja. Este fato tem uma representação por meio de diagramas de Euler: se soubermos que $p \Rightarrow q$ é verdadeira, então os diagramas de Euler de p e q apresentam-se da seguinte maneira:



indicando que todo ponto que representa uma situação de verdade para p representa, também, uma situação de verdade para q .

Você saberia dizer como ficam os diagramas de Euler de p e q , no caso de $p \Leftrightarrow q$ ser verdade?

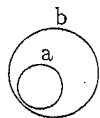
• Exercício 4

1. Desenhe o diagrama de Euler que represente a seguinte proposição:

Todos os pelicanos comem peixe.

Se o diagrama de Euler que você desenhou representa uma proposição verdadeira, quais das afirmações do tipo *se ... então* listadas a seguir serão verdadeiras?

- a) Se uma ave é um pelicano, então ela come peixe.
 - b) Se uma criatura come peixe, então é um pelicano.
 - c) Se uma ave não é um pelicano, então ela não come peixe.
 - d) Se uma criatura não come peixe, então ela não é um pelicano.
2. Quais das seguintes proposições o seguinte diagrama representa?



- e. Se b então não a .
- f. Se não a então não b .
- g. Se a , então b .
- h. Se não b , então não a .

Quantas afirmações do tipo *se ... então* são representadas pelo diagrama de Euler típico?

- Exercício 5 – Pela observação dos diagramas de Euler nos casos envolvidos, verifique as seguintes regras da Álgebra Booleana:

- a) Se temos que $p \Rightarrow q$ é verdadeira, então $\neg q \Rightarrow \neg p$ também é verdadeira.
- b) Se temos que $p \Rightarrow q$ é verdadeira, então $\neg p \vee q$ também é verdadeira.
- c) Se temos que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow t$ são verdadeiras, então $p \Rightarrow t$ também é verdadeira.

Dada uma proposição do tipo $p \Rightarrow q$, a proposição $q \Rightarrow p$ é chamada de *recíproca* e a proposição $\neg q \Rightarrow \neg p$, de *contrapositiva* da proposição dada. Por causa disso, a regra *h* do exercício 4 é chamada de regra da contrapositiva.

- Exercício 6 – Dê dois exemplos de proposições verdadeiras (em interpretações usuais) tais que, respectivamente,

- a) a *recíproca* seja verdadeira;
- b) a *recíproca* seja falsa.

- Exercício 7 – Escreva a recíproca e a contrapositiva de cada uma das afirmações abaixo:

- a) Se a lua está cheia, os vampiros saem de casa à noite.
- b) Se você tem mais de noventa anos a Academia Chop Chop lhe dá lições de Karatê grátis.
- c) Se uma girafa tem dor de garganta então ela não faz nenhum tipo de gargarejo.

Dada a frase a seguir, reconheça as afirmações seguintes como recíproca, contrapositiva, a frase original, ou nenhuma delas:

Madame canguru não precisa de bolsa.

- d) Se um canguru não é madame ele precisa de bolsa.
- e) Se alguém precisa de bolsa não é madame canguru.
- f) Um canguru não precisa de bolsa se for madame.

O mesmo exercício para:

Todos os esquimós gostam de torta.

- g) Se alguém gosta de torta então é um esquimó.
- h) Se alguém não for esquimó então gosta de torta.
- i) Alguém que não goste de torta não é esquimó.

- **Exercício 8** – Em cada um dos raciocínios abaixo verifique se a terceira afirmação é consequência das duas primeiras. Se não for explique o erro cometido.

- a) Se você vê manchas na sua frente então você está olhando um leopardo.
Você está olhando um leopardo.
Logo, você vê manchas na sua frente.
- b) Se você esqueceu seu lápis pode pegar emprestado um dos meus.
Você esqueceu seu lápis.
Logo, pode pegar emprestado um dos meus.
- c) Se você escova seus dentes com Shampoo Divina Dama você não entendeu o comercial.
Você entendeu o comercial.
Logo, você não escova os dentes com Shampoo Divina Dama.
- d) Todos os cupins são atraídos pela chama.
Este inseto não é cupim.
Logo, este inseto não é atraído pela chama.

- e) Os estudantes dormem se a aula é monótona.
A aula não é monótona.
Logo, os estudantes não dormem.

Em cada um dos itens a seguir duas afirmações são dadas e aceitas como verdadeiras. Deduza uma terceira afirmação delas, se possível.

- f) Nenhum disco voador voa a uma velocidade maior que a da luz.
O objeto acima não é um disco voador.
- g) Câmeras Polaroid revelam, elas mesmas, suas fotografias.
Esta câmera não é uma Polaroid.
- h) Se houver uma mosca em sua sopa você deve tomar devagar cada colherada.
Você pode tomar rápido cada colherada.

- **Exercício 9** – Em cada um dos raciocínios abaixo decida pela sua validade ou não validade. Se achar necessidade, passe as afirmações para a forma *se ... então*.

- a) Pedras que rolam não criam limo.
Se as pedras não criam limo então elas são lisas.
Logo, se as pedras rolam, elas são lisas.
- b) Se você andar debaixo de um coqueiro, provavelmente terá sua cabeça rachada.
Quem vai à Bahia anda debaixo de coqueiros.
Logo, se você vai à Bahia terá sua cabeça rachada, provavelmente.
- c) Os filmes de José Mojica Marins têm muito suspense.
E o Vento Levou... tem muito suspense.
Logo, José Mojica Marins dirigiu *E o Vento Levou...*

- d) Se você lê *O Globo* então você gosta de gatos.
Se você cria ratos, então não gosta de gatos.
Logo, se você cria ratos então não lê *O Globo*.
- e) Picadinho é melhor do que nada.
Nada é melhor do que rosbife.
Logo, picadinho é melhor do que rosbife. (*Cuidado!*)

• Exercício 10

1. Compare as seguintes afirmações:

Se é o seu aniversário, então você ganha presentes.
Só se é o seu aniversário é que você ganha presentes.

As duas afirmações dizem a mesma coisa? Confira sua resposta com os diagramas de Euler.

2. Considere a afirmação:

Se um triângulo é equilátero então todos seus lados são iguais.

Discuta a veracidade da recíproca. O que você pode concluir sobre proposições que são definições?

3. Ache a recíproca e a contrapositiva para a afirmação:
se uma proposição é definição, então sua recíproca é verdadeira.

- Exercício 11 – Resolva a seguinte equação, isto é, ache todos os x que a satisfaçam:

$$\sqrt{x^2 + 1} = x - 1.$$

- Exercício 12 – O raciocínio abaixo foi extraído de um filme do grupo *Monty Python*², onde há um julgamento em praça pública para se decidir se uma mulher A é feiticeira ou não.

² *Monty Python em Busca do Cálice Sagrado*

Feiticeiras são queimadas, assim como madeira. Basta ver então que A é de madeira. Para isso não adianta tentar construir uma ponte com A porque existem pontes de pedra. É melhor ver se A flutua, como a madeira. Como patos também flutuam, basta ver se A pesa o mesmo que um pato. Se isso acontecer, A é feiticeira.

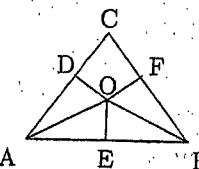
Descubra todos os erros nesta cadeia de argumentos, se é que existe algum.

- Exercício 13 – Segue-se uma demonstração de um fato geométrico. Você deve analisar cuidadosamente esta demonstração, verificar a cada passo a correção (ou incorreção) do argumento, confrontar as hipóteses com as quais você trabalha e tentar estabelecer, se possível, generalizações deste fato. Tentaremos provar a seguinte afirmação:

As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo isósceles encontram-se em um só ponto.

Os pontos da bissetriz de um ângulo AOB são caracterizados pela propriedade de se distanciarem igualmente tanto do segmento OA quanto do segmento OB . Temos três ângulos em um triângulo isósceles; cada um com uma bissetriz, logo são três bissetrizes. A afirmação que provaremos garante que estas três bissetrizes encontram-se em um mesmo ponto.

Seja o triângulo isósceles ABC ; chamemos de O (como na figura), o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, e tracemos, a partir de O , perpendiculares aos três lados do triângulo, como na figura ao lado.



Como AO é bissetriz do ângulo BAC temos $OD = OE$; como OB é bissetriz do ângulo ABC temos $OE = OF$; juntando as duas relações temos $OD = OE = OF$, e isto significa

que a distância do ponto O ao lado AC (que é exatamente OD) é igual à distância do ponto O ao lado BC (que é OF); mas isto é uma propriedade exclusiva dos pontos da bissetriz do ângulo ACB e então o ponto O é um ponto desta bissetriz; mas O já era ponto tanto da bissetriz do ângulo CAB quanto da bissetriz do ângulo ABC e logo o ponto O está nas três bissetrizes do triângulo; assim, as três bissetrizes encontram-se em um só ponto, como queríamos demonstrar.

Suponhamos que a seguinte proposição é dada:

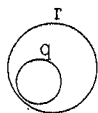
$p =$ Um triângulo ABC isósceles tem três ângulos iguais.

e queremos estudar sua veracidade ou falsidade (como sempre, dentro de uma axiomatização razoável da geometria euclidiana). Notemos que a proposição p tem a forma $p = q \Rightarrow r$ em que

$q =$ O triângulo ABC é isósceles,

$r =$ O triângulo ABC tem três ângulos iguais

Se a proposição p for verdadeira, teremos o seguinte diagrama de Euler:



Então você decide testar a proposição com um triângulo isósceles, por exemplo, o triângulo ABC em que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1 \text{ centímetro.}$$

A proposição é satisfeita para este triângulo. Seria precipitado você supor que a proposição é verdadeira: com efeito, se você experimentar o triângulo isósceles $A'B'C'$ em que

$$\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = 2 \text{ centímetros e}$$

$$\overline{C'A'} = 1 \text{ centímetro}$$

você não terá três ângulos iguais, e a proposição p não é satisfeita. Note que um exemplo positivo não assegurou a veracidade da sua proposição, enquanto que um exemplo negativo — um **contra-exemplo** — foi o suficiente para garantir sua falsidade. Este fato é geral, e merece ser enfatizado.

Querendo mostrar que uma proposição do tipo $q \Rightarrow r$ é falsa basta apresentar um contra-exemplo; querendo mostrar que uma tal proposição é verdadeira, contudo, não é suficiente um simples exemplo.

3.4 Símbolos Quantificadores

Com os símbolos lógicos já empregados é fácil deduzir das premissas

Existem brasileiros que são ricos.

Todos os homens ricos viajam muito.

a conclusão:

Existem brasileiros que viajam muito.

Não podemos contudo concluir

Todos os brasileiros viajam muito.

Precisamos desenvolver instrumentos que nos possibilitem *quantificar* de alguma maneira a ação das proposições. Para suprir esta deficiência introduziremos nesta seção os chamados símbolos quantificadores, o primeiro dos quais, dito quantificador universal, é denotado por $\forall$.

O símbolo quantificador $\forall$ é usado como em $\forall x$ para traduzir *para todo o x* . Assim,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$$

é a proposição

Todo número real x tem quadrado não negativo.

Da mesma forma,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) n > 0$$

é a tradução de

Todo número natural n é maior do que zero,

e assim por diante.

- **Exercício 14** – Suponha dada uma axiomatização usual dos números inteiros, $\mathbb{Z}$. Teste a veracidade das afirmações a seguir:

- $(\forall n \in \mathbb{Z}) 2n + 1$ é ímpar.
- $(\forall n \in \mathbb{Z}) n$ é produto de ímpares.
- $(\forall n \in \mathbb{Z}) (n \text{ primo}) n$ é ímpar.

Suponha que você queira negar uma proposição que envolva o símbolo quantificador $\forall$. Tome a proposição 3 do exercício 14 como exemplo e chamemos esta proposição de p . Qual é a proposição $\neg p$? Observe que, de acordo com a definição de negação, p é verdadeira exatamente quando $\neg p$ for falsa.

Tomemos a proposição

$$q = (\forall n \in \mathbb{Z}) (n \text{ primo}) n \text{ não é ímpar.}$$

Será q um bom candidato para $\neg p$? O contra-exemplo $n = 2$ mostra que p é falsa, enquanto que $n = 3$ mostra que q também é falsa. Ora, p e $\neg p$ nunca são simultaneamente falsas (nem simultaneamente verdadeiras), e não temos que $\neg p = q$. Um raciocínio mostra que $\neg p$ é a proposição

Existe um número primo par.

Para poder escrever simbolicamente esta equação introduzimos outro símbolo quantificador, $\exists$, usado em $\exists x$, querendo significar *existe um x tal que*. Por exemplo

$$p = (\exists n \in \mathbb{Z}) (n \text{ primo}) n \text{ é par.}$$

- **Exercício 15** – Suponha dada uma axiomatização usual dos números inteiros, $\mathbb{Z}$. Teste a veracidade das seguintes proposições:

- $(\exists m \in \mathbb{Z}) (\forall n \in \mathbb{Z}) n + m = n.$
- $(\exists m \in \mathbb{Z}) (\forall n \in \mathbb{Z}) n + m = m.$
- $(\exists m \in \mathbb{Z}) (\forall n \in \mathbb{Z}) m \cdot n = n.$
- $(\exists m \in \mathbb{Z}) (\exists n \in \mathbb{Z}) m \cdot n = n.$
- $(\forall m \in \mathbb{Z}) (\exists n \in \mathbb{Z}) n \cdot n = m.$
- $(\exists m \in \mathbb{Z}) (\forall n \in \mathbb{Z}) n \cdot n \neq m.$

Se você fez corretamente o exercício acima, poderá verificar que de alguma maneira as proposições e e f são mutuamente exclusivas, no sentido em que as duas não poderiam ser verdadeiras simultaneamente. Procure convencer-se disso e depois estude também os pares seguintes:

$(\exists \text{ triângulo } ABC) ABC \text{ tem três lados iguais}$
 $(\forall \text{ triângulo } ABC) ABC \text{ não tem três lados iguais}$

$$(\exists n \in \mathbb{Z}) (\forall m \in \mathbb{Z}) m \leq n$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) (\exists m \in \mathbb{Z}) m > n$$

Um exame atento mostrará que se tratam de pares exclusivos. Na verdade, em cada par *temos uma proposição e sua negação*. Isto nos induz a concluir que a negação de uma proposição que envolva quantificadores se obtém trocando cada ocorrência de $\forall$ por $\exists$, ou vice-versa, e depois negando-se o que vem a seguir na proposição. Você deve se convencer, construindo exemplos, de que este método é fundado.

- **Exercício 16** – Um número natural, diferente de 1, é primo se for divisível apenas por si próprio e pela unidade — por exemplo, 3, 5 etc. Todo número natural, maior que 1, tem uma decomposição em fatores primos e esta decomposição é única se não levamos em conta a ordem em que os fatores

aparecem. Um número é dito *livre de quadrado* se nenhum dos fatores primos de sua decomposição aparece repetido; por exemplo: $15 = 3 \times 5$, $30 = 2 \times 3 \times 5$.

Verifique a veracidade das afirmações seguintes:

- a) Todo primo é livre de quadrado.
- b) Todo livre de quadrado é primo.
- c) Nenhum quadrado é livre de quadrado.
- d) Todo livre de quadrado é quadrado.

Procure desenhar um *único* diagrama de Euler que mostre todas as possibilidades a respeito de números primos, quadrados e livre de quadrados.

- **Exercício 17** – Decida se as duas afirmações abaixo significam a mesma coisa e justifique sua conclusão.

- a) Existe um antídoto que anula todo veneno.
- b) Para todo veneno existe um antídoto que o anula.

A negação de uma proposição é a proposição que é verdadeira exatamente quando a proposição dada for falsa. Negue as seguintes afirmações:

- c) Todo policial é desonesto e safado.
- d) Existe uma menina em Jaguanum que gosta muito de Miles Davis e Milton Nascimento.
- e) Todo homem chora de tristeza ou raiva.
- f) Todo brasileiro é rico, feliz e vive no Rio.
- g) Eu estou jogando tênis ou o número 10 é um número primo.
- h) Toda resposta está certa e errada.
- i) É uma questão de vida ou morte.

- **Exercício 18** – Considere os quadriláteros definidos abaixo.

Trapezóide: quadrilátero sem lados paralelos.

Trapézio: quadrilátero tendo exatamente dois lados paralelos.

Trapézio isósceles: trapézio com dois lados opostos congruentes (e não paralelos).

Trapézio retângulo: trapézio com ângulo reto.

Paralelogramo: quadrilátero com dois pares de lados paralelos.

Retângulo: paralelogramo com ângulo reto.

Losango: paralelogramo com todos os lados congruentes.

Quadrado: retângulo e losango.

Represente num diagrama de Euler como se relacionam os quadriláteros acima.

Sugestão: Para cada dois conjuntos A e B, desenhe os círculos que os representam assim:

se todo elemento de A é elemento de B: círculo de A interior ao círculo de B;

se algum mas nem todo elemento de A é elemento de B: círculos de A e B se cortam;

se nenhum elemento de A é elemento de B: círculos de A e B não têm interseção.

3.5 Demonstração por Absurdo

Como foi mencionado na primeira seção, admite-se, em uma teoria matemática a existência de proposições verdadeiras e proposições falsas; existem até proposições que não são verdadeiras

nem falsas. Uma situação contudo é inadmissível: uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa, ou seja, uma proposição e sua negação podendo ser demonstradas com os axiomas da teoria. Se acontece uma situação destas em uma teoria então a teoria se diz contraditória.

A matemática evita situações contraditórias. Uma observação simples como essa é fonte de um método poderoso de demonstração.

Exemplo

Tentemos provar a implicação:

$$x - y = 0 \wedge x - \frac{y}{2} = 0 \implies y \cdot x = 0$$

Você provavelmente conseguiria provar isso por métodos diretos de resolução de sistemas lineares. A idéia desta demonstração é outra. Para provar que $x = 0$ e $y = 0$, suponhamos que isto não se verifique; duas coisas podem acontecer neste caso: $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Consideremos que ocorreu $x \neq 0$ (o outro caso tem desenvolvimento análogo). Se $x \neq 0$ é válido então podemos dividir as duas equações por x . O sistema então se apresenta como

$$\begin{aligned} 1 - \frac{y}{x} &= 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} &= 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= 1 \\ \frac{y}{x} &= 2 \end{aligned}$$

Logo, $1 = 2$. Mas, isto é uma contradição. Nossa hipótese de $x \neq 0$ é, portanto, contraditória e deve ser abandonada. Assim, temos que $x = 0$. O caso análogo mostraria que $y = 0$ e provamos nossa proposição.

A demonstração acima é típica de uma prova por absurdo. Indica-se o uso deste critério na demonstração da proposição p por uma frase do tipo: *Suponhamos que p seja falsa*. O raciocínio deve se desenvolver para uma contradição, isto é, para deduzir uma proposição q e sua negação $\neg q$.

Se a contradição ficar patente, isto significa que a negação de p é falsa e logo que p é verdadeira.

• Exercício 19 – Prove por contradição:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \implies (x = 2 \vee x = 3).$$

$$\text{Sugestão: } x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. Nagel e J. R. Newman, *A Prova de Gödel, Perspectiva*, 1973.
- [2] H. R. Jacobs, *Geometry*, W. H. Freeman and Company, 1974.

4

Conjuntos Numéricos

4.1 Introdução

Um dos objetivos deste capítulo é estudar o sistema numérico sob um ponto de vista mais formal, para que se possa entender muitos dos procedimentos que se tornaram intuitivos.

O sistema numérico foi desenvolvido através de um processo de extensão. Começou com os números naturais, com o propósito de contar. Descobriu-se, então, que a operação de subtração podia resultar em números que não eram membros do conjunto dos naturais. Assim, o número zero e os inteiros negativos foram acrescentados ao sistema. De maneira semelhante, a operação de divisão motivou o conceito de fração. Além disso, o processo de extrair raízes deu origem a irracionais e complexos.

Até agora, o processo de extensão pode ser relatado através da resolução de equações algébricas. Mas, números transcendentais como π e e existem e não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Para garantir a existência desses números, precisamos de um axioma — o axioma do supremo.

4.2 Números Naturais

Indica-se o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

4.2.1 IDENTIDADES EM $\mathbb{N}$

Muitos matemáticos antigos trabalharam com identidades em $\mathbb{N}$, isto é, igualdades válidas para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 2.

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

Exemplo 3.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

- **Exercício 1** – Você já sabe o que é uma identidade em $\mathbb{N}$. Você é capaz de criar identidades em $\mathbb{N}$? Tente.
- **Exercício 2**
 1. Prove a identidade do exemplo 1.
 2. Se você provou a identidade do exemplo 1, então você pode provar as identidades dos exemplos 2 e 3. Prove-as.
 3. Ilustre geometricamente as identidades dos exemplos 1, 2 e 3.
- **Exercício 3** – $(n-1)(n-2)\dots(n-1.000.000) = 0$ é uma identidade em $\mathbb{N}$? Por quê?

4.2.2 AFIRMAÇÕES EM $\mathbb{N}$

Exemplo 4. Considere a seguinte afirmação: $p_n = n^2 + n + 41$ é primo para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta afirmação é verdadeira? Por quê?

Exemplo 5. $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^{n+1} \geq n^2$ é uma sentença verdadeira. Porém, como provar? Testar valores não é uma estratégia, pois o conjunto dos naturais é infinito!

Exemplo 6. (Torre de Hanói) Considere o seguinte jogo: são dados três pinos. No pino A tem uma pilha de discos de madeira em ordem decrescente de raios (veja a figura a seguir). Os discos são numerados $1, 2, \dots, n$ de cima para baixo; na figura, $n = 5$.

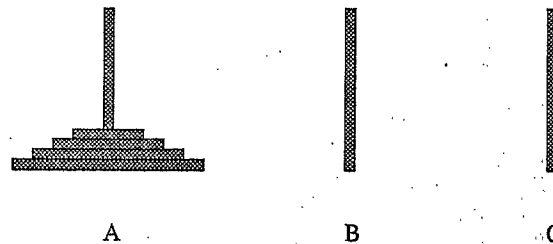


Figura 4.1. Torre de Hanói

Um movimento permissível no jogo consiste em tirar o disco que está mais ao topo de um pino e colocá-lo em um outro pino, sujeito à condição de que não deve, em nenhuma etapa, por um disco sobre outro de menor raio. Começamos o jogo com todos os discos empilhados no pino A.

O objetivo do jogo é colocar todos os discos em B por uma série de movimentos permissíveis. O jogo termina quando o objetivo é alcançado.

Problema: este jogo terminará se o iniciarmos com n discos, não importando quão grande for o natural n ?

Vamos resolvê-lo. Para isso, precisamos primeiro de uma representação do problema. Representemos por P_n a proposição: o jogo termina se o iniciarmos com n discos. Vamos agora sistematizar o problema:

Lema 1 - P_1 é verdadeira.

Demonstração: mova o disco do pino A para o pino B e o jogo terminou.

Lema 2 - P_2 é verdadeira.

Demonstração:

- (1) Mova o disco 1 para o pino C .
 - (2) Mova o disco 2 para o pino B .
 - (3) Mova o disco 1 para o pino B .
- O jogo terminou.

Lema 3 - P_3 é verdadeira.

Demonstração: (exercício)

Lema 4 - Para cada natural n , $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Demonstração:

Sejam dados $n + 1$ discos no pino A . Vamos supor que P_n é verdadeira.

- (1) P_n é verdadeira $\Rightarrow$ os discos $1, 2, \dots, n$ podem ser movidos do pino A para o pino C por movimentos permissíveis.
 - (2) Mova o disco $n + 1$ do pino A para o pino B .
 - (3) Mova os discos $1, 2, \dots, n$ do pino C para o pino B (observe que eu posso fazer isso, porque P_n é verdadeiro).
- O jogo terminou.

Resolvemos o problema, pois:

- a) O lema 4 nos dá uma cadeia infinita de implicações:

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \Rightarrow \dots$$

- b) O lema 1 nos diz que a 1ª afirmação da cadeia é verdadeira.

Logo, todas as afirmações — $P_1, P_2, \dots$ — são verdadeiras.

- **Exercício 4** - Qual o número mínimo de movimentos permissíveis para que sejam deslocados 4 discos de A para B ?
- **Exercício 5** - Dado um conjunto X , definimos:

$$P(X) = \{A | A \subset X\}.$$

Por exemplo, $X = \{a, 1\} \Rightarrow P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{1\}, X\}$.

1. Se Y é um conjunto de 3 elementos, quantos elementos tem $P(Y)$?
2. Se Z é um conjunto de 4 elementos, quantos elementos tem $P(Z)$?
3. Se W é um conjunto de 5 elementos, quantos elementos tem $P(W)$?
4. Suponha que A é um conjunto de n elementos ($n \in \mathbb{N}$) e que você sabe quantos elementos tem $P(A)$: $P(A)$ tem x elementos. Crie um procedimento que o faça saber quantos elementos tem $P(B)$, onde B é um conjunto com $n + 1$ elementos (a resposta é dada em função de x).

O método para a resolução do problema da Torre de Hanói serve, também, para provar o exemplo 5. Ele é útil para a solução de muitos problemas matemáticos e corresponde ao seguinte axioma dos números naturais:

Princípio da Indução Finita

Seja P_n uma proposição, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se

- a) P_1 é verdadeiro e
- b) $(\forall n \in \mathbb{N}) P_n \Rightarrow P_{n+1}$

então $(\forall n \in \mathbb{N}) P_n$ é verdadeira.

Observações

1. Uma analogia com o Princípio da Indução Finita:

Considere uma fila de dominós numerados 1, 2, 3, ...

Suponha que:

a) Se você empurrar qualquer dominó da fila então este fará cair o dominó seguinte.

b) O 1º dominó foi empurrado.

Podemos garantir que cada dominó da fila cairá? E se, ao invés do 1º ser empurrado, o 5º for empurrado, o que podemos garantir sobre cada dominó da fila, mantendo a 1ª hipótese?

O Princípio da Indução Finita pode ser formulado mais geralmente trocando 1 por algum $a \in \mathbb{N}$:

se P_a é verdadeiro e $P_n \implies P_{n+1}$ é verdadeiro para todo $n \geq a$ então P_n é verdadeiro para todo $n \geq a$ (ver Exercício 15.1.).

2) Uma forma equivalente ao Princípio da Indução Finita:

Seja $P_1, P_2, \dots, P_n$ uma sequência de proposições (uma para cada $n \in \mathbb{N}$). Se

a) P_1 é verdadeira e

b) para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \implies P_{n+1}$ então P_n é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

3) Alguns problemas do capítulo 1 podem ser resolvidos a partir de procedimentos indutivos. Por exemplo, para sabermos quantos pentaminós existem, basta conhecermos todos os tetraminós (e a história se repete). Tente criar um procedimento indutivo para particionar 7. Observe que a proposição P_n sobre o número de partições de n é bastante difícil de se formular:

$P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 3, P_4 = 5, P_5 = 7, P_6 = 11$.

Pode-nos parecer que P_7 será 13. Mas, não é.

• **Exercício 6** – Qual o número mínimo de movimentos permissíveis para que sejam deslocados n discos de A para B (exemplo 6)? Prove por indução o que você considera ser a resposta.

• **Exercício 7** – Se X é um conjunto com n elementos, quantos elementos tem $P(X)$? Prove, por indução, que sua resposta é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

• **Exercício 8** – Seja $P_n: 2^n = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que $P_n \implies P_{n+1}$

b) P_n é verdadeiro para todo n ?

c) Como estariam dispostos os dominós numa fila para representar uma situação análoga a este problema?

• **Exercício 9** – Descubra o erro na seguinte demonstração por indução de que P_n é verdadeira para todo n :

P_n : um conjunto de n pessoas no qual tem uma mulher só tem mulher.

Demonstração:

a) P_1 é verdadeira, pois um conjunto de uma pessoa no qual tem uma mulher só tem mulher.

b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha P_n verdadeira. Vou mostrar que P_{n+1} é verdadeira. Seja A um conjunto com $n+1$ pessoas, no qual tem uma mulher M .

– numeram-se as pessoas de 1 a $n+1$, de tal modo que a mulher M tenha o número n .

– no conjunto das pessoas 1, 2, ..., n só há mulher, por hipótese de indução.

– no conjunto das pessoas 2, 3, ..., $n, n+1$ há uma mulher. Logo, também por hipótese de indução, as pessoas 2, ..., $n+1$ são mulheres.

Conclusão: as pessoas $1, 2, \dots, n+1$ são mulheres. Isto é, no conjunto A só tem mulher. Logo, P_{n+1} é verdadeira.

- Exercício 10 – Idem para $P_n: 2^{n-1} = 1$

Demonstração:

- P_1 é verdadeira, pois $2^{1-1} = 2^0 = 1$.
- Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha $P_1, P_2, \dots, P_n$ verdadeiras. Então P_{n+1} também é verdadeira, isto é, $2^{(n+1)-1} = 1$, pois

$$2^{(n+1)-1} = 2^n = \frac{2^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

- Exercício 11 – Faça uma analogia do Exercício 9 com uma fila de dominós.
- Exercício 12 – Verifique se as seguintes proposições P_n são verdadeiras para todo $n \in \mathbb{N}$, provando caso o forem, dando contra-exemplo, caso negativo:

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$
- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
- $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
- $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \in \mathbb{R}, r \neq 1)$
- $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$
- $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ é múltiplo de 17.
- $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$

- Exercício 13 – Formule e prove por indução uma regra para as somas:

$1^2, 2^2 - 1^2, 3^2 - 2^2 + 1^2, 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2, 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2$ etc...

- Exercício 14 – Considere a seguinte disposição de números ímpares:

```

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
...
```

- Deduz a fórmula da soma dos números da n -ésima linha e prove-a por indução.
- Use o resultado do item anterior para provar:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

- Exercício 15 – Prove por indução:

- o número de diagonais de um polígono convexo com n lados é $n(n-3)/2$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$)
- o n -ésimo número natural ímpar é $2n-1$

- Exercício 16

- Seja $a \in \mathbb{N}$. Defina indutivamente $a \times n$, a partir da operação de soma, em que $n \in \mathbb{N}$. (sug.: Crie um conjunto de regras para que, por recorrência, um computador, por exemplo, possa achar $a \times n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sabendo apenas somar).
- Seja $a \in \mathbb{N}$. Defina indutivamente a^n , a partir da operação de multiplicação, em que $n \in \mathbb{N}$.

- Exercício 17 – Formule e prove por indução a proposição que diz quantas palavras de n letras eu posso fazer com n símbolos diferentes, sem repetição de símbolos na palavra.

4.2.3 SUBTRAÇÃO EM $\mathbb{N}$

Sejam $p, q, n \in \mathbb{N}$ tais que $n + p = q$. Neste caso, escrevemos $n = q - p$.

Essa operação é chamada subtração e é definida em alguns pares de números naturais. Por exemplo, $x + 2 = 3$ tem solução pois $3 - 2$ é definido em $\mathbb{N}$. Mas, $x + 3 = 2$ não tem solução, $2 - 3$ não é definido em $\mathbb{N}$. Para eliminar essas impossibilidades, acrescentaram-se ao sistema numérico o zero e os inteiros negativos.

4.3 Números Inteiros

Representa-se o conjunto dos números inteiros por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

No sistema dos números inteiros, a subtração é definida para qualquer par de inteiros:

$$a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b)$$

4.3.1 DIVISÃO EM $\mathbb{Z}$

Suponha $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a = b \cdot c$ e $b \neq 0$. Escrevemos neste caso que $b \mid a$. Dizemos então que a é múltiplo de b ou que a é divisível por b ou que b divide a ou, ainda, que b é divisor de a . Por exemplo, 6 é múltiplo de (-2) pois $6 = (-2)(-3)$ e $(-2) \neq 0$.

- **Exercício 18** – Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Descreva o subconjunto de $\mathbb{Z}$ que é solução da equação $bx = a$.

Podemos resolver em $\mathbb{N}$ equações como $2x = 4$. Porém, a equação $4x = 2$ não tem solução em $\mathbb{N}$. Como dividir, por exemplo, 5 dólares entre 10 pessoas? Resolve-se este problema facilmente porque existe um sistema monetário que inclui $1/2$ dólar. Com os números, a mesma coisa. Amplia-se o sistema numérico para que equações do tipo $bx = a$, $b \neq 0$, tenham soluções nele.

4.4 Números Racionais

O conjunto dos números racionais é indicado por $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Veremos que os números racionais caracterizam-se por determinadas representações decimais. Por exemplo, 0,2500... representa o racional $1/4$. Agora, 1,2323... representa algum número racional? E 1,232232223...?

No primeiro caso, dizemos que a representação decimal é periódica exata. No segundo caso, dizemos que a representação decimal é periódica não exata. No terceiro caso, dizemos que é não periódica. Sabemos que cada número decimal periódico tem seu número racional correspondente — a geratriz.

Exemplo: 1,2323....

Chamando de x a geratriz, temos $x = 1,2323....$

Multiplicando por 100, $100x = 123,23...$

Subtraindo uma equação da outra, temos

$$100x - x = 123,2323... - 1,2323... = 122.$$

$$\text{Logo, } x = 122/99.$$

Agora, 1,232232223... não é periódico. Será que é racional? A caracterização seguinte responde a pergunta:

Teorema: a é um número racional $\iff a$ tem uma representação decimal periódica.

A demonstração dessa equivalência não é difícil. Faltaria mostrar apenas a implicação: $a \in \mathbb{Q} \implies a$ tem representação decimal periódica (por quê?). Para isso, observe que, como $a \in \mathbb{Q}$, $(\exists p, q \in \mathbb{Z})(q \neq 0) a = p/q$ e nesse processo de divisão somente um número finito de restos pode ocorrer. Logo, se o número não tiver uma representação periódica exata, alguns restos terão que se repetir, formando então uma sequência de restos que se repete infinitamente. Por outro lado, aparece no quociente uma sucessão

de dígitos correspondentes a essa sequência de restos, ambas se repetindo infinitamente no mesmo período.

- **Exercício 19** – Ache uma representação decimal para os seguintes números:

- $10/7$
- $1/13$
- $5/9$

- **Exercício 20**

1. Quantos restos podem aparecer na divisão de um número inteiro por 7? E por 13? E por 9?
2. No Exercício 19, item b), qual o resto que se repete? Qual a sequência de dígitos que se repete no quociente?
3. Compare os itens acima com os argumentos da prova da afirmação: $a \in \mathbb{Q} \implies a$ tem representação periódica.

- **Exercício 21** – Ache a geratriz das seguintes dízimas (números decimais) periódicas:

- $0,999\dots$
- $2,1299\dots$
- $7,999\dots$
- $1,02010101\dots$
- $1,2000\dots$
- $287,000\dots$

- **Exercício 22** – O número $1,232232223\dots$ representa algum racional?

Uma das desvantagens da representação decimal é que ela é ambígua. Podemos ter, para alguns números racionais, duas representações decimais, como, por exemplo, $1/5 = 0,1999\dots = 0,2$. Às vezes é necessário eliminar essa ambigüidade (ver a **diagonal de Cantor** no apêndice) e consideramos apenas a representação decimal periódica não exata para os números racionais, que é única.

Daqui em diante, identificaremos um número racional com sua representação decimal (já tínhamos feito isso quando escrevemos $1/5 = 0,2$, por exemplo).

- **Exercício 23** – Ache a representação decimal periódica não exata de cada número racional abaixo:

- $3/4$
- $1,6$
- 23
- $1/3$

- **Exercício 24** – Crie números decimais não-periódicos.

O Exercício 24 poderia ser redigido assim: dê exemplos de números decimais que não são racionais. Esses números existem e são ditos irracionais. Muitos deles surgiram em problemas geométricos, por exemplo, o comprimento de uma circunferência de diâmetro 1. Outros, em problemas algébricos, por exemplo, encontrar as soluções da equação $x^2 = 2$. Este resultado é o que será mostrado a seguir.

$x^2 = 2$ não tem solução em $\mathbb{Q}$.

Demonstração: (Redução ao absurdo). Vamos supor, por absurdo, que $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, tais que p/q é irredutível e $p^2/q^2 = 2$.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \text{ e } q \neq 0 \iff p^2 = 2q^2 \text{ e } q \neq 0 \implies 2 \mid p^2$$

$$2 \text{ é primo} \iff 2 \mid p \quad (1)$$

$$2 \mid p \iff (\exists r \in \mathbb{Z}) p = 2r \implies p^2 = 4r^2 \iff 2q^2 = 4r^2 \\ \iff q^2 = 2r^2 \implies 2 \mid q^2 \iff 2 \mid q. \quad (2)$$

Por (1) e (2), temos que 2 é divisor comum de p e q , o que é uma contradição com a hipótese de que p/q é irredutível.

Logo, a hipótese de que $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$ é absurda.

Obs.: A hipotenusa x de um triângulo retângulo de catetos iguais a 1 é tal que $x^2 = 2$. Escrevemos então $x = \sqrt{2}$.

- **Exercício 25** – Prove que $x^2 = 3$ não tem solução em $\mathbb{Q}$ (sug.: use os argumentos da demonstração acima).
- **Exercício 26** – Idem para $x^2 = p$ em que p é primo e positivo.

É natural, então, estender o sistema dos números racionais ao sistema formado por todos os números decimais. Este sistema de números — os números reais — é fundamental para o Cálculo e será nosso objeto de estudo na próxima seção.

- **Exercício 27** – Considere:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$$

$$\mathbb{R} = \{x \mid x = n + 0, d_1 d_2 \dots, n \in \mathbb{Z} \text{ e } (\forall i) d_i \in \{0, \dots, 9\}\}$$

1. Faça um diagrama de Euler com os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.
2. Situe no diagrama os números abaixo, escrevendo-os sob a forma pela qual os conjuntos estão definidos (ex.: $-3 \notin \mathbb{N}$ e $-3 \in \mathbb{Z}$, pois $-3 = 0 - 3$):
 - a) -0
 - b) $0,999\dots$

- c) $2,15$
- d) $-\pi$
- e) $1 + 2^{1/3}$
- f) $21/-3$
- g) $0,99\dots - 1$
- h) $0,1010010001\dots$
- i) $1 - 0,1010010001\dots$
- j) 2^{-3}
- l) $1 + \sqrt{2}$
- m) $1/10 + 2/100 + 1/1000 + 2/10000 + \dots$
- n) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- o) 3^7

4.5 Números Reais

Representa-se o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_0 \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall i \in \mathbb{N}) a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}\}.$$

Vamos dar uma descrição dos números reais. Antes disso, porém, observe à seguinte *prova* de que $2 = 1$:

$$x = y \implies x^2 = xy \iff x^2 - y^2 = xy - y^2 \iff \\ (x - y)(x + y) = y(x - y) \iff \\ x + y = y \xrightarrow{x=y} 2y = y \iff 2 = 1$$

- **Exercício 28** – Aponte a(s) falha(s) na *prova* apresentada anteriormente de que $2 = 1$.
- **Exercício 29** – Procura-se estender um sistema numérico A a um sistema numérico B de tal maneira que as propriedades das operações em A se mantenham em B . Mas, nem sempre é verão. Descubra os erros teóricos nas seguintes demonstrações:

- a) Suponhamos que $A + B = C$, que $A = 3$ e $B = 2$;

$$A + B = C \stackrel{\times(A+B)}{\iff} (A+B)(A+B) = C(A+B) \iff$$

$$A^2 + AB - AC = -AB - B^2 + BC \iff$$

$$A(A+B-C) = -B(A+B-C) \stackrel{+(A+B-C)}{\iff}$$

$$A = -B \iff A + B = 0$$

$$\text{Mas, } 3 + 2 = 5 \neq 0.$$

- b) Seja $n \in \mathbb{R}$.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \iff$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2 \stackrel{-n(2n+1)}{\iff}$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) =$$

$$= n^2 - n(2n+1) \stackrel{+1/4(2n+1)^2}{\iff}$$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 =$$

$$= n^2 - n(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1) \iff$$

$$\left[(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)\right]^2 = \left[n - \frac{1}{2}(2n+1)\right]^2 \iff$$

$$n+1 - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1) \iff n = n+1 \iff$$

$$0 = 1$$

Alguma coisa está errada na demonstração acima. Onde, exatamente?

- c) Você concorda com a seguinte afirmação:

$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$? Parece razoável. Veja os exemplos:

i. $2 \times 5 = \sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$

ii. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

Então:

$$\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} \implies$$

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{1}. \text{ Ou seja, } (-1) = 1. \text{ Mas, como?}$$

O método axiomático elimina paradoxos como este. Conceitos primitivos como soma, multiplicação e elemento neutro são regidos por leis (axiomas) que devemos seguir ao fazermos operações com números. Aplicaremos esse método no estudo do sistema numérico dos reais.

O sistema dos números reais é descrito como sendo um corpo

ordenado completo. O conjunto de números reais $\mathbb{R}$ é munido de duas operações binárias¹ — +, a soma, e ., a multiplicação — e essas operações e os elementos 0, 1 satisfazem os seguintes axiomas:

Axioma 1: $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y = y + x$ (Comutatividade da Soma)

Axioma 2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x+y)+z = x+(y+z)$ (Associatividade da Soma)

Axioma 3: $(\exists 0 \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) x + 0 = 0 + x = x$ (Elemento Neutro da Soma)

Axioma 4: $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists (-x) \in \mathbb{R}) x + (-x) = (-x) + x = 0$ (Elemento Inverso da Soma)

Axioma 5: $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x \cdot y = y \cdot x$ (CM)

Axioma 6: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (AM)

Axioma 7: $(\exists 1 \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) 1 \cdot x = x \cdot 1 = 1$ (ENM)

Axioma 8: $(\forall x \in (\mathbb{R} - \{0\})) (\exists x^{-1} \in \mathbb{R}) x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (EIM)

Axioma 9: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (DIS)

Axioma 10: $1 \neq 0$

Esses axiomas são ditos axiomas de corpo e qualquer sistema numérico que satisfaz a esses axiomas é chamado um corpo.

• Exercício 30

- Qual é o menor subconjunto dos reais fechado em relação à soma contendo 1?
- Qual é o menor subconjunto dos reais, fechado em relação à multiplicação, contendo 2?
- Qual é o menor subconjunto dos reais, fechado em relação à soma e à subtração, contendo 1?
- Qual é o menor subconjunto dos reais, fechado em relação à multiplicação e à divisão, contendo 2?

¹isto é, são funções e, logo, satisfazem as seguintes propriedades:

- $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y \in \mathbb{R}$ (Fechamento da Soma)
- $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x \cdot y \in \mathbb{R}$ (Fechamento da Multiplicação)
- $a = b \implies (\forall c \in \mathbb{R}) a + c = b + c \text{ e } a \cdot c = b \cdot c$ (T_0)

5. O mesmo que 4., trocando 2 por -2.
6. O mesmo que 4., trocando 2 por todos os números primos.
7. O mesmo que 3., trocando 1 por 8 e 12.
8. Qual é o menor subconjunto dos reais, fechado em relação à soma, subtração, multiplicação e divisão, contendo 1?
9. O mesmo que 8., trocando 1 por 1 e -1.
10. O mesmo que 8., trocando 1 por $\sqrt{2}$. (Sugestão: você vai precisar mostrar que um número da forma $1/(a+b\sqrt{2})$, $a, b \in \mathbb{Q}$, pode ser colocado na forma $c+d\sqrt{2}$, $c, d \in \mathbb{Q}$. Veja como.)

- **Exercício 31** – Considere o sistema numérico que tem apenas dois elementos — 0 e 1 — com adição e multiplicação definidas pelas seguintes tabelas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Quais dos axiomas de corpo são verdadeiros neste sistema? Tire uma conclusão.

Observações:

- a) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b)$
- b) $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}) \frac{1}{a} \stackrel{\text{def}}{=} a^{-1}$
- c) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) (b \neq 0) \frac{a}{b} \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot \frac{1}{b}$

Aqueles axiomas são as raízes de uma teoria que descreve parcialmente os números reais. Essa teoria descreve outros sistemas numéricos como, por exemplo, o do Exercício 31. A seguir, estão relacionados alguns teoremas dessa teoria:

Teorema 1: $(\forall a \in \mathbb{R}) 0.a = 0$

(T₁)

Dem.:

$$\begin{aligned}
 \text{ENS} &\Rightarrow 0 = 0 + 0 \xrightarrow{T_0} (\forall a \in \mathbb{R}) 0.a = (0 + 0).a \xrightarrow{\text{DIS}} \\
 (\forall a \in \mathbb{R}) 0.a &= 0.a + 0.a \xrightarrow[\text{T}_0]{\text{EIS}} \\
 (\forall a \in \mathbb{R}) 0.a + (-0.a) &= (0.a + 0.a) + (-0.a) \xrightarrow{\text{AS}} \\
 (\forall a \in \mathbb{R}) 0.a + (-0.a) &= 0.a + (0.a + (-0.a)) \xrightarrow{\text{EIS}} \\
 (\forall a \in \mathbb{R}) 0 &= 0.a + 0 \xrightarrow{\text{ENS}} (\forall a \in \mathbb{R}) 0 = 0.a
 \end{aligned}$$

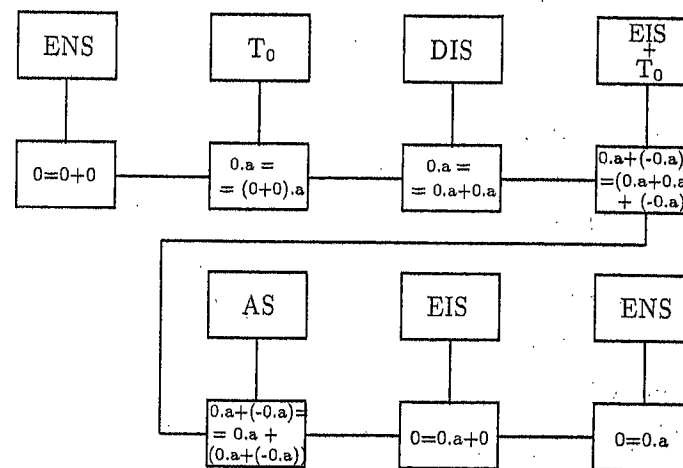


Figura 4.2. Fluxograma de Demonstração

Teorema 2: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

(T₂)

(Lei do Cancelamento da Soma)

Dem.:

$$\begin{aligned}
 a + b &= a + c \Rightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) \Rightarrow \\
 ((-a) + a) + b &= ((-a) + a) + c \Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c
 \end{aligned}$$

• Exercício 32

1. Faça um fluxograma para a demonstração do Teorema 2, dando os axiomas ou teoremas ou definições que justificam cada passagem.
2. Verifique quais as implicações que têm suas recíprocas verdadeiras.

Teorema 3: $(\forall a \in \mathbb{R}) (-a) = (-1).a$ (T₃)

Dem.:

$$\begin{aligned} \text{EIS} &\Rightarrow 1 + (-1) = 0 \Rightarrow (1 + (-1)).a = 0.a \Rightarrow \\ (1 + (-1)).a &= 0 \Rightarrow 1.a + (-1).a = 0 \Rightarrow a + (-1).a = 0 \Rightarrow \\ a + (-1).a &= a + (-a) = 0 \Rightarrow (-1).a = (-a) \end{aligned}$$

• Exercício 33

1. Faça um fluxograma para a demonstração do Teorema 3, dando os axiomas ou teoremas ou definições que justificam cada passagem.
2. Verifique quais as implicações que têm suas recíprocas verdadeiras.

Teorema 4: $(\forall a \in \mathbb{R}) a = -(-a)$ (T₄)

Dem.:

$$\text{EIS} \Rightarrow (-a) + a = 0 = (-a) + (-(-a)) \xrightarrow{T_2} a = -(-a)$$

Teorema 5: $a - b = -(b - a)$ (T₅)

Dem.:

$$\begin{aligned} a - b &\stackrel{\text{def}}{=} a + (-b) \xrightarrow{T_4} a - b = (-(-a)) + (-b) \xrightarrow{T_3} \\ a - b &= (-1)(-a) + (-1)b \xrightarrow{\text{D1S}} a - b = (-1)((-a) + b) \xrightarrow{T_3} \\ a - b &= -((-a) + b) \xrightarrow{\text{CS}} a - b = -(b + (-a)) \xrightarrow{\text{def}} \\ a - b &= -(b - a) \end{aligned}$$

Teorema 6: $(-a).(-b) = a.b$ (T₆)

Dem.:

$$\begin{aligned} (T_3) &\Rightarrow (-a).(-b) = ((-1).a).((-1).b) \xrightarrow{\text{AM}} \\ (-a)(-b) &= ((-1).a).((-1).b) = (-1).((a.(-1)).b) \xrightarrow{\text{CM}} \\ (-a).(-b) &= (-1).((-1).a).b \xrightarrow{\text{AM}} \\ (-a).(-b) &= (-1).((-1).(a.b)) \xrightarrow{T_3} \\ (-a).(-b) &= -(-(a.b)) \xrightarrow{T_4} (-a).(-b) = a.b \end{aligned}$$

Teorema 7: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) ab = ac \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow b = c$ (T₇)
(Lei do Cancelamento da Multiplicação).

Dem.:

$$\begin{aligned} ab = ac \text{ e } a \neq 0 &\xrightarrow{\text{EIM}} a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \xrightarrow{\text{AM}} \\ (a^{-1}a)b &= (a^{-1}a)c \xrightarrow{\text{EIM}} 1b = 1c \xrightarrow{\text{ENM}} b = c \end{aligned}$$

- **Exercício 34** – Considere o sistema numérico no qual os números são 0, 1, 2 e 3, com adição e multiplicação definidas pelas seguintes tabelas:

+	0	1	2	3	×	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	0	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	0	2
3	3	0	1	2	3	0	3	2	1

Exatamente um dos axiomas de corpo é falso neste sistema numérico. Descubra qual deles. O teorema abaixo é verdadeiro nele? Por quê?

Teorema: se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

• Exercício 35

1. Se $ab = ac$, então $b = c$? Por quê?
2. Se $a^2 = b^2$ então $a = b$? Por quê?
3. Mostre que se $abc = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$.
4. Sob que condições (se existe alguma) é verdade que $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x+a}$? Justifique as passagens por axiomas.

5. Idem para $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

- **Exercício 36** – Tente demonstrar alguns dos teoremas dados, por outros caminhos.

Teorema 8: $(b, d \neq 0) \quad (b.d)^{-1} = d^{-1}b^{-1} = b^{-1}d^{-1}$ (T₈)

Dem.: (roteiro)

1. Mostre que $(d^{-1}b^{-1})(bd) = 1$

2. Use o teorema 7 para mostrar que $d^{-1}b^{-1} = (bd)^{-1}$

Teorema 9: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (T₉)

Dem.:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \stackrel{\text{def}}{=} (a.b^{-1}) \cdot (c.d^{-1}) \stackrel{\text{AM}}{\iff} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a(b^{-1}(c.d^{-1})) \stackrel{\text{AM}}{\iff}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a((b^{-1}c)d^{-1}) \stackrel{\text{AM}}{\iff} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a(b^{-1}c))d^{-1} \stackrel{\text{CM}}{\iff}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a(c.b^{-1})).d^{-1} \stackrel{\text{AM}}{\iff} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ((ac)b^{-1})d^{-1} \stackrel{\text{AM}}{\iff}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ac)(b^{-1}.d^{-1}) \stackrel{\text{T}_8}{\iff} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ac)(bd)^{-1} \stackrel{\text{def}}{\iff}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Teorema 10: $(b, d \neq 0) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ (T₁₀)

Dem.: desenvolva $\frac{ad + bc}{bd}$

Observações:

1) Observe o seguinte:

$$(3 + (-2)) + (-2) = -1 = 3 + ((-2) + (-2))$$

O fato de uma operação binária ser associativa implica que não existem prioridades no caso dessa operação ser feita mais de uma vez. No exemplo dado, não importa se somarmos 3 com (-2)

primeiro, para depois somarmos 3 com o resultado da soma (-2) com (-2) (não é esse o caso, por exemplo, da subtração dos naturais. $8 - (4 - 2) = 6$ é diferente de $(8 - 4) - 2 = 2$). Escrevemos, então, $3 + (-2) + (-2) = -1$.

2) Sabemos que a soma e a multiplicação de reais são operações binárias associativas. A partir de agora, não será mais necessário justificar uma passagem, seja uma demonstração, seja em resolução de equações ou de desigualdades, por associatividade.

- **Exercício 37** – Prove os seguintes teoremas:

a) $\frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$ (T₁₁)

b) $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c} \quad (c, d \neq 0)$ (T₁₂)

c) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (b, c, d \neq 0)$ (T₁₃)

d) $a(-b) = -(ab)$ (T₁₄)

- **Exercício 38** – Use o teorema 11 para mostrar que todo número racional pode ser escrito na forma p/q ($q \neq 0$), em que $m.d.c.(p, q) = \pm 1$ (forma irredutível).
(Ver capítulo 1, Exercício 21, sobre m.d.c.)

- **Exercício 39** – Crie outros teoremas sobre números reais e tente prová-los, usando os teoremas demonstrados e os axiomas dados.

- **Exercício 40**

1. Verifique que os axiomas de corpo são satisfeitos por elementos da forma a/b , onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, definindo apropriadamente a soma, o produto e seus respectivos elementos neutros.
2. Verifique que eles são satisfeitos também se escrevemos a/b com (a, b) , definindo apropriadamente o que for necessário (soma, produto, elementos neutros).

- **Exercício 41** – Suponha que você sabe apenas operar com naturais, isto é, somar, subtrair, multiplicar e dividir. Simplifique os seguintes números, justificando cada passagem por axioma ou definição ou teorema.

Por exemplo: $2-3 \stackrel{\text{Ts}}{=} -(3-2) = -1$ pois $3-2 = 1$ (subtração de naturais)

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$

b) $\frac{15-20}{10}$

c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{24}{10}$

d) $\frac{3}{4} \div \frac{4}{3}$

e) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{(-15)}$

f) $\frac{2}{5} \cdot \frac{(2-1)}{3}$

- **Exercício 42** – Prove as seguintes identidades em $\mathbb{R}$, justificando cada passagem por axioma ou definição ou teorema:

a) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

b) $(x+a)(x-b) = x^2 + (a+b)x + ab$

c) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

d) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

e) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

f) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Obs.: $x^2 \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot x$, $x^3 \stackrel{\text{def}}{=} x^2 \cdot x = x \cdot x \cdot x$

4.5.1 EQUAÇÕES REAIS A UMA VARIÁVEL

Resolva as seguintes equações:

a) $\sqrt{x^2 + 4} = x - 2$

b) $x^2 = x$

Quem resolveu as equações acima, encontrou, como conjunto solução da primeira equação, o conjunto vazio e, como solução da segunda equação, o conjunto $\{0, 1\}$. Vejamos porque: relativo à primeira equação, temos

$$\sqrt{x^2 + 4} = x - 2 \implies x = 0.$$

Conclui-se que se $\sqrt{x^2 + 4} = x - 2$ tem solução então a solução é 0. Por outro lado,

$$x = 0 \not\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = x - 2,$$

pois $-2 \neq 4$. Ou seja, 0 não é solução da primeira equação.

Em relação à segunda equação, temos:

$$x^2 = x \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Por um lado, temos que as únicas soluções possíveis são 0 e 1. Por outro lado, que 0 e 1 são soluções da segunda equação. Logo, 0 e 1 são as únicas soluções da equação.

Resolver equação real de uma variável é determinar, por uma cadeia de afirmações, o conjunto de todas as constantes reais que satisfazem à equação dada — as **raízes** da equação.

$a_1, \dots, a_n$ são as raízes de uma equação se e somente se a afirmação $x = a_1$ ou $\dots$ ou $x = a_n$ é equivalente à equação dada. Equação é uma afirmação de igualdade.

• Exercício 43

1. Prove a partir dos axiomas dados que a única solução real de $x^3 = 0$ é $x = 0$.
2. Prove a partir dos axiomas dados que:

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Sugestão: prove por absurdo.

3. Resolva a equação

$$(x-2)(x+3)(2x-18)^2 = 0,$$

justificando cada passagem.

4. Obtenha uma equação do terceiro grau cujas raízes sejam a , b e c .

• Exercício 44 - Resolva as seguintes equações reais, justificando cada passagem por axioma, teorema ou definição.

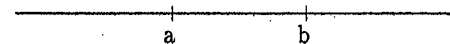
- a) $2x + 2 = 5x + 1$
- b) $-x + 1 = -2x + 3$
- c) $x^2 = 1$
- d) $x - 5x = -6$
- e) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
- f) $2x^2 - 3x = 9$
- g) $3x^2 - 6x = 0$
- h) $\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1} = 0 \quad (x \neq \pm 1)$
- i) $\frac{2x-5}{x+3} = 0 \quad (x \neq -3)$
- j) $\frac{x+1}{x^2-1} = 0 \quad (x \neq \pm 1)$
(Sugestão: ver Exercícios 42 e 43.)

• Exercício 45 - Mostre que 1, 2 e 3 são as únicas raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

(Sugestão: i. Comparar $(x-1)(x-2)(x-3)$ com $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; ii. Use a proposição: $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.)

4.5.2 ORDEM

Podemos imaginar os números reais como estando arranjados numa reta, cada ponto da reta representando um número real (um fato interessante é que usando régua e compasso não podemos construir números como π , por exemplo [9]).



Escrevemos $a < b$ para indicar que a está à esquerda de b . Dizemos então que a é menor que b . Escrevemos $b > a$ significando que $a < b$; $a \leq b$ é o mesmo que $a < b$ ou $a = b$; $b \geq a$, o mesmo que $b > a$ ou $b = a$.

$<$ é uma relação em $\mathbb{R}$ que satisfaz aos seguintes axiomas:

Axioma O_1 : Dados $a, b \in \mathbb{R}$, uma e somente uma das seguintes condições vale: $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$
(Tricotomia) (TRI)

Axioma O_2 : $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \ a < b \text{ e } b < c \implies a < c$
(Transitividade) (TRA)

Axioma O_3 : $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \ a < b \implies a + c < b + c$ (OS)

Axioma O_4 : $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \ a < b \text{ e } c > 0 \implies ac < bc$ (OM)

Definição 1: Um número real é positivo se e só se $a > 0$.

Definição 2: Um número real é negativo se e só se $a < 0$.

Notações:

$$\mathbb{Z}^+ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$$

$$\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$$

Chamamos uma expressão da forma $a \leq b$ de desigualdade. Podemos deduzir todas as propriedades elementares de desigualdade dos quatro axiomas acima.

Teorema 15: $a < b \implies (-a) > (-b)$ (T₁₅)

Dem.:

$$\begin{aligned} a < b &\stackrel{O_3}{\implies} a + (-a) + (-b) < b + (-a) + (-b) \stackrel{CS}{\iff} \\ a + (-a) + (-b) &< b + (-b) + (-a) \stackrel{EIS}{\iff} 0 + (-b) < 0 + (-a) \stackrel{ENS}{\iff} \\ (-b) < (-a) &\stackrel{\text{def}}{\iff} (-a) > (-b) \end{aligned}$$

- Exercício 46 – Prove a recíproca do Teorema 15

Teorema 16: $c > 0 \iff (-c) < 0$ (T₁₆)

Dem.:

$$\text{a) } c > 0 \stackrel{T_{15}}{\implies} (-c) < (-0) \stackrel{-0=0}{\iff} (-c) < 0$$

$$\text{b) } (-c) < 0 \stackrel{T_{15}}{\implies} (-(-c)) > 0 \stackrel{T_4}{\iff} c > 0$$

Teorema 17: $a < b$ e $c < 0 \implies ac > bc$ (T₁₇)

Dem.:

$$\begin{aligned} a < b \text{ e } c < 0 &\stackrel{T_{16}}{\iff} a < b \text{ e } (-c) > 0 \stackrel{O_4}{\implies} a(-c) < \\ < b(-c) &\stackrel{T_{14}}{\iff} -(ac) < -(bc) \stackrel{T_{15}}{\iff} ac > bc \end{aligned}$$

Teorema 18: $a \neq 0 \implies a^2 > 0$ (T₁₈)

Dem.:

$$a \neq 0 \stackrel{O_1}{\iff} a > 0 \text{ ou } a < 0$$

$$\text{a) } a > 0 \stackrel{O_4}{\implies} a^2 > 0.0 \stackrel{T_1}{\iff} a^2 > 0$$

$$\text{b) } a < 0 \stackrel{T_{17}}{\implies} a^2 > 0.0 \stackrel{T_1}{\iff} a^2 > 0$$

Logo, $a \neq 0 \implies a^2 > 0$.

- Exercício 47

1. Mostre que $1 > 0$

2. Prove que $(\forall n \in \mathbb{N}) n > 0$

- Exercício 48 – Prove:

$$\text{a) } a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0$$

(Sugestão: por tricotomia é suficiente mostrar que as condições $1/a = 0$ e $1/a < 0$ são impossíveis.)

$$\text{b) } a < 0 \iff \frac{1}{a} < 0$$

- Exercício 49

1. Escreva uma equação com coeficientes em $\mathbb{N}$, mas sem solução em $\mathbb{N}$.

2. Idem para $\mathbb{Z}$.

3. Idem para $\mathbb{Q}$.

4. Idem para $\mathbb{R}$.

- Exercício 50 – Obtenha as soluções da equação $\frac{(x-3)(x+1)}{18+x^2}$. Explique cada passagem.

- Exercício 51 – Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

a) Encontre condições sobre a, b, c para que essa equação tenha solução em $\mathbb{R}$.

b) Ache, então, as soluções reais.

Roteiro:

- 1) Transporte o termo constante para o lado direito da igualdade.
- 2) Divida a equação resultante pelo coeficiente de x^2 .
- 3) Adicione, aos dois lados da equação, uma constante de tal maneira que o lado esquerdo da equação seja um quadrado.
- 4) Fatore o lado esquerdo.
- 5) Tire conclusões sobre o lado direito da equação.
- 6) Ache, então, as condições sobre a, b e c .
- 7) Resolva a equação.

- **Exercício 52** - Resolva as equações abaixo, construindo uma cadeia de equações equivalentes e dando ao lado o(s) axioma(s) ou teorema(s) que justifica(m) cada passagem:

- a) $5 - 3x = 17 - x$
- b) $5x - 3 = 17 + 1$
- c) $-3x - 7 = x + 5$

Verifique suas respostas.

O mesmo para as desigualdades obtidas, substituindo-se acima o sinal $=$ por $<$.

Represente, na reta dos números reais, suas respostas para o item anterior. Teste suas respostas em alguns números.

Teorema 19: $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ e } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b < 0)$.
(T₁₉)

Dem.:

- a) Vamos mostrar a implicação: $ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \text{ e } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b < 0)$. Para isto, provaremos a sua contrapositiva.
 $(a \leq 0 \text{ ou } b \leq 0) \text{ e } (a \geq 0 \text{ ou } b \geq 0) \Leftrightarrow$
 $[(a \leq 0 \text{ ou } b \leq 0) \text{ e } a \geq 0] \text{ ou } [(a \leq 0 \text{ ou } b \leq 0) \text{ e } b \geq 0] \Leftrightarrow$
 $(a \leq 0 \text{ e } a \geq 0) \text{ ou } (b \leq 0 \text{ e } a \geq 0) \text{ ou } (a \leq 0 \text{ e } b \geq 0)$

$$\text{ou } (b \leq 0 \text{ e } b \geq 0) \Leftrightarrow$$

$$a = 0 \text{ ou } (a \geq 0 \text{ e } b \leq 0) \text{ ou } (a \leq 0 \text{ e } b \geq 0) \text{ ou } b = 0$$

$$\frac{T_{17}}{T_1} ab \leq 0$$

- b) A demonstração da outra implicação é deixada como exercício.

Teorema 20: $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0 \text{ e } b > 0) \text{ ou } (a > 0 \text{ e } b < 0)$.
(T₂₀)

Dem.: como exercício.

- **Exercício 53** - Resolva as desigualdades a seguir, escrevendo uma cadeia de desigualdades equivalentes, justificando cada passagem por axioma, ou definição ou teorema. Represente na reta dos números reais suas respostas para o item anterior.

Teste-as para alguns números.

$$\text{a) } (x + 2)(x - 3) \geq 0$$

$$\text{b) } \frac{(2x + 3)}{x^2 + 1} < 0$$

$$\text{c) } x^2 > 1$$

$$\text{d) } 2x^2 + 4x + 1 > -1$$

$$\text{e) } \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} \leq 0 \quad (x \neq \pm 2)$$

$$\text{f) } \frac{(x - 2)(x + 7)(2x - 5)}{x^2 + x^4} > 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\text{g) } \frac{1}{3x^2 + 18} \leq 1$$

$$\text{h) } \frac{1}{(x - 1)(x^2 + 2)} \leq 0 \quad (x \neq 1)$$

• Exercício 54

1. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Mostre que se $a > b$ e $c > d$, então, $ac > bd$.
2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $a > b \implies a^2 > b^2$.
3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $a^2 > b^2 \implies a > b$. (Sugestão: Redução ao absurdo.)

• Exercício 55 – Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a, b > 0$.

1. Mostre que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. (Sugestão: i) redução ao absurdo; ii) use ex. 54.)
2. Ilustre geometricamente esta desigualdade.
3. Ache condições sobre a, b para que $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

• Exercício 56 – Ache o comprimento e a largura do retângulo de perímetro 20 que tem área máxima. (Sugestão: use Exercício 55.)

4.5.3 COMPLETUDE

Os axiomas de corpo, juntamente com os axiomas de ordem (O_1, O_2, O_3, O_4) , ainda não são suficientes para descrever o sistema dos números reais. Todos esses axiomas são satisfeitos pelo sistema de números racionais. Mas, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Precisamos de mais um axioma (o axioma do supremo) para garantir que o sistema de números reais não tem *buracos*.

4.5.4 AXIOMA DO SUPREMO

Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente tem uma menor cota superior (que não está, necessariamente, nesse subconjunto), que chamamos de supremo (sup).

$\mathbb{Q}$ não satisfaz ao axioma do supremo (sup). A demonstração desse fato encontra-se em muitos livros de análise [8].

Um resultado importante deduzido do axioma do sup é o teorema da raiz enésima que é enunciado mais adiante.

4.5.5 POTÊNCIA DE UM NÚMERO REAL

Inicialmente, foi definida a potência inteira de um número real para minimizar a notação. Por exemplo, representou-se $a.a.a$ por a^3 . Chamamos a de base e 3 de potência ou expoente.

Quando $a \neq 0$, $(a^{-1})^3$ foi representado por a^{-3} .

Neste caso, $a^3 \cdot a^{-3} = 1$. Para valer uma das propriedades de potência (qual propriedade?), foi definido $a^0 = 1$, quando $a \neq 0$.

Definição:

1. $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}) a^0 = 1$
2. $(\forall a \in \mathbb{R}) a^1 = a$
3. $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) a^{n+1} = a^n \cdot a$
4. $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(\forall n \in \mathbb{N}) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Vamos estender agora a definição de potência. Se $a \in \mathbb{R}^+$, definimos $a^{1/n}$ como sendo a solução positiva em $\mathbb{R}$ da equação $x^n = a$. Mas, essa raiz pertence a $\mathbb{R}^+$? Para responder essa e outras perguntas do gênero, enunciamos o seguinte teorema que decorre do axioma do sup:

Teorema da raiz enésima:

Se $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ então existe um único $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $b^n = a$. Dizemos então que b é a raiz enésima de a e escrevemos $b = \sqrt[n]{a}$.

Observações:

- 1) Se $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ então $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^+$ (em particular, se $n = 1$, $\sqrt[n]{a} = a$; se $n = 2$, escrevemos $\sqrt{a}$ em vez de $\sqrt[2]{a}$).
- 2) Se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}^+$, definimos $-\sqrt[n]{a} = a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Se $a \in \mathbb{R}^+$ então, qualquer que seja $p \in \mathbb{Z}$, $a^p \in \mathbb{R}^+$. Pelo teorema da raiz enésima, $\sqrt[p]{a^p} \in \mathbb{R}^+$, para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Podemos então definir potência racional de um real positivo.

Definição: Seja $x \in \mathbb{Q}$.

Logo, $(\exists p \in \mathbb{Z}) (\exists q \in \mathbb{Z}^+) (\text{mdc}(p, q) = \pm 1) x = \frac{p}{q}$.

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+) a^x = a^{p/q} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[q]{a^p}$$

• **Exercício 57** – Calcule:

- a) $(0,125)^{-2/3}$
- b) $(32)^{0,4}$
- c) $8^{0,333\dots}$

• **Exercício 58** – Ache um número racional cujos 5 primeiros dígitos são iguais aos 5 primeiros dígitos de $2^{1/2}$.

Usando o axioma do sup podemos definir, para todo $a \in \mathbb{R}^+$, a^x , qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. O número $e = 2.7182818285\dots$, que é irracional, é o sup do seguinte conjunto:

$$2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots$$

Definimos 2^e , por exemplo, como sendo o sup do conjunto: $2^2, 2^{(3/2)^2}, 2^{(4/3)^3}, \dots$

Enunciamos os seguintes teoremas, sem demonstrá-los, para expoentes reais (eles podem ser facilmente verificados para expoentes racionais):

Teorema 21: (T₂₁)

1. $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in \mathbb{R}) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\forall x, y \in \mathbb{R}) (a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Teorema 22: $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in \mathbb{R}) (ab)^x = a^x \cdot b^x$ (T₂₂)

Como corolário do teorema 2, temos que

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Uma pergunta seria porque não definimos potência real de um real qualquer. Como $(\forall a \in \mathbb{R}) a^2 \geq 0$ (já foi demonstrado anteriormente) e $(-1) < 0$ (também demonstrado), $x^2 = (-1)$ não tem solução em $\mathbb{R}$. Logo, não teria sentido $(-1)^{1/2}$. De uma maneira geral, não podemos definir $a^{p/q}$ quando $a \in \mathbb{R}^-$ e p/q é um racional irredutível com denominador par. Mas, se $a \in \mathbb{R}^-$ e p/q é um racional irredutível com denominador ímpar podemos definir $a^{p/q}$:

$$a^{p/q} \stackrel{\text{def}}{=} -\sqrt[q]{(-a)^p} \quad (a \in \mathbb{R}^- \iff (-a) \in \mathbb{R}^+)$$

• **Exercício 59** – Resolva as seguintes desigualdades:

- a) $\sqrt{x^2 + 1} \leq 1$
- b) $(x + 1)^2 \geq 2$
- c) $\sqrt{x^2 + 2} < \sqrt{2x^2 + 1}$
- d) $x^2 - x + 1 \geq 0$ (ver exercício 51)
- e) $\frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2}} \leq 0$
- f) $x^3 \leq -1$ (ache um polinômio de segundo grau tal que multiplicado por $(x + 1)$ resulta no polinômio $(x^3 + 1)$).

• **Exercício 60** – Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras. Construa contra-exemplos para as que não o forem:

- a) $x > 0 \iff x^2 > 0$
- b) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$
- c) $a^2 \geq b^2$ e $a \geq 0 \Rightarrow a \geq b$

d) $a \leq b \text{ e } b < c \Rightarrow a < c$

e) $a < b \text{ e } c \geq 0 \Rightarrow ac < bc$

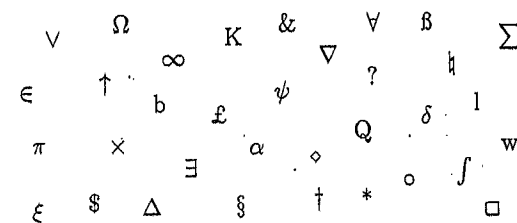
Referências Bibliográficas

- [1] E. E. Moise, *Cálculo I*, Edgard Blücher, 1970.
- [2] A. C. Barreto, *Matemática Funcional I*, Vega, 1970.
- [3] K. E. Nielsen, *Algebra: a Modern Approach*, Barnes and Noble College Outline Series, 1969.
- [4] Bush and Obreanu, *Basic Concepts of Mathematics*, Holt Rinehart Winston, 1965.
- [5] J. W. Kitchen, *Calculus of One-Variable*, Addison-Wesley, 1968.
- [6] G. Polya, *A Arte de Resolver Problemas*, Interciência, 1977.
- [7] C. F. Brumfiel, R. E. Eicholz e M. E. Shanks, *Conceitos Fundamentais da Matemática Elementar*, Ao Livro Técnico.
- [8] S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley, 1969.
- [9] H. Herstein, *Tópicos de Álgebra*, Polígono, 1970.

5

Função

A introdução mais natural para o conceito de função dá-se através do nosso processo de contar objetos. Responda, com certeza: quantos símbolos há abaixo?



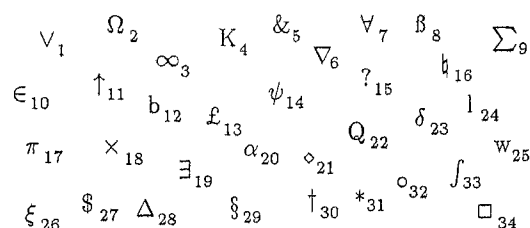
Se você refletir sobre o modo como chegou à resposta, perceberá que associou cada símbolo a um número natural. Assim, o último número escrito expressa o número de símbolos.

Existem trinta e quatro símbolos acima.

- a) Suponha que você tenha encontrado menos que trinta e quatro. O que aconteceu na sua contagem?
- b) Se você encontrou mais do que trinta e quatro, o que aconteceu com a atribuição de um número a cada símbolo?

Estas duas perguntas, tão simples, traduzem as idéias mais importantes sobre o conceito de função, como veremos adiante.

Eu tenho certeza quando digo que são trinta e quatro símbolos porque escrevi ao lado de cada símbolo o número que lhe corresponde pela contagem.



Escrever a correspondência símbolo $\rightarrow$ número fez com que as seguintes condições fossem observadas:

- percorrer todos os símbolos;
- associar a cada símbolo apenas um número.

Ou seja, isso evitou que se encontrasse um número de símbolos menor ou maior do que o correto.

A contagem que fizemos é um tipo de função. Na verdade, um tipo bastante especial de função, já que satisfaz mais exigências do que as duas dadas acima. Mas é um exemplo em que, de qualquer elemento do conjunto de partida, sai exatamente uma seta que vai associá-lo a algum elemento do conjunto de chegada.

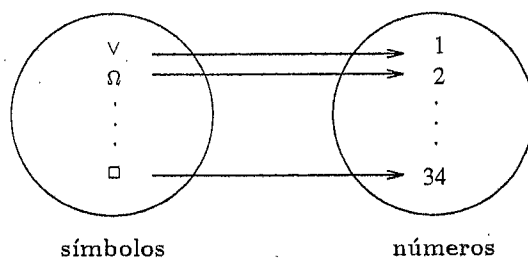


Figura 5.1. Uma função

Uma representação como esta acima é um “papygrama” da correspondência entre os conjuntos. A vantagem das representações dos objetos matemáticos é que elas aumentam a nossa compreensão intuitiva, enquanto nos mostram tais objetos sob novos ângulos. Uma função é apenas um tipo especial de correspondência entre conjuntos. Uma boa representação nos dirá, imediatamente, se uma correspondência dada é ou não função (veja o Exercício 6), ou que propriedades tem.

Chamemos de f a função do exemplo que estamos examinando. O número associado a V por f é 1. Escrevemos: $f(V) = 1$. Analogamente, $f(\Omega) = 2$, $f(\infty) = 3$ etc.

A função f também pode ser representada por uma tabela:

$$f: \{\text{símbolos}\} \rightarrow \{\text{números}\}$$

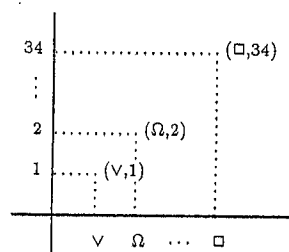
V	$\rightarrow$	1
Ω	$\rightarrow$	2
∞	$\rightarrow$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\square$	$\rightarrow$	34

Ou, listando os pares ordenados $(x, f(x))$ de elementos correspondidos: $(V, 1)$, $(\Omega, 2)$, $(\infty, 3)$ etc.

O conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$ é o gráfico de f (notação: *graf* f). Se representarmos o conjunto de partida por um eixo horizontal e o conjunto de chegada por um eixo vertical, cada par $(x, f(x))$ será um ponto deste plano e o gráfico de f será uma figura geométrica (pontos isolados, linhas, regiões etc). Essa figura será o gráfico de f no plano cartesiano.

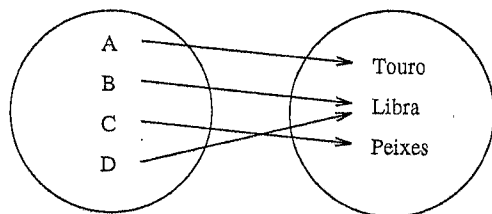
A exigência de sair de cada elemento do conjunto de partida exatamente uma seta já é suficiente para definir o conceito de função. Assim sendo, podemos interpretar uma série de associações de conjuntos que conhecemos, em termos de função. Por exemplo, a regra que associa:

- a cada pessoa o seu signo zodiacal;

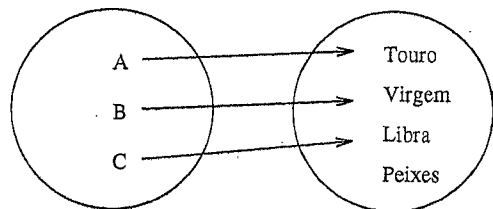
Figura 5.2. Gráfico de f no plano cartesiano

- b) a cada lugar a sua latitude;
- c) a cada número o seu dobro etc.

Observe que a exigência de função não é violada em nenhum dos exemplos, já que de cada elemento do conjunto de partida sai uma única seta. Podemos, então, ter esta função:



Ou esta função:



Definição

Dados dois conjuntos A e B , uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento x de A um único elemento de B , que será denotado por $f(x)$ e dito a imagem de x . O conjunto A é o domínio de f e B é o contradomínio.

$$\begin{aligned} \text{Notação: } f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

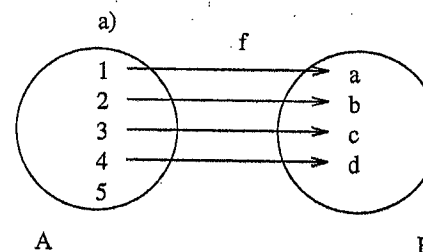
Cada vez que mencionamos uma função, devemos especificar:

- a) seu domínio;
- b) seu contradomínio;
- c) sua regra, isto é, a correspondência $x \mapsto f(x)$ ou, equivalentemente, a tabela da função ou os pares ordenados $(x, f(x))$.

Se duas funções diferem em pelo menos um destes três itens elas são diferentes, pois têm propriedades diferentes. Ou seja, $f = g$ se f e g têm o mesmo domínio (A), o mesmo contradomínio e, para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

- **Exercício 1** - Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Represente todas as funções possíveis de A em B , praticando estas representações:
 - a) por "papygrama";
 - b) por tabela;
 - c) por pares ordenados $(x, f(x))$;
 - d) por alguma outra representação gráfica (invente!).
- **Exercício 2** - Quantas funções existem de um conjunto de 7 elementos em um conjunto de 5 elementos?
- **Exercício 3** - As operações seguintes podem ser expressas através de uma função. Para cada uma, calcule o valor da função em alguns números (os mais variados) e estabeleça o domínio, o contradomínio e a regra da função.

- a) inverso de um número pela soma;
 - b) inverso de um número pela multiplicação;
 - c) módulo de um número;
 - d) raiz quadrada de um número;
 - e) raiz cúbica de um número;
 - f) associe um número a 0, se for racional, e a 1, se for irracional;
 - g) resto na divisão de um número inteiro por 7.
- **Exercício 4** – Você deve ter observado que no exercício anterior cada operação admite uma infinidade de domínios e contradomínios. Reescreva cada função, estabelecendo o maior domínio possível (contido em $\mathbb{R}$) e, para este domínio, o menor contradomínio possível.
 - **Exercício 5** – Encontre o maior domínio possível para o qual a seguinte regra seja uma função (com um contradomínio razoável):
 - a) $x \mapsto (x-1)^{-1} + (x-2)^{-1}$
 - b) $x \mapsto \frac{1}{x} + \sqrt{x+1}$
 - c) $x \mapsto \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$
 - **Exercício 6** – Em cada item dado a seguir, verifique se f é uma função de A em B , em caso negativo, explique porque.
 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$;

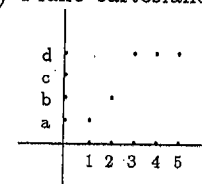


b)

x	f(x)
1	a
2	b
2	c
3	d
4	d
5	d

c) Pares $(x, f(x))$: $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$, $(4, d)$, $(5, e)$.

d) Plano cartesiano



2. $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $f(x) = -x$.

- **Exercício 7** – Você deve ter observado, no último exercício, que existem algumas condições para que, dados dois conjuntos A , B e uma regra $x \mapsto f(x)$, possamos ter uma função $f: A \rightarrow B$. Escreva quais são essas condições.
- **Exercício 8** – Traduza a regra de cada função a seguir por uma ou mais fórmulas, generalizando os exemplos dados. Em todos os itens, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

por algum subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 34\}$, ou, mais rigorosamente, se existir uma função $f : A \rightarrow B$ que associe elementos distintos de A a elementos distintos de B .

Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é *injetora* se cada elemento de B é imagem de no máximo um elemento de A . Ou seja, se $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ é verdadeiro quaisquer que sejam $x, y \in A$. Ou, pela contrapositiva, $f(x) = f(y) \implies x = y$.

• Exercício 11

1. Liste todas as funções de $\{1, 2, 3\}$ em $\{a, b, c\}$ que são injetoras.
2. Quantas funções injetoras existem de um conjunto de 5 elementos em um conjunto de 7 elementos?

• **Exercício 12** – No Exercício 3, aponte as funções injetoras, conforme o domínio e o contradomínio estabelecidos por você.

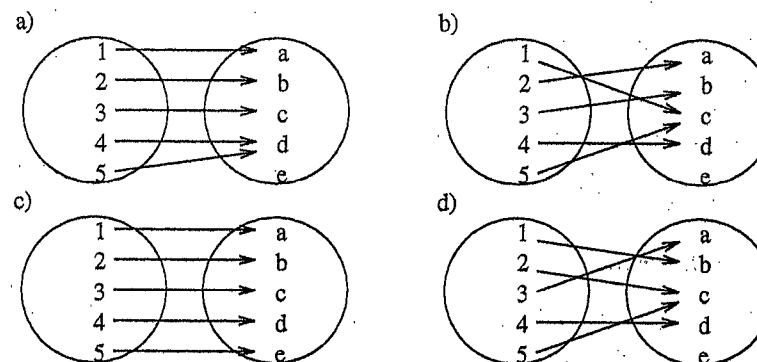
• **Exercício 13** – Diga para quais destas funções a implicação $f(x) = f(y) \implies x = y$ é verdadeira, justificando com um axioma ou teorema de $\mathbb{R}$.

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$
- b) $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$
- c) $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{x}$
- d) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

Obs.: $\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} - \{0\}$

• Exercício 14

1. Aqui estão funções representadas por “papygramas”. Quais delas constituem funções injetoras? Por quê?



2. Dê “papygramas” de outras funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injetoras.
3. Idem para funções não injetoras.
4. Escreva um critério visual para reconhecer uma função injetora por seu “papygrama”.
5. Represente as quatro funções do item 1:
 - a) por tabelas;
 - b) por pares $(x, f(x))$;
 - c) por gráficos no plano cartesiano.
6. Escreva um critério para reconhecer uma função injetora:
 - a) por sua tabela;
 - b) por seus pares $(x, f(x))$;
 - c) por seu gráfico no plano cartesiano.

Responderemos agora à pergunta feita em páginas anteriores: o número de elementos de um conjunto A é *maior* ou *igual* do que 34, se existir uma contagem de A que esgote todos os elementos de $\{1, 2, 3, \dots, 34\}$, ou, mais rigorosamente, se existir uma função $f: A \rightarrow B$, em que $B = \{1, 2, 3, \dots, 34\}$, tal que todo elemento de B seja imagem de algum $x \in A$.

Definição

Uma função $f: A \rightarrow B$ é *sobrejetora* se cada elemento de B é imagem de no mínimo um elemento de A . Isto é, se para todo $y \in B$ existe algum $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

• Exercício 15

1. Liste todas as funções que são sobrejetoras de $\{1, 2, 3\}$ em $\{a, b\}$.
2. Quantas funções sobrejetoras existem de um conjunto de 7 elementos em um conjunto de 5 elementos?

• **Exercício 16** – No Exercício 3, aponte as funções sobrejetoras, conforme o domínio e o contradomínio estabelecidos por você.

• **Exercício 17** – Refaça todo o Exercício 14, substituindo *injetora* por *sobrejetora*.

Definição

Se $f: A \rightarrow B$ é uma função, então a *imagem de f* (notação: $Im f$ ou $f(A)$) é o conjunto das imagens de cada elemento $x \in A$. Intuitivamente, são os valores de B ocupados pela função f . Ou seja,
 $Im f = \{y \in B | (\exists x \in A) f(x) = y\}$.

• **Exercício 18** – Se uma função é sobrejetora, o que se pode afirmar sobre sua imagem? A recíproca deste seu teorema é verdadeira?

• Exercício 19 – Complete:

a)

$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
x	$1/x$
$\dots$	$1/2$
$\dots$	$-1/3$
$\dots$	-4
$\dots$	7.1
$\dots$	π
$\dots$	y

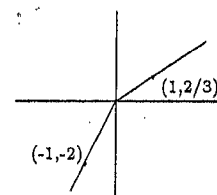
b)

$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$
x	$1/x$
$\dots$	0

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 pares:
 $(x, x^2 - 1)$
 $(1, \dots)$
 $(\dots, -1)$
 $(\dots, 1/2)$
 $(\dots, \sqrt{3})$
 $(\dots, y)$

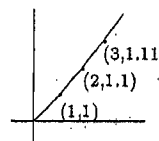
d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com o gráfico ao lado.

x	$f(x)$
1	$2/3$
-1	-2
$\dots$	3
$\dots$	0
$\dots$	-7
$\dots$	y



e) $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, com este gráfico:

x	$f(x)$
4	$\dots$
$\dots$	1.1111
$\dots$	1.007
$\dots$	1.2



f) $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, com um gráfico análogo, mas em que

$$A = (2, 1 + \frac{1}{2}),$$

$$B = (3, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}),$$

$$C = (4, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}),$$

$\dots$

x	$f(x)$
$\dots$	1.75
$\dots$	1.88
$\dots$	2
$\dots$	3.1

g) $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, com um gráfico análogo, mas em que

$$A = (2, 1 + \frac{1}{4}),$$

$$B = (3, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}),$$

$$C = (4, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}),$$

...

h) $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, com um gráfico análogo, mas em que

$$A = (2, 1 + \frac{1}{2}),$$

$$B = (3, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}),$$

$$C = (4, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}),$$

...

• **Exercício 20** – Quais das funções do exercício anterior são sobrejetoras?

• **Exercício 21** – Sendo $f : A \rightarrow B$, diga em que itens é verdadeira a afirmação *para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$* .

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$;

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$;

c) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, tal que $f(x) = 2/x$;

d) $f : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = |x|$;

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = (x-1)^5$;

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $f(x) = 2^x$;

g) $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$.

Obs.: $\mathbb{R}_0^- \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ e $\mathbb{R}_0^+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

• **Exercício 22** – Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Escreva a negação destas afirmações:

x	f(x)
...	1.2
...	1.35
...	2

x	f(x)
...	11/6
...	2.1

a) $(\forall x \in A) f(x) = f(y) \implies x = y$;

b) $(\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y$.

• **Exercício 23** – Dê um exemplo de função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja:

a) injetora e sobrejetora;

b) injetora e não sobrejetora;

c) não injetora e sobrejetora;

d) não injetora e não sobrejetora.

• **Exercício 24** – Considere estes exemplos, onde $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (sendo ou não uma função):

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \text{ ímpar} \\ x-1, & \text{se } x \text{ par} \end{cases}$

b) $f(x) = 10 - x$

c) $f(x) = \begin{cases} 10 - x, & \text{se } x < 10 \\ x - 1, & \text{se } x \geq 10 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 4 \\ x, & \text{se } 4 < x < 9 \\ x+1, & \text{se } x \geq 9 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 10 - x, & \text{se } x < 10 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 10 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 3 \\ x, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

g) $f(x) = (x-2)^2$

1. Em cada caso, faça um gráfico no plano cartesiano dos pontos $(x, f(x))$ tais que $x \leq 11$.

2. Em cada caso, faça um gráfico no plano cartesiano dos pontos $(x, f(x))$ tais que $f(x) \geq -1$.

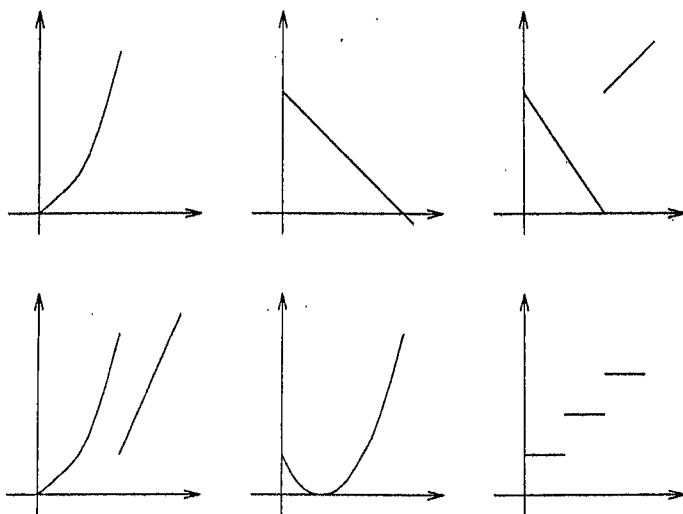
3. Aponte, dentre os exemplos acima, os que são:

- a) função
- b) função injetora
- c) função sobrejetora

4. Escreva qual o critério visual que podemos empregar para dizer se um gráfico é ou não:

- a) função
- b) função injetora
- c) função sobrejetora
- d) função sobrejetora e injetora

• Exercício 25 – Em cada caso abaixo, temos $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.



Use o critério do exercício anterior para identificar

- a) que gráficos podem representar uma função. Nesse caso, assinale no eixo do contradomínio (eixo vertical) a imagem da função;

- b) entre as funções quais são injetoras;
- c) quais são sobrejetoras;
- d) quais são, ao mesmo tempo, sobrejetoras e injetoras.

• Exercício 26 – Crie uma regra para $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ cujo gráfico seja, aproximadamente, cada um dos gráficos de função do exercício anterior.

Já vimos que o nosso processo de contar um conjunto de objetos consiste em estabelecer uma correspondência entre cada objeto e um número natural. Inconscientemente, a nossa vista percorre um caminho, passando por todos esses objetos, e uma só vez em cada um: 1, 2, 3 etc. Mais ainda, o exemplo do início deste capítulo permite-nos afirmar que existem 34 símbolos no conjunto dado porque, ao final da contagem, esgotamos todos os números naturais de 1 a 34 e usamos cada um deles exatamente uma vez.

Portanto, a contagem é uma função tal que, por ocupar todos os elementos do contradomínio (no caso, os números naturais), é sobrejetora e, por ocupar cada um uma só vez, é injetora.

Definição

Uma função injetora e sobrejetora é dita **bijetora**.

- Exercício 27 – Conte, do modo como foi feito acima, o conjunto destes símbolos: ... -3 -2 -1 0 1 2 3 ... Isto é, crie uma função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora.
- Exercício 28 – Baseado na função do exercício anterior, crie uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ bijetora.
- Exercício 29 – Seja $g: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z} = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}$, tal que $g(x) = 2x$.
 - a) Complete os pares ordenados $(x, f(x))$: $(\dots, 8)$, $(\dots, 0)$, $(\dots, -94)$, $(\dots, 1332)$, $(\dots, y)$, onde $y \in 2\mathbb{Z}$. Responda, usando a definição: g é sobrejetora?

- b) A implicação $g(x) = g(y) \implies x = y$ é verdadeira? Pela definição, g é injetora?

• **Exercício 30**

1. Represente, num mesmo "papygrama", os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$ e as funções dos Exercícios 28 e 29.

2. Crie, a partir daí, uma função $h : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ bijetora.

- **Exercício 31** – Crie uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora, diferente da função tal que para todo $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x$. (Sugestão: negue a afirmação 'para todo $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x$ '.)

- **Exercício 32** – Crie uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ bijetora, diferente da função tal que para todo $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$.

- **Exercício 33** – Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere as funções seguintes de A em A :

e	a	b	c	d	f
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 2$	$1 \mapsto 2$	$1 \mapsto 3$	$1 \mapsto 3$
$2 \mapsto 2$	$2 \mapsto 3$	$2 \mapsto 1$	$2 \mapsto 3$	$2 \mapsto 1$	$2 \mapsto 2$
$3 \mapsto 3$	$3 \mapsto 2$	$3 \mapsto 3$	$3 \mapsto 1$	$3 \mapsto 2$	$3 \mapsto 1$

Se realizamos a função a e depois, sobre o resultado, a função b , obtemos o mesmo efeito que a função c . Escrevemos então $b \circ a = c$, onde $b \circ a$ representa a realização da função b após a função a .

1. Encontre, no quadro abaixo, as funções pedidas.

$b \circ a = c$	o	e	a	b	c	d	f
$a \circ e = \dots$	e						
$d \circ e = \dots$	a	...		...			
$e \circ a = \dots$	b		c				
$a \circ b = \dots$	c				...		
$c \circ c = \dots$	d	...			...		
$d \circ c = \dots$	f						

2. No exemplo dado, calcule:

$$a(3) = \dots$$

$$b(2) = \dots$$

$$b(\star) = \dots, \text{ onde } \star = a(3)$$

$$b(\star) = \dots, \text{ onde } \star = a(1)$$

$$b(a(2)) = \dots$$

$$3. \quad b(a(1)) = b(1) = 2 = (b \circ a)(1)$$

$$b(a(2)) = b(3) = 3 = (b \circ a)(2)$$

$$b(a(3)) = b(2) = 1 = (b \circ a)(3)$$

$$\text{Logo, } (b \circ a)(x) = \dots$$

- **Exercício 34** – Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$.

- a) Escreva a regra de alguma função $f : A \rightarrow B$.

- b) Escreva a regra de alguma função $g : B \rightarrow C$.

- c) Nos moldes do exercício anterior, o que seria a função $g \circ f$? Dê seu domínio, contradomínio e regra.

- d) $x \in A \implies f(x) \in \dots$

- e) $y \in B \implies g(y) \in \dots$

- f) Logo, $x \in A \implies g(f(x)) \in \dots$

- **Exercício 35** – Represente as funções f e g do último exercício

- a) num mesmo papygrama

- b) numa mesma tabela

de modo a deixar claro o efeito da nova função $g \circ f$.

- **Exercício 36** – No Exercício 34, para poder definir $g \circ f : A \rightarrow C$ com a regra $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é necessário que o domínio de g seja exatamente B ? Escreva a condição necessária.

- **Exercício 37** – Ainda no Exercício 34, é possível falarmos em $f \circ g$?

Definição

Sejam duas funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B' \rightarrow C$, com $f(A) \subset B'$. Então podemos definir a *função composta de g com f* (notação: $g \circ f$) assim:

$$\begin{aligned} g \circ f: A &\rightarrow C \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

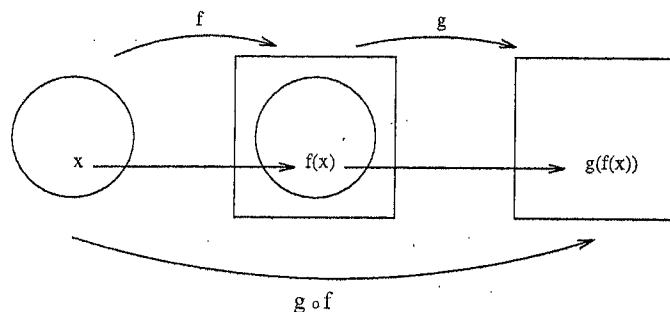


Figura 5.3. Função composta

• Exercício 38

1. Reveja o Exercício 30, usando o conceito de função composta.
 2. Escolha uma boa figura para representar os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$ e as funções f , g e $g \circ f$.
- **Exercício 39** – Sejam f e g funções tais que se possa definir $g \circ f$. Diga se cada implicação a seguir é verdadeira ou falsa. Em caso de falsa, dê um contra-exemplo (defina corretamente f e g). No caso de ser verdadeira, escreva um argumento razoável para justificá-la. Dê um exemplo com conjuntos finitos e um com conjuntos infinitos.

- a) f, g bijetoras $\implies g \circ f$ bijetora
- b) f, g injetoras $\implies g \circ f$ injetora
- c) f, g sobrejetoras $\implies g \circ f$ sobrejetora
- d) A recíproca de a.
- e) A recíproca de b.
- g) A recíproca de c.

• Exercício 40 – Considere:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Q} & e & \quad g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1/x & x &\mapsto x\sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{Calcule:}$$

- a) $f(5)$, $f(31)$, $f(n)$
- b) $g(0)$, $g(-1)$, $g(1/3)$, $g(\square)$
- c) $g(\square)$, onde $\square = f(31)$
- d) $g(\square)$, onde $\square = f(x)$
- e) $(g \circ f)(5)$, $(g \circ f)(x)$

• Exercício 41 – Nos itens abaixo,

1. descreva as imagens de f e g ;
2. descreva o domínio, o contradomínio e a regra das funções $g \circ f$ e $f \circ g$, quando fizer sentido.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ $x \mapsto x^2$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x+1$
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2+1$ $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 1/x$
- c) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 2^x$
- d) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2-x$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto |x|$

• Exercício 42 – Defina o domínio, o contradomínio e a regra de duas funções f e g tais que:

- a) $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $(g \circ f)(x) = (x+2)^5$
 b) $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $(g \circ f)(x) = x^5 + 2$
 c) $g \circ f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, com $(g \circ f)(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$
 d) $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $(g \circ f)(x) = 2^{|x|+x}$

- **Exercício 43** – Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ e $D = \{\infty, \nabla, \diamond\}$.

1. Crie três funções $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ e $h: C \rightarrow D$.
 2. Escreva o domínio, o contradomínio e a regra da função:

- a) $g \circ f$
 b) $h \circ (g \circ f)$
 c) $h \circ g$
 d) $(h \circ g) \circ f$

3. Tire uma conclusão sobre os itens b e d acima.

- **Exercício 44** – Considere

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \text{ e} \\ x &\mapsto x+1 & x &\mapsto x^2 \\ h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

Escreva a regra da função:

- a) $g \circ f$
 b) $h \circ (g \circ f)$
 c) $h \circ g$
 d) $(h \circ g) \circ f$

- **Exercício 45** – Sejam f , g e h funções tais que todas as funções compostas abaixo façam sentido. Diga como se calcula:

- a) $(g \circ f)(x)$

- b) $[h \circ (g \circ f)](x)$
 c) $(h \circ g)(x)$
 d) $[(h \circ g) \circ f](x)$

Como o domínio da função $h \circ (g \circ f)$ é o mesmo que o de $(h \circ g) \circ f$, bem como o contradomínio, a comparação dos itens b e d deve provar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

- **Exercício 46** – Veja o Exercício 33.

1. Complete o quadro do item a daquele exercício.
 2. Chamando de S_3 o conjunto daquelas seis funções — $S_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$ — e considerando a operação $\circ$, verifique quais destes axiomas do Capítulo 3 são, satisfeitos por $(S_3, \circ)$:
 a) fechamento
 b) existência de elemento neutro
 c) existência de elemento inverso
 d) associatividade
 e) comutatividade

- **Exercício 47** – Seja $S = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Considere as funções seguintes:

$$\begin{aligned} f_0: S &\rightarrow S & f_1: S &\rightarrow S \\ x &\mapsto x & x &\mapsto 1/x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2: S &\rightarrow S & f_3: S &\rightarrow S \\ x &\mapsto 1-x & x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4: S &\rightarrow S & f_5: S &\rightarrow S \\ x &\mapsto \frac{x-1}{x} & x &\mapsto \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

1. Faça um quadro com os resultados de $f \circ g$, onde f e g são cada uma das funções acima.

2. Diga quem é a função:

a) $(f_4 \circ f_1) \circ (f_3 \circ f_3)$

b) $[f_4 \circ (f_1 \circ f_3)] \circ f_3$

c) $f_4 \circ [(f_1 \circ f_3) \circ f_3]$

Faz sentido escrever $f_4 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_3$ sem parênteses, ou a ordem em que efetuamos parece relevante?

3. Como foi feito no exercício anterior, verifique se o conjunto destas seis funções com a operação $\circ$ satisfaz estes axiomas: fechamento, existência de neutro, existência de inverso, associatividade e comutatividade.

Os últimos exercícios foram sobre funções bijetoras de um conjunto em si mesmo. Tais funções são chamadas *permutações* do conjunto. A permutação mais simples de um conjunto é aquela que associa cada elemento do conjunto a si próprio. É a função *identidade* do conjunto.

• Exercício 48 – Liste todas as permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$.

• Exercício 49

1. Dê exemplo de uma permutação f diferente da identidade.

a) $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

c) $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

d) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Sugestão: negue a sentença: $\forall x \in A, f(x) = x$.

2. Refaça o item 1 sendo f é uma função tal que $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Sugestão: em caso impossível, suponha que exista tal f e chegue a um absurdo.

• Exercício 50 – Dada uma permutação $f : A \rightarrow A$, crie a partir dela uma nova permutação de A (obs.: A é um conjunto qualquer em que operações como $+$ ou $\cdot$ podem não estar definidos).

• Exercício 51 – Volte aos Exercícios 33 e 46. Observe que a função d desfaz o que a função c havia feito, e vice-versa. Ou seja:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{c} & \xrightarrow{d} & \xrightarrow{d} & \xrightarrow{c} \\ 1 \mapsto 2 \mapsto 1 & & 1 \mapsto 3 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \mapsto 2 & & 2 \mapsto 1 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \mapsto 3 & & 3 \mapsto 2 \mapsto 3 \\ \xrightarrow{c} & & \xrightarrow{d} \end{array}$$

Assim, $d \circ c = e$ e $c \circ d = e$. Dizemos que d é a *função inversa* de c .

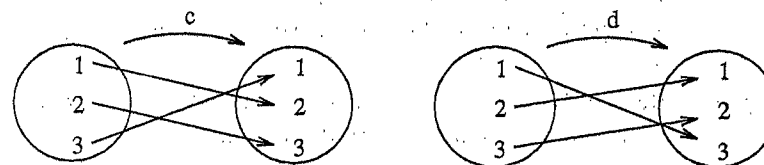
1. Encontre a função inversa de:

i. a ii. e iii. d

2. O gráfico de d é o conjunto dos pares $(x, d(x))$:

$\text{graf } d = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$. Então $\text{graf } c = \dots$

Os dois últimos exercícios sugerem que se $f : A \rightarrow B$ satisfaz certas condições, é possível definir uma nova função $g : B \rightarrow A$ que, intuitivamente falando, desfaz o que f faz.



Se c é uma função como as dos dois últimos exercícios, a sua função inversa d consiste em inverter as setas de c . Logo, se realizarmos c e depois d (ou seja, se realizarmos a função composta $d \circ c$) em cada elemento x , voltaremos a x .

O mesmo para as funções f e g abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f} & \xrightarrow{g} & \\ 1 \mapsto 0 \mapsto 1 & 0 \mapsto 1 \mapsto 0 & \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 2 & 1 \mapsto 2 \mapsto 1 & \\ 3 \mapsto 2 \mapsto 3 & 2 \mapsto 3 \mapsto 2 & \\ \xrightarrow{g \circ f} & \xrightarrow{f \circ g} & \end{array}$$

Definição

Seja $f : A \rightarrow B$. Se existe $g : B \rightarrow A$ tal que, para todo $x \in A$, $(g \circ f)(x) = x$ e, para todo $x \in B$, $(f \circ g)(x) = x$, então a função f é *inversível* e g é a função *inversa* de f (notação: $g = f^{-1}$).

Exercício 52

- Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ do último exemplo.
- Esboce o gráfico da função $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, inversa de f .
- Compare os dois gráficos e tire uma conclusão a partir daí e do Exercício 51.2.

• **Exercício 53** – Esboce o gráfico da função inversa de cada função definida no Exercício 25 que for inversível.

Exercício 54

- Em cada item do Exercício 14.1, inverta o sentido das setas que saem de A para B . Em que casos obtemos uma função de B para A ?
- Represente com setas cada função do Exercício 23 e responda à mesma pergunta do item anterior.
- Argunte a favor ou contra as seguintes implicações:
 - f injetora $\implies f$ inversível
 - f sobrejetora $\implies f$ inversível
 - f bijetora $\implies f$ inversível

4. Idem, para a recíproca de cada implicação acima.

• **Exercício 55** – Os Exercícios 46 e 47 sugerem que, sob certas condições, é possível desenvolver um certo cálculo, onde funções são tratadas como usualmente operamos com números.

1. Diga que condição f deve satisfazer para que valha:

$$a) f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

$$b) g \circ f = h \circ f \implies h = g$$

2. Dê um exemplo onde $f \circ g = f \circ h$ e $g \neq h$.

Exercício 56

1. Se $f : A \rightarrow B$ é bijetora e $g : B \rightarrow A$ é tal que $g \circ f = id_A$, em que id_A é a função identidade de A em A , o que se pode dizer de $f \circ g$?

2. Dê um exemplo de f e g tais que $g \circ f = id$, mas $f \circ g \neq id$.

Sugestão: o item anterior fez várias hipóteses. Certamente você terá que negar uma delas.

• **Exercício 57** – Escreva a regra da função inversa $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de cada função inversível do Exercício 24,

• **Exercício 58** – A função identidade (id) de um conjunto tem a propriedade de que $id \circ id = id$. Dê outros exemplos de função f tal que

$$a) f \circ f = id \quad b) f \circ f = f.$$

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *par* se, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *ímpar* se, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

• Exercício 59

- Dê três exemplos de
 - função par
 - função ímpar
- Os conceitos de função par e de função ímpar são independentes? Mostre que sim, dando exemplos de função:
 - par e ímpar
 - par e não ímpar
 - não par e ímpar

Os itens *a* e *b* provarão que f par $\not\Rightarrow f$ ímpar; os itens *a* e *c*, que f ímpar $\not\Rightarrow f$ par.

- Exercício 60 – Diga que tipo de simetria tem o gráfico de uma função:
- par
 - ímpar

Definição

Um conjunto A de números reais é *limitado inferiormente* se existe um número m (não necessariamente em A) tal que, para todo $x \in A$, $m \leq x$.

Um conjunto A de números reais é *limitado superiormente* se existe um número M (não necessariamente em A) tal que, para todo $x \in A$, $x \leq M$.

Um conjunto A é limitado se existe M tal que, para todo $x \in A$, $|x| \leq M$.

Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}$, é *limitada (inferiormente ou superiormente)* se a sua imagem é um conjunto limitado (inferiormente ou superiormente).

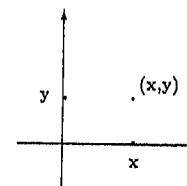
• Exercício 61

- Diga se cada uma das funções abaixo é limitada ou não, e, neste caso, diga se é limitada inferiormente ou limitada superiormente ou nenhuma das duas.

- Aponte o número m que limita a função ou prove a sua inexistência por redução ao absurdo.
- Justifique as passagens com propriedades de desigualdade em $\mathbb{R}$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -x^2$;
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x|$;
 - $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x - 2| + 1$;
 - $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{|x|} + 1$;
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2^x$

Plano Cartesiano

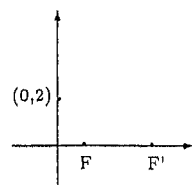
O plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, é o conjunto dos pontos (x, y) , com $x, y \in \mathbb{R}$. Representa-se por dois eixos numéricos, horizontal e vertical, com os pontos 0 (zero) coincidentes. Cada ponto do plano está determinado por uma abscissa x , a projeção ortogonal do ponto sobre o eixo horizontal, e uma ordenada y , a projeção ortogonal sobre o eixo vertical.



A igualdade no conjunto $\mathbb{R}^2$ é definida, recorrendo-se àquela em $\mathbb{R}$: $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$. Um dos méritos do plano cartesiano é que ele possibilita uma visualização, uma interpretação geométrica, para relações numéricas. Por exemplo, se f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a marcação dos pontos (x, y) com $y = f(x)$ dá ao leitor o reconhecimento visual imediato de fatos como injetividade e sobrejetividade, f ser (ou não) par ou ímpar, pontos de máximo ou mínimo valor da função, regiões de crescimento ou de decrescimento, comportamento de f quando x tende ao infinito etc.

Vejamos um exemplo desse auxílio recíproco da geometria e do cálculo. Dados dois pontos F e F' , examinemos o problema de determinar o lugar geométrico * dos pontos P tais que a distância de P a F' seja o dobro da distância de P a F . Interpretando no plano cartesiano sejam, por exemplo, $F = (1, 0)$, $F' = (4, 0)$ e

$P = (x, y)$, um ponto qualquer da solução (por exemplo, $(0, 2)$).



A representação do conjunto dos pontos do plano cartesiano que satisfazem uma certa propriedade é dito lugar geométrico desses pontos.

Então, escrevendo as distâncias de P a F' e de P a F em termos de suas coordenadas, temos:

$$PF' = 2PF \iff x^2 + y^2 = 4$$

(Veja o Exercício 2 e o comentário que lhe segue.)

Logo, se já soubermos que uma equação como $x^2 + y^2 = 4$ representa um círculo, então teremos resolvido o problema geométrico inicial através do cálculo: o tal lugar geométrico procurado é um círculo. Reciprocamente, se soubermos que o lugar geométrico que se busca é um círculo (círculo de Apolônio), então concluiremos que a equação $x^2 + y^2 = 4$ representa-o algebricamente.

Como já vimos, nem toda curva no plano cartesiano é gráfico de alguma função. Por outro lado, uma curva como o círculo ou a elipse (cuja geometria é bem conhecida) pode nos esclarecer bastante sobre a relação numérica que a expressa. Daí ampliarmos o estudo de gráficos a relações mais gerais do que as funcionais.

Seja $C(x, y)$ uma afirmação sobre x e y . Por exemplo:

$$c_1(x, y) : y = 2x$$

$$c_2(x, y) : x^3 - x^7 y = \pi$$

$$c_3(x, y) : y = 1 \text{ ou } y > 3$$

Quando temos uma função f , dizemos que o gráfico de f é o conjunto dos pontos (x, y) tais que se verificam a condição $y =$

$f(x)$:

$$\text{graf } f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

Analogamente, o conjunto dos pontos (x, y) para os quais a afirmação $C(x, y)$ é verdadeira é o gráfico da condição C (notação: $\text{graf } C$):

$$\text{graf } C = \{(x, y) \mid C(x, y) \text{ é verdadeira}\}.$$

- **Exercício 1** - Esboce o gráfico das condições $C(x, y)$ seguintes:

a) $x \geq 0$

b) $x = y$

c) $x \geq 0$ e $x = y$

d) $x \geq 0$ ou $x = y$

e) $x = |y|$

f) $x \in z$ e $y \in z$

g) $x \in z$ ou $y \in z$

h) $x^2 + y^2 > 0$

i) $x^2 = 2$

j) $|x| + |y| = 1$

l) $|x + y| = 1$

m) $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$

Várias das mais importantes figuras geométricas — como o círculo, a elipse, a parábola e a hipérbole — são definidas a partir de uma propriedade sobre distância entre dois pontos. Por exemplo, o círculo é o lugar geométrico dos pontos cuja distância a um ponto fixo é constante. Por isso, vamos definir a seguir a distância entre dois pontos do plano cartesiano.

Se a e b são dois números reais, então já definimos a distância entre a e b por $d(a, b) = |a - b|$. Estendemos esta definição a dois pontos do plano cartesiano, baseados no teorema de Pitágoras da geometria plana: se $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$ então a distância entre P e Q , que denotamos por $d(p, q)$, é

$$d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}.$$

Observe que:

1. Se $x_p = x_q$, então $d(p, q) = \sqrt{(y_p - y_q)^2} = |y_p - y_q|$.
2. Se $x_p \neq x_q$ e $y_p \neq y_q$, então PAQ é um triângulo retângulo e, pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 \text{ e } PQ > 0 \\ \Leftrightarrow PQ &= \sqrt{AP^2 + AQ^2} \\ \Leftrightarrow d(p, q) &= \sqrt{|x_p - x_q|^2 + |y_p - y_q|^2} \\ \Leftrightarrow d(p, q) &= \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \end{aligned}$$

• **Exercício 2** - Seja $O = (0, 0)$.

- a) Assinale no plano cartesiano alguns pontos P tais que $OP = 2$.
- b) Escreva, em termos de x e y , a condição que devem satisfazer os pontos $P = (x, y)$ tais que $OP = 2$ (atenção: use corretamente o símbolo $\Leftrightarrow$).

Na geometria, definimos o círculo de centro O e raio r , $r > 0$, como o lugar geométrico dos pontos P tais que a distância de P a O seja igual a r .

Um ponto $P = (x, y)$ pertence ao círculo de centro na origem $O = (0, 0)$ e raio r se e somente se

$$\begin{aligned} OP &= r \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} &= r \text{ e } r > 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

No estudo do plano cartesiano, costumamos identificar a figura do círculo com a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Dizemos: ' $x^2 + y^2 = r^2$ é um círculo de centro na origem e raio r '. Isso é um abuso de linguagem, mas que se justifica pelo tanto que a correspondência entre a geometria e o cálculo acrescenta um ao outro. Dito de outra forma, a figura é um modelo para a equação, ou vice-versa.

• **Exercício 3** - Escreva em termos de x e y a condição satisfeita pelos pontos $P = (x, y)$ tais que:

- a) $OP = 3$, onde $O = (2, 0)$
- b) $OP = 3$, onde $O = (0, 1)$
- c) $OP = 3$, onde $O = (2, 1)$
- d) $OP = r$ ($r > 0$), onde $O = (a, b)$ (não efetue as contas)
- e) Verifique e interprete o que acontece no item anterior quando $r = 0$.

Atenção: principalmente no item d), utilize corretamente o símbolo $\Leftrightarrow$.

• **Exercício 4** - Esboce o gráfico da condição:

- a) $x^2 + y^2 = 7$
- b) $(x+1)^2 + y^2 = 7$
- c) $(x+1)^2 + (y - \frac{13}{2})^2 = 7$ (O ponto $(0, 0)$ pertence a este último gráfico?)
- d) $x^2 + 2x + y^2 = 6$

O Exercício 3 nos deu a equação geral do círculo no plano cartesiano a partir de sua definição geométrica. O uso correto do símbolo $\Leftrightarrow$ em todas as passagens nos assegura:

1. que todos os pontos do círculo de centro em (a, b) e raio r satisfazem a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (é apenas tais pontos a satisfazem);
2. que toda equação deste tipo - $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ - representa um círculo, qual seja, o de centro em (a, b) e raio r .

Queremos obter identificações semelhantes para outros tipos de equações e curvas — como a reta e as cônicas (elipse, parábola e hipérbole) — a partir, também, de suas definições geométricas.

• **Exercício 5** — Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$.

- Dados A e B , assinale alguns pontos P tais que $AP = BP$, de modo a intuir sobre a figura que formam.
 - $A = (0, 0)$ e $B = (0, 6)$
 - $A = (0, 0)$ e $B = (2, 0)$
 - $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$
 - $A = (-1, 3)$ e $B = (3, 1)$
 - $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$, onde $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
- Escreva a condição $C(x, y)$ satisfeita por tais pontos P , em cada item acima.
- No item e:
 - Mostre que $(0, 0) \in \text{graf } C$.
 - Examine o que ocorre com $C(x, y)$ quando $a = c$.
 - Idem, quando $b = d$.

Sabemos da geometria que, dados dois pontos A e B , o lugar geométrico dos pontos P tais que $AP = BP$ é uma reta: a mediatriz do segmento AB . O que o último exercício mostrou é que a mediatriz de AB — $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ e $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ — satisfaz a condição $(c - a)x + (d - b)y = 0$. Isto significa que toda reta contendo a origem tem equação do tipo $Mx + Ny = 0$ (veja o item 3 a) do exercício anterior).

Para chegar à identificação *reta pela origem* $\leftrightarrow Mx + Ny = 0$, precisamos da recíproca desta afirmação, ou seja, mostrar que toda equação do tipo $Mx + Ny = 0$ define uma reta contendo a origem.

• **Exercício 6**

- Esboce o gráfico da condição abaixo.
- Mostre que o lugar geométrico dos pontos que a verificam é uma reta contendo a origem.
Sugestão: escolha dois pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ tais que a equação da mediatriz de AB seja exatamente a condição dada.
 - $x - y = 0$
 - $2x - y = 0$
 - $x + 2y = 0$
 - $\pi x + (1 - \sqrt{3})y = 0$
 - $Mx + Ny = 0$ ($M \neq 0$ ou $N \neq 0$)

Definição

Seja um ponto fixo F (foco) e uma reta fixa d (diretriz). Para cada ponto P do plano, seja PP' a distância de P a d .

O lugar geométrico dos pontos P tais que a razão $PF/PP' = e$ é constante (chamada excentricidade) é:

- uma parábola, se $e = 1$
- uma elipse, se $e < 1$
- uma hipérbole, se $e > 1$

• **Exercício 7** — Sejam $F = (0, 1/4)$ e d a reta $y = -1/4$.

- Plote (com régua e compasso) dez pontos da parábola de foco F e diretriz d . item[b)] Se $P = (x, y)$, escreva, em termos de x e y , a condição satisfeita por tais pontos.

• **Exercício 8** – Faça o exercício anterior para:

- a) $F = (0, 1)$ e $y = -1$
- b) $F = (0, 1/8)$ e $y = -1/8$
- c) $F = (0, p)$ e $y = -p$. Interprete os casos $p < 0$ e $p = 0$.

• **Exercício 9**

1. Esboce o gráfico da condição abaixo.
2. Mostre que o lugar geométrico dos pontos que a verificam é uma parábola contendo a origem.
Sugestão: escolha um ponto F e uma reta d , tais que a equação dos pontos equidistantes de F e d seja exatamente a condição dada.
 - a) $4y = x^2$
 - b) $2y = 7x^2$
 - c) $y = kx^2$
 - d) $y^2 = x$

O item c) dos dois últimos exercícios prova que o gráfico de uma condição é uma parábola de foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$, se e somente se a condição é $y = 4px^2$. Conseguimos, portanto, a identificação:

parábola de vértice em $(0, 0)$ e eixo¹ $Oy \longleftrightarrow y = kx^2$.

• **Exercício 10** – Sejam $F = (-4, 0)$ e d a reta $x = -25/4$.

- a) Construa graficamente dez pontos da elipse de foco F , diretriz d e excentricidade $4/5$.
- b) Se $P = (x, y)$, escreva, em termos de x e y , a condição satisfeita por tais pontos.

¹A reta, contendo o foco e perpendicular à diretriz da parábola, é o seu eixo e a interseção da parábola com o eixo, o vértice.

- **Exercício 11** – A elipse também pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante. No exercício anterior, encontre o outro foco (F') da elipse e o valor da soma constante ($2a$). Mostre que um ponto $P = (x, y)$ é tal que $PF + PF' = 2a$, se e somente se P satisfaz a condição encontrada naquele exercício.

• **Exercício 12** – Refaça o Exercício 10 com

- a) foco $(\sqrt{3}, 0)$, diretriz $x = 4/\sqrt{3}$ e excentricidade $\sqrt{3}/2$
- b) foco $(4, 0)$, diretriz $x = 25/4$ e excentricidade $4/5$
- c) foco $(0, \sqrt{3})$, diretriz $y = 4/\sqrt{3}$ e excentricidade $\sqrt{3}/2$
- d) foco $(c, 0)$ ($c \neq 0$), excentricidade e ($0 < e < 1$) e diretriz $x = c/e^2$

• **Exercício 13**

1. Esboce o gráfico da condição abaixo.
2. Mostre que o lugar geométrico dos pontos que a verificam é uma elipse de centro na origem².
Sugestão: escolha um ponto $F = (m, n)$ para foco, a excentricidade e ($0 < e < 1$) e uma reta para diretriz, tais que a elipse que definem seja exatamente a condição dada.

- a) $x^2/25 + y^2/9 = 1$
- b) $x^2 + y^2/4 = 1$
- c) $4 * x^2 + 9 * y^2 = 36$
- d) $x^2/7 + y^2/\pi = \pi$
- e) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a, b \neq 0$) ($a \neq b$). Interprete a e b graficamente.

²Segundo o Exercício 11, a elipse tem dois focos. O centro da elipse é o ponto médio entre os focos.

Assim como já fizemos com o círculo, a reta e a parábola, todos na sua *posição fundamental*, isto é, na origem, obtivemos, com os Exercícios 12.d e 13.e, a condição satisfeita pelos pontos de uma elipse. Então, toda condição da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \neq 0) \quad (a \neq b)$$

representa uma elipse de centro em $(0, 0)$ e com os focos na horizontal ou na vertical; e vice-versa.

- **Exercício 14** – Sejam $F = (-5, 0)$ e d a reta $x = -16/5$.
 - a) Construa graficamente dez pontos da hipérbole de foco F , diretriz d e excentricidade $5/4$.
 - b) Se $P = (x, y)$, escreva, em termos de x e y , a condição satisfeita por tais pontos.
- **Exercício 15** – A hipérbole também pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante. No exercício anterior, encontre o outro foco (F') da hipérbole e o valor da diferença constante ($2a$). Mostre que um ponto $P = (x, y)$ é tal que $|PF - PF'| = 2a$, se e somente se P satisfaz a condição encontrada naquele exercício.
- **Exercício 16** – Repita o exercício 14 em que
 - a) foco $(\sqrt{2}, 0)$, diretriz $x = 1/\sqrt{2}$ e excentricidade $\sqrt{2}$;
 - b) foco $(5, 0)$, diretriz $x = 16/5$ e excentricidade $5/4$;
 - c) foco $(0, \sqrt{2})$, diretriz $y = 1/\sqrt{2}$ e excentricidade $\sqrt{2}$;
 - d) foco $(c, 0)$ ($c \neq 0$), diretriz $x = c/e^2$ e excentricidade e ($e > 1$).
 - e) foco $(0, c)$ ($c \neq 0$), diretriz $y = c/e^2$, excentricidade e ($e > 1$).

• Exercício 17

1. Esboce o gráfico da condição abaixo.
2. Mostre que o lugar geométrico dos pontos que a verificam é uma hipérbole de centro na origem³.
Sugestão: escolha um ponto $F = (m, n)$ para foco, a excentricidade e ($e > 1$) e uma reta para diretriz, tais que a hipérbole definida assim seja exatamente a condição dada.

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$

c) $x^2 - 2y^2 = 1$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ou $y = -\sqrt{x^2 + 1}$

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b \neq 0$). Interprete a e b graficamente.

f) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ($a, b \neq 0$).

- **Exercício 18** – Sejam $F = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $F' = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P = (x, y)$ e a condição $C(x, y)$: $PF - PF' = \pm \sqrt{2}$. Escreva $C(x, y)$ em termos de x e y , na sua forma mais simples, onde x e y apareçam uma só vez cada.
- **Exercício 19** – Refaça o Exercício 17 com estas condições:
 - a) $y = 2/x$
 - b) $y = 1/3x$
 - c) $xy = -\pi$

³Segundo o Exercício 15, a hipérbole tem dois focos. O centro da hipérbole é o ponto médio entre os focos.

Da mesma forma como foi feito para outras curvas importantes, obtivemos a equação da hipérbole na sua posição mais favorável. Assim: se $a, b \neq 0$, a condição da forma

- a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ representa uma hipérbole de centro em $(0, 0)$ e eixo focal FF' horizontal; e vice-versa.
- b) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, uma hipérbole de centro em $(0, 0)$ e eixo focal vertical; e vice-versa.
- c) $xy = k$ é uma hipérbole de centro em $(0, 0)$ e eixo focal na bissetriz ímpar (reta $x = y$) ou na bissetriz par (reta $x = -y$).

• Exercício 20

1. Dê um exemplo de condição $C(x, y)$ cujo gráfico seja:
 - a) uma reta contendo a origem;
 - b) um círculo de centro na origem;
 - c) uma parábola de vértice na origem e eixo vertical;
 - d) uma parábola de vértice na origem e eixo horizontal;
 - e) uma elipse de centro na origem e de eixo focal horizontal;
 - f) uma elipse de centro na origem e de eixo focal vertical;
 - g) uma hipérbole de centro na origem e de eixo focal horizontal;
 - h) uma hipérbole de centro na origem e de eixo focal vertical;
 - i) uma hipérbole de centro na origem e de eixo focal numa das bissetrizes $x = y$ ou $x = -y$.

2. Escreva a condição geral $C(x, y)$ cujo gráfico seja de cada um dos tipos acima. Interprete as constantes que apareçam.

Nossa intenção agora é encontrar as equações das curvas acima, localizadas em qualquer região do plano cartesiano, mantidos seus eixos (no caso de parábola, elipse ou hipérbole) com as mesmas direções. Para isso, intuitivamente falando, vamos *escorregar sem girar* o plano cartesiano, e obter a nova equação da curva deslocada.

• Exercício 21

1. Considere o movimento no plano cartesiano que a cada ponto (x, y) associa o ponto (u, v) , onde $u = x + 2$ e $v = y + 1$. Se $C(x, y) : y = x^2$, encontre $C(u, v)$, isto é, escreva a condição C em termos de u e v .
Atenção: use corretamente o símbolo $\iff$ em todas as passagens, de modo que $C(x, y) \iff C(u, v)$.
2. Esboce o gráfico de $C(u, v)$.
3. Assinale alguns pontos do plano e suas imagens, até compreender o efeito desse movimento.

No exercício anterior, temos:

$$u = x + 2 \iff x = u - 2 \text{ e}$$

$$v = y + 1 \iff y = v - 1.$$

$$\text{Logo, } y = x^2 \iff v - 1 = (u - 2)^2.$$

Escorregar sem girar o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ é um tipo de função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, chamada *translação*. Assim que realizamos nosso objetivo de encontrar as equações das curvas do Exercício 20 deslocadas, estudaremos outros tipos de função, ou, melhor dizendo, movimento em $\mathbb{R}^2$.

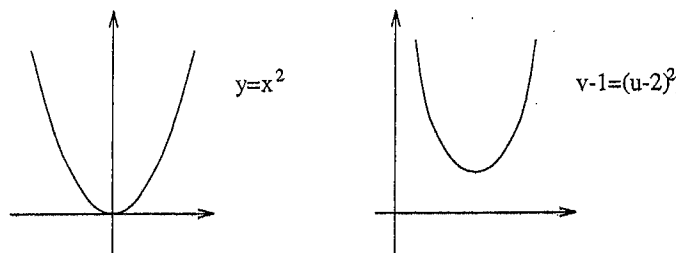


Figura 6.1. Translação

- **Exercício 22** – O movimento do Exercício 21 se encarrega de *escorregar sem girar*, simultaneamente, o plano cartesiano duas unidades para a direita e uma para cima. Dê outros exemplos de movimento deste tipo, ilustrando seu efeito em alguns pontos e figuras do plano.

Definição

Uma translação segundo o ponto (p, q) em $\mathbb{R}^2$ é uma função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + p, y + q)$.

- **Exercício 23** – Descreva o efeito de cada translação a seguir:

- $T(x, y) = (x - 1, y)$
- $T(x, y) = (x, y - \sqrt{2})$
- $T(x, y) = (x, y)$
- $T(x, y) = (x + \pi^2, y - \pi^2)$

- **Exercício 24** – Considere a translação $(x, y) \mapsto (x + 2, y + 1)$.

- Esboce o gráfico de cada condição que você escolheu como exemplo no Exercício 20.1.
- Agora esboce o gráfico da imagem de cada um deles pela translação T .

- Seja $C(x, y)$ cada condição do item 1, sejam $u = x + 2$ e $v = y + 1$. Calcule o respectivo $C(u, v)$.

- **Exercício 25** – Seja $C(x, y)$ cada condição do Exercício 20.2. Sejam $u = x + 2$ e $v = y + 1$. Encontre $C(u, v)$ para cada uma delas.

- **Exercício 26** – Este exercício é muito importante, pois cumpre o objetivo de encontrar a equação geral da reta, do círculo, da parábola, da elipse e da hipérbole, transladados da origem para um ponto genérico (p, q) do plano cartesiano. Refaça o Exercício 25 para uma translação arbitrária $T(x, y) = (x + p, y + q)$.

Vimos que, dada a condição $C(x, y): y = x^2$, quando realizamos a translação $T(x, y) = (u, v)$, onde $u = x + 2$ e $v = y + 1$, obtemos $C(u, v): v - 1 = (u - 2)^2$.

Sabemos que o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola de foco em $(0, 1/4)$ e diretriz $y = -1/4$. É possível assegurar que o gráfico da nova condição, $v - 1 = (u - 2)^2$, é ainda uma parábola?

Sim. Na verdade, podemos até adiantar que o seu foco será o ponto $T(0, 1/4) = (2, 1 + 1/4)$ e sua diretriz, a reta $y = 1 - 1/4$. Verifique no próximo exercício.

- **Exercício 27** – Encontre a condição $C(u, v)$ satisfeita pelos pontos da parábola de foco em $(2, 5/4)$ e diretriz $u = 3/4$. Compare o resultado com o do Exercício 21.

É fácil generalizar o que acabamos de afirmar: a imagem de uma parábola por qualquer translação é uma nova parábola. A razão disso é que uma translação não deforma as figuras. Melhor dizendo, uma translação preserva as distâncias entre pontos, é um movimento rígido, ou isometria. Qualquer propriedade — como a que define a parábola, o círculo, a reta e as mais importantes figuras geométricas — construída sobre o conceito de distância será preservada por uma isometria.

Definição

Uma função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma *isometria* se preserva a distância entre pontos — isto é, se para quaisquer pontos P e Q , fazendo $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$, temos $P'Q' = PQ$.

- **Exercício 28** – Mostre que translação é uma isometria.
- **Exercício 29** – Você já conhece, pelo Exercício 26, a equação geral de algumas curvas planas.

1. Comparando com aqueles resultados, esboce o gráfico da condição abaixo, classificando o tipo de curva.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| a) $y = (x + 5)^2$ | b) $y + 3/2 = -(x + 5)^2$ |
| c) $y = x^2 + 10x + 25$ | d) $y = x^2 - 8x$ |
| e) $y + \sqrt{2} = 3x$ | f) $x^2 - 5x + 6 = 0$ |
| g) $y^2 = x$ | h) $y^2 = x^2$ |
| i) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$ | j) $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 6$ |
| l) $y - 1 = \frac{1}{x - 2}$ | m) $xy + y = 1$ |
| n) $(x + 4)^2 - (y - 4)^2 = 6$ | o) $y = x + 1 $ |
| p) $y = -x - 1 $ | q) $y = 2x + 2 $ |
| r) $x^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$ | s) $x^2 + 2y^2 - 4y + 1 = 0$ |
| t) $ y = x + 1$ | u) $ xy = 1$ |
| v) $(xy - 1)(xy + 1) = 0$ | x) $ y = x^2$ |

2. Em cada item acima, onde achar conveniente, defina uma translação $T(x, y) = (u, v)$, de modo que a condição $C(x, y)$ seja simplificada quando escrita em termos de u e v .

- **Exercício 30**

1. Esboce o gráfico das condições:

a) $y = 2$

b) $y = |x - 1|$

c) $y = 2$ e $y = |x - 1|$

2. Encontre, no gráfico do item c acima, os valores de x tais que $|x - 1| = 2$.

- **Exercício 31** – Siga o modelo de resolução do exercício anterior para resolver graficamente as equações e desigualdades abaixo.

a) $x^2 < 9$

b) $\frac{1}{x} \leq 1$ ($x \neq 0$)

c) $\frac{1}{x - 2} > 1$

d) $|x + 2| > 2$

e) $|x - 1| < |x + 5|$

f) $|x - 1| < |x + 5| - 4$

g) $|x + 1| = |x| + 1$

h) $|x^2 - 1| \geq 1$

i) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

j) $|x - 1| < |x + 5| + |x + 2|$

l) $\sqrt{x} < x$ ($x \geq 0$)

m) $0 \leq x^3 \leq x^2$

n) $x^3 - x = 0$

o) $x^2 + y^2 = 9$ e $y + 1 = (x + 1)^2$

p) $\frac{1}{x} = x - 1$ ($x \neq 0$)

q) $Ax + By = C$ e $Dx + Ey = F$

- **Exercício 32**

1. Discuta, em termos de A , B e C , a forma e a posição do gráfico da condição abaixo, ilustrando.

Atenção: faça, sistematicamente, todos os casos possíveis para A , B e C : maior do que 0, menor do que 0, igual a 0.

a) $y = Ax + B$

b) $y = A(x + B)^2 + C$

c) $y = \frac{A}{x + B} + C$

d) $y = |Ax + B| + C$

2. Em cada item acima, responda graficamente para que casos a equação $y = 0$ tem uma ou mais soluções (x).

Uma das justificativas para termos estudado as translações em $\mathbb{R}^2$ é que isso nos levou a resolver graficamente, por exemplo, equações e desigualdades do segundo grau ou envolvendo módulo. Você pode perceber como já é capaz, não apenas de resolver, mas também, de compreender visualmente a solução desse tipo de problemas (o que foi bem mais custoso no capítulo de conjuntos numéricos). Como a compreensão de outros fatos sobre números, funções e condições pode ser aumentada com um maior estudo dos movimentos no plano cartesiano, vamos progredir neste assunto.

Além de translações, existem outros movimentos importantes em $\mathbb{R}^2$, como: reflexões, rotações, dilatações, inversões etc. A condição inicial é que, para qualquer destas funções, cada ponto de $\mathbb{R}^2$ seja imagem de exatamente um ponto de $\mathbb{R}^2$. Tais funções são bijeções do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

- Exercício 33 - Mostre que translação é uma bijeção.

- Exercício 34

1. Explique o efeito de cada função abaixo, de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Sugestão: assinale alguns pontos e figuras (formadas por pontos) e observe suas imagens. Evite exemplificar com retas ou cônicas: o Exercício 38 explicará o porquê.

- | | |
|--|----------------------------|
| a) $T(x, y) = (x, y + 1)$ | b) $T(x, y) = (x , y)$ |
| c) $T(x, y) = (2x, y)$ | d) $T(x, y) = (x, -y)$ |
| e) $T(x, y) = (x , y)$ | f) $T(x, y) = (-x, -y)$ |
| g) $T(x, y) = (1, y)$ | h) $T(x, y) = (y, x)$ |
| i) $T(x, y) = (2x, 2y)$ | j) $T(x, y) = (y, -x)$ |
| l) $T(x, y) = (-x, y)$ | m) $T(x, y) = (-x + 1, y)$ |
| n) $T(x, y) = (x, y^2)$ | o) $T(x, y) = (x, y^3)$ |
| p) $T(x, y) = \begin{cases} (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ | |

2. Diga quais das funções acima são bijeções. Justifique.
3. Diga quais são isometrias.

- Exercício 35

1. Descreva o efeito da função $T(x, y) = (2x, y)$
- na reta $y = 3x$
 - na parábola $y = x^2$
 - no círculo $x^2 + y^2 = 1$
 - na hipérbole $xy = 1$
 - na hipérbole $x^2 - y^2 = 1$
 - na elipse $x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$
2. Se $u = 2x$ e $v = y$, escreva cada condição $C(x, y)$ acima em termos de u e v — isto é, ache $C(u, v)$.
3. Generalize de algum modo os itens acima.

- Exercício 36 - Considere a função T tal que

$$T(x, y) = \begin{cases} (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Descreva o efeito de T sobre estas retas e círculos:

- $x^2 + y^2 = 1$
- $x = 1$
- $y = 1/2$
- $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

Sugestão: faça $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $v = \frac{y}{x^2+y^2}$ e reescreva cada condição $C(x, y)$ acima em termos apenas de u e v , eliminando x e y .

- **Exercício 37** – Todos os movimentos rígidos, ou isometrias, em $\mathbb{R}^2$ podem ser expressos em termos de apenas três tipos: translações, reflexões e rotações. Classifique cada isometria do Exercício 34.3 como um destes três, ou como composição de dois deles.

- **Exercício 38**

1. Diga quantas isometrias em $\mathbb{R}^2$ levam a figura abaixo exatamente sobre si mesma.
 - a) reta $y = kx$
 - b) círculo $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$)
 - c) parábola $y = kx^2$ ($k \neq 0$)
 - d) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b \neq 0$) ($a \neq b$)
 - e) hipérbole $xy = k$ ($k \neq 0$)
 - f) hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b \neq 0$)
2. Em cada item acima, descreva todas as isometrias que conseguir, dando a expressão de $T(x, y)$.

O esboço do gráfico de uma condição é facilitado se pudermos adiantar, analisando sua equação, certas simetrias que o gráfico deve possuir. Por exemplo, para o gráfico de $C(x, y) : y = x^2$, basta calcularmos os seus pontos onde $x \geq 0$. Isso porque $C(-x, y) : y = (-x)^2 = x^2$. Daí, se $C(x, y)$ é verdadeiro, então $C(-x, y)$ é verdadeiro: $C(x, y) \implies C(-x, y)$. (Na verdade, $y(x) = x^2$ é uma função par e, conforme o Exercício 60 do capítulo anterior, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo vertical.)

Podemos generalizar: o gráfico de uma condição C é simétrico em relação ao eixo vertical Oy , se e somente se vale a implicação $C(x, y) \implies C(-x, y)$.

As simetrias mais simples de serem testadas são aquelas em relação ao eixo horizontal Ox , ao eixo vertical Oy , à origem $(0, 0)$, à bissetriz ímpar (reta $x = y$) e à bissetriz par (reta $x = -y$).

- **Exercício 39** – Dê a expressão de $T(x, y)$, o simétrico do ponto (x, y) em relação:

- a) ao eixo horizontal
- b) ao eixo vertical
- c) à origem
- d) à bissetriz ímpar
- e) à bissetriz par

- **Exercício 40**

1. Dê três exemplos de condição $C(x, y)$ cujo gráfico seja simétrico em relação:
 - a) ao eixo horizontal
 - b) ao eixo vertical
 - c) à origem
 - d) à bissetriz ímpar
 - e) à bissetriz par
2. Vimos que a propriedade que caracteriza o gráfico de C ser simétrico em relação ao eixo vertical é: $C(x, y) \implies C(-x, y)$. Escreva a propriedade análoga para cada uma das outras simetrias acima.

- **Exercício 41** – Diga quais das cinco simetrias acima tem o gráfico de:

- a) $y = kx$
- b) $x^2 + y^2 = r^2$
- c) $y = kx^2$
- d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- e) $xy = 1$

$$f) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Exercício 42 – Idem, para cada condição do Exercício 1.

- Exercício 43 – Idem, para cada uma destas condições:

a) $|y| = |x|$

b) $y = x^3 - 3x$

c) $x^5 + y^5 - x - y = 0$

d) $y = 2^x + 2^{-x}$

e) $x^{1000} + y^{1000} = 1$

f) $x^{1000} - y^{1000} = 1$

- Exercício 44 – Esboce o gráfico das condições dos itens e) e f) acima, levando em consideração:

1. aspectos de simetria

2. se os domínios de x e y são limitados ou não.

- Exercício 45 – Dê três exemplos de condições cujos gráficos tenham:

a) todas as cinco simetrias acima;

b) cada uma daquelas cinco simetrias, mas as outras não. Pelo que aprendemos sobre modelos, provaríamos que uma destas simetrias é independente das outras, apontando uma figura: 1. para ela e as outras quatro; 2. onde a simetria não ocorresse, mas as outras sim.

Responda com figuras:

c) Essas cinco simetrias são independentes?

d) Caso alguma delas possa ser obtida de outras, tome um ponto genérico (x, y) e mostre como isso acontece.

- Exercício 46

1. Desenhe um gráfico de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Estenda este gráfico ao de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = f(x+1)$.

3. Dê mais três exemplos de gráficos de funções f tais que $f(x) = f(x+1)$.

- Exercício 47 – Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x+1) = f(x) + 1$.

a) Dê dois exemplos.

b) Dê um exemplo de f ímpar com esta propriedade.

c) Mostre que não existe f par com esta propriedade.

- Exercício 48 – Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

a) Dê dois exemplos.

b) Verifique que se f se anula em algum ponto diferente de zero, f se anula em todo o domínio.

Sugestão: escreva formalmente esta implicação.

c) Mostre que se $f(0) \neq 0$, então f é constante — isto é, $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = c$. Quem é a constante c ?

- Exercício 49 – Diga como identificar, olhando para o gráfico de uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, se ela tem a propriedade abaixo. Dê um exemplo ou um contra-exemplo, em cada caso.

a) é realmente uma função

b) é injetora

c) é sobrejetora

d) é bijetora

e) é inversível

- f) é a inversa de uma função g cujo gráfico é dado.
- g) é par
- h) é ímpar
- i) tem um certo número c como raiz, isto é, $f(c) = 0$
- j) tem um certo número c como ponto fixo ($f(c) = c$)
- l) coincide em algum ponto com uma certa função g .

A

Cardinalidade

A motivação que demos para introduzir o conceito de função foi o processo que usamos para contar o número de elementos de um conjunto finito. Contar significa estabelecer uma correspondência (uma função) do conjunto dado com o conjunto dos números naturais.

Essa idéia originou-se da nossa intuição sobre como comparar conjuntos. Realmente, dissemos que um conjunto A tem um número de elementos menor ou igual do que um outro, B , se existe uma função injetora de A em B . E os dois conjuntos têm um número igual de elementos se existe uma função bijetora de A em B .

Vejamos um exemplo. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Então a função $f: A \rightarrow B$, tal que $f(x) = x$, é injetora, e o número de elementos de A é menor ou igual que o de B . Por outro lado, não existe função injetora de A em B , já que, se existisse, teríamos igualmente uma função bijetora de B em A (a sua inversa), o que contraria o *Princípio da Casa de Pombos* (se quatro pombos devem ocupar três casas, pelos menos dois pombos ficarão juntos). Conclusão: o número de elementos de $A = \{1, 2, 3\}$ é estritamente menor que o de $B = \{1, 2, 3, 4\}$, como era de se esperar.

Princípio da casa de pombos

Se $n + 1$ pombos devem ocupar n casas, pelo menos dois pombos ficarão juntos.

Ou, em termos de função:

Não existe função injetora de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ em $\{1, 2, \dots, n\}$.

Este critério de comparar conjuntos oferece resultados mais interessantes quando se trata de conjuntos infinitos. Sabemos que existem infinitos números naturais, infinitos números inteiros, infinitos números racionais, infinitos números reais etc. Mas desejamos um modo razoável e produtivo de classificar tais infinitos. Serão todos estes infinitos iguais, ou uns maiores do que outros?

• Exercício 1

Pense seriamente sobre isto:

- Como você compararia, ou classificaria, os *infinitos* do número de elementos de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$? Especifique seu critério de comparação.
- Procure algum critério pelo qual os quatro *infinitos* não sejam todos diferentes.

Observe que dizer que o *infinito* dos números inteiros é maior do que o *infinito* dos números naturais pode parecer razoável, já que $\mathbb{Z}$ contém todos os elementos de $\mathbb{N}$, mais infinitos outros. Bem, isto é até coerente com o mesmo raciocínio para conjuntos finitos: $\{1, 2, \dots, n, \dots, n+k\}$ tem mais elementos que $\{1, 2, \dots, n\}$, que é seu subconjunto.

Por este critério teríamos que existem menos números naturais que inteiros, menos inteiros que racionais etc. Mas este critério não é bom. Para citar apenas uma de suas limitações, como compararíamos dois conjuntos tais que nenhum deles contém o outro?

Não vamos prosseguir discutindo. Na verdade, o critério talvez seja pouco eficiente, do mesmo modo como algumas formalizações que são tão impregnadas da intuição que apenas refletem de volta tudo o que já sabemos, sem produzir nada de novo.

Para comparar conjuntos infinitos vamos pensar como o fizemos com finitos. Assim, as definições seguintes valem para ambos os casos.

Definição

Dois conjuntos A e B têm *mesma cardinalidade* (notação: $\#A = \#B$) se existe uma função bijetora de A em B . Um conjunto A tem *cardinalidade menor ou igual* do que um conjunto B (notação: $\#A \leq \#B$) se existe uma função injetora de A em B .

Estamos, desta maneira, conseguindo uma classificação dos *infinitos*. Se provarmos que, para dois conjuntos dados A e B , existe uma função injetora de A em B , mas não existe função bijetora, então $\#A \leq \#B$, mas $\#A \neq \#B$. Logo, $\#A < \#B$.

• Exercício 2 – Mostre que:

- $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Z}$
- $\#\mathbb{Z} \leq \#\mathbb{Q}$
- $\#\mathbb{Q} \leq \#\mathbb{R}$
- $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{R}$
- $\#\mathbb{Z} \leq \#\mathbb{N}$

Um resultado muito interessante sobre conjuntos infinitos é que, segundo a definição acima, um conjunto pode ter o mesmo número de elementos (mesma cardinalidade) do que uma parte sua. Podemos, por exemplo, dizer que existem tantos números inteiros quanto números pares, o que parece contraditório com a nossa expectativa. Realmente, basta que encontremos uma função bijetora do conjunto para o seu subconjunto em questão. Esta é precisamente a definição de conjunto infinito:

um conjunto é *infinito* se pode ser posto em bijeção com algum subconjunto diferente de si mesmo. Caso contrário, o conjunto é *finito*.

• **Exercício 3** – Mostre que:

a) $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$

Sugestão: veja o Exercício 27 do Capítulo 5.

b) $\#\mathbb{Z} = \#2\mathbb{Z}$, onde $2\mathbb{Z} = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$. Generalize.

• **Exercício 4**

1. Ordene as peças de um jogo de dominós, de tal modo que tal ordenação possa ser ampliada para conter também peças como p/q , para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$.

2. Mostre que $\#\mathbb{Q}^+ = \#\mathbb{N}$.

Sugestão: use o item 1. Ou represente os elementos de $\mathbb{Q}^+$, não na reta numérica, mas no plano cartesiano, escrevendo p/q como (p, q) . Daí, faça a contagem como no Exercício 27 do Capítulo 5.

3. Adapte o item anterior para mostrar que $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$.

• **Exercício 5** – Esboce o gráfico de uma função bijetora que ilustre que os pares de conjuntos abaixo têm mesma cardinalidade. Expresse a tal função por uma regra.

a) $\#\mathbb{R} = \#\mathbb{R}^+$

b) $\#(0, 1) = \#\mathbb{R}$

c) $\#(0, 1) = \#\mathbb{R}$ (compare com o item anterior).

Sugestões:

1) Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

2) Complete o gráfico, de modo que a imagem de cada intervalo $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ seja um intervalo entre dois números inteiros consecutivos.

• **Exercício 6** – A partir dos Exercícios 3.a e 4.3 mostre que $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}$. Tire uma conclusão.

• **Exercício 7** – Como no último exercício, tente mostrar que $\#\mathbb{R} = \#\mathbb{N}$.

Teorema (Cantor)

Não existe função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração:

Todo número real pode ser escrito, de modo único, na forma $\pm k, d_1 d_2 \dots d_n \dots$, onde $k \in \mathbb{N}$, cada d é um dos dígitos $0, 1, \dots, 9$ e não existe n tal que todos os dígitos após d_n sejam zero (com a única exceção do número zero — representado por $0, 00\dots$ — onde todos são zero). (Cap. 4)

Vamos provar o teorema por redução ao absurdo.

Suponhamos que exista uma função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja r_n o número real que lhe corresponde. Seja $d_{n,n}$ o n -ésimo dígito decimal de r_n . Nosso propósito é apontar um número real b que não tenha correspondente em $\mathbb{N}$ pela função, o que contradiz o fato dela ser bijetora. Formemos o tal número b assim: $b = 0, d_1 d_2 \dots$, tal que $d_n = 1$ se $d_{n,n} \neq 1$ e $d_n = 2$ se $d_{n,n} = 1$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $d_n \neq d_{n,n}$. Como $b \in \mathbb{R}$, b deve ser um dos r_n : digamos, $b = r_i$. Mas o i -ésimo dígito decimal de b é diferente do i -ésimo de r_i : $d_i \neq d_{i,i}$. Logo, $b \neq r_i$ — contradição. Portanto, não existe função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

A demonstração acima utiliza uma técnica, que é conhecida por **diagonal de Cantor**. Será mais fácil compreendê-la se arranjarmos os dígitos dos números reais r_n numa tabela, omitindo a sua parte inteira, que não influi na demonstração:

$r_1:$	$d_{1,1}$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$\dots$
$r_2:$	$d_{2,1}$	$d_{2,2}$	$d_{2,3}$	$\dots$
$r_3:$	$d_{3,1}$	$d_{3,2}$	$d_{3,3}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$

Para se obter $b = 0, d_1 d_2 \dots$, siga pela diagonal $d_{1,1}, d_{2,2}, \dots$, escrevendo um dígito $d_1 \neq d_{1,1}, d_2 \neq d_{2,2}$, etc.

Por exemplo, se a tabela começasse assim:

r_1 :	,4	1	4	6	...
r_2 :	,9	9	9	9	...
r_3 :	,1	0	1	9	...
r_4 :	,2	6	8	2	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

então b começaria por 0,1121... e já veríamos que ele não seria nenhum dos números r_1, r_2, r_3 ou r_4 [1].

Revendo o que foi feito até agora, temos que:

1. $\#N = \#Z$ e $\#N = \#Q$ (Exercícios 3.a e 4.3)
2. $\#N \leq \#R$ (Exercício 1.d)
3. Mas é falso que $\#N = \#R$ (Teorema acima).

Podemos, então, escrever: $\#N = \#Z = \#Q < \#R$.

Chegamos, deste modo, a uma classificação dos *infinitos* para os conjuntos N, Z, Q e R . Os conjuntos que têm mesma cardinalidade que N são chamados **enumeráveis**. Assim, N, Z e Q são enumeráveis. R é não-enumerável.

- **Exercício 8** – Tomamos algumas liberdades quando escrevemos, como acima, $\#N = \#Z = \#Q < \#R$.
 1. Primeiro, porque a expressão $\#A < \#B$ ainda não foi definida. Defina-a, então.
 2. Segundo, porque não demonstramos que o símbolo $=$ na expressão $\#A = \#B$ goza da propriedade de *transitividade*: $\#A = \#B$ e $\#B = \#C \implies \#A = \#C$. E é

isto que permite escrever algo como $\#A = \#B = \#C$. Mostre que essa transitividade realmente acontece.

Para que o sinal $=$ na expressão $\#A = \#B$ tenha as propriedades da relação de igualdade (de números, de conjuntos, de funções etc.), ele deve satisfazer, além da transitividade, as duas outras propriedades abaixo. Mostre que também elas valem.

3. *simetria*: $\#A = \#B \implies \#B = \#A$
4. *reflexividade*: $\#A = \#A$

Este critério de comparação de infinitos que adotamos servirá para esclarecer muita coisa sobre os números reais. Ora, o conjunto dos números reais, R , é formado pelos números racionais (que formam Q) e pelos irracionais, como $\pi, \sqrt{2}$, e etc (que formam I). O que você acha: existem mais números racionais que irracionais, ou o contrário?

- **Exercício 9** O conjunto dos números irracionais (I) é enumerável? Mostre que se I fosse enumerável, então, como Q é enumerável, R também o seria, contradizendo o teorema visto.

Como $\#N \leq \#I$ (é fácil provar) e, pelo último exercício, $\#N \neq \#I$, então $\#N < \#I$. Logo, $\#Q < \#I$ — o que significa que *existem mais números irracionais que racionais*.

Isto parece intuitivamente razoável. Sabemos que todo número real tem uma representação decimal do tipo $\pm k, d_1 d_2 \dots d_n \dots$ com infinitas casas decimais. Imaginemos um mecanismo que sorteasse uma bola numerada com 0, 1, ..., ou 9. Se fizéssemos, hipoteticamente, uma sequência infinita de sorteios, parece muito pouco provável que o número $0, d_1 d_2 \dots$ em que d_n fosse o resultado do n -ésimo sorteio, tivesse um conjunto finito de dígitos ($d_i d_{i+1} \dots d_{i+k}$) que se repetisse indefinidamente, formando uma dízima periódica. Ou seja, parece pouco provável que obtivéssemos um número racional.

Uma outra aplicação interessante do conceito de cardinalidade refere-se aos números *transcendentes*. Dizemos que um número real é *algébrico* se é raiz de algum polinômio em x com coeficientes inteiros. Caso contrário, o número é *transcendente*. Por exemplo, são números algébricos: -3 , $2/5$ e $\sqrt{2}$ — pois são raízes, respectivamente, de $x + 3$, $5x - 2$ e $x^2 - 2$. (Generalize estes exemplos até onde puder.)

Está provado que π , e e $0,101001000\dots$ são números transcendentos. São muito raros os exemplos conhecidos de tais números — no entanto, *existem mais números transcendentos do que algébricos!* Realmente, o conjunto dos números algébricos é enumerável, já que podemos enumerar todos os polinômios em x a coeficientes inteiros, e dentro de cada polinômio ordenar suas raízes.

- **Exercício 10** — Formalize melhor esta última afirmação: enumere o conjunto dos números algébricos.

Sugestões:

- 1) Enumere os polinômios de 1º grau, os de 2º grau etc.
- 2) Crie, sobre essas enumerações, uma nova para todos os polinômios.
- 3) Complete os detalhes.

- **Exercício 11** — Este exercício é para provar que *existem tantos pontos na reta quanto no plano* — isto é, $\#\mathbb{R} = \#\mathbb{R}^2$.

1. Sejam $E^1 = \{x | 0 < x \leq 1\}$, $E^2 = \{(x, y) | 0 < x \leq 1 \text{ e } 0 < y \leq 1\}$. Mostre que $\#E^1 = \#E^2$.

Sugestão: como vimos, todo número de E^1 pode ser representado na forma $0, d_1 d_2 \dots d_n \dots$ (que se estende indefinidamente). Separe $d_1 d_2 \dots d_n \dots$ em blocos, como neste exemplo:

0,3204008... 3 2 04 008 Distribua, então,

de modo conveniente os blocos para formar as duas coordenadas do ponto (x, y) associado ao número dado.

2. O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser fragmentado em segmentos do tipo E^1 e o conjunto $\mathbb{R}^2$, em quadrados do tipo E^2 . Encontre uma bijeção entre os segmentos de $\mathbb{R}$ e os quadrados de $\mathbb{R}^2$.

3. Complete a demonstração, reunindo as idéias de 1 e 2.

- **Exercício 12** — Generalize o resultado conseguido no exercício anterior.

Referências Bibliográficas

- [1] R. L. Wilder, *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, 1965.

Bibliografia

- [1] W. W. R. Ball e H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover, 1982.
- [2] A. C. Barreto, *Matemática Funcional I*, Vega, Belo Horizonte, 1970.
- [3] P. Berloquin, *100 Jogos Numéricos*, Gradiva, Lisboa, 1993.
- [4] C. F. Brumfiel, R. E. Eicholz e M. E. Shanks, *Conceitos Fundamentais da Matemática Elementar*, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro.
- [5] Bush and Obreanu, *Basic Concepts of Mathematics*, Holt Rinehart Winston, 1965.
- [6] R.S. Hall, *About Mathematics*, Prentice Hall.
- [7] H. Herstein, *Tópicos de Álgebra*, Polígono, São Paulo, 1970.
- [8] H. R. Jacobs, *Geometry*, W. H. Freeman and Company, 1974.
- [9] J. W. Kitchen, *Calculus of One-Variable*, Addison-Wesley, 1968.
- [10] S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley, 1969.
- [11] E. E. Moise, *Cálculo I*, Edgard Blücher, São Paulo, 1970.
- [12] G. Mott-Smith, *Mathematical Puzzles for Beginners & Enthusiasts*, Dover, 1954.

- [13] E. Nagel e J. R. Newman, *A Prova de Gödel*, Perspectiva, São Paulo, 1973.
- [14] K. L. Nielsen, *Algebra: a Modern Approach*, Barnes and Noble College Outline Series, 1969.
- [15] G. Polya, *How to Solve it*, Princeton University Press, 2nd ed., 1973 (*A Arte de Resolver Problemas*, Interciência, Rio de Janeiro, 1977).
- [16] ———, *Mathematical Discovery*, 2 vol., John Wiley & Sons, 1962.
- [17] F. Schuh, *The Master Book of Mathematical Recreations*, Dover, 1968.
- [18] R. L. Wilder, *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, 1965.
- [19] *Mathematics in the Modern World* - coletânea de textos da revista *Scientific American*.

Impresso na Imprensa Universitária da
Universidade Federal de Santa Catarina
em Outubro de 1995
Florianópolis - Santa Catarina - Brasil